72557

1
TOMUL 40
ianu. — febr.
1981

MUZEUL 1848

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. E. CARAFOLI, *redactor şef*

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. C. IACOB,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. O. ONICESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. DAN PAVELESCU,
Prof. R. PRIŞCU,
Dr. ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Ing. I. CRIŞAN,
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. E. CARAFOLI, *redactor şef*

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. D. MATEESCU,
Ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie,*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacţie,*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa: ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 79515, str. 13 Decembrie nr. 3, P.O. Box 136—137, telex 11226, Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Revistele se pot procura (direct sau prin poştă) şi prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 40, nr. 1 ianuarie—februarie 1981

Budapesti Műszaki Egyetem
13901 1981
1989
25571

SUMAR

STUDII

MIHAI POPESCU, Transferul optimal în punctele de libraţie coliniare . . . 3
ŞTEFAN STAICU, Citeva aspecte privind dinamica solidului cu un punct fix 27
AL. D. STAN, Asupra mişcărilor nestaţionare prin fisuri cu pereţi permeabili 41
N. POSEA, AL. ANGHEL, Calculul dinamic al sistemelor de conducte 53
GH. MIHĂIŢĂ, O metodă aproximativă de determinare a frecvenţelor vibraţiilor proprii la cadrele din bare cu pereţi subţiri de secţiune deschisă . . . 75
F. ROMAN, P. ALEXA, Aplicaţii ale programării matematice la calculul grinzilor pe mediu elastic prin metoda elementelor finite 89
POLIDOR BRATU, Studiu privind pulsaţiile proprii şi transmisibilitatea vibraţiilor funcţie de variaţia rigidităţii elementelor antivibratile din cauciuc la compactoarele vibratoare autopropulsate. 101
GEORGE BĂLAN, Asupra identificării statistice a funcţiei de răspuns la frecvenţă a unui strung 121
I. SPULBER, C. SPULBER, Constribuţii la studiul tehnologiilor de prelucrarea filierelor pentru trefilare prin mijloace neconvenţionale. 145

NOTĂ

GEORGE DOBRE, CONSTANTIN TÂRCOLEA, MIHAIL RAŞEEV, Calculul ariei flancurilor active la angrenajele cilindrice cu dinţi înclinaţi în evolventă. 153

RECENZII 159

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 1, 1981, P. 1—160

TRANSFERUL OPTIMAL ÎN PUNCTELE DE LIBRAȚIE COLINIARE

de MIHAI POPESCU
Institutul național pentru creație științifică și tehnică

Prezenta lucrare are ca scop să determine legile de comandă care guvernează mișcarea vehiculelor spațiale astfel încît transferul în punctele de librație coliniare să se facă cu minimum de combustibil.
Formularea matematică implică rezolvarea unei probleme variaționale de tip Lagrange cu extremități fixe. Se analizează condițiile de suficiență și necesitate care stabilesc natura extremumului funcționalei ce definește indicele de performanță. De asemenea, studiul întreprins cuprinde considerații privind stabilitatea mișcării necomandate în jurul punctelor de librație coliniare din sistemul Pămînt-Lună utilizînd în acest scop energia cinetică și potențială a corpului infinitezimal.

1. INTRODUCERE

În misiunile spațiale actuale și de viitor, o deosebită importanță capătă din ce în ce mai mult operațiile legate de punctele de librație ale diverselor sisteme de planete, în general, și a sistemului Pămînt-Lună în special. Un obiectiv de mare importanță pentru viitoarele operații spațiale îl constituie atingerea punctelor de librație din sistemul Pămînt-Lună. Acest lucru este posibil fie venind direct dinspre planetele sistemului, fie prin coborîrea de pe orbite în jurul acestor puncte.

S-a constatat că variații mici ale vitezelor inițiale determină o deviere importantă față de punctele de librație utilizînd metoda impulsurilor.

Așa cum au semnalat-o lucrările anterioare [1], [2], [3], acest inconvenient poate fi înlăturat prin utilizarea continuă a unei tracțiuni mici. În aceste condiții, o problemă deosebit de importantă care se impune a fi rezolvată este aceea a determinării legilor de comandă și deci a traiectoriei unui vehicul spațial astfel încît consumul de combustibil necesar transferului în punctele de librație să fie minim.

2. CONSIDERAȚII PRIVIND DEDUCEREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

Problema determinării mișcării unui corp infinitezimal (corp a cărui masă este neglijabilă comparativ cu centrul sau centrele de atracție) în cîmpul a două corpuri de mase finite este cunoscută ca problema restrînsă a celor trei corpuri. Considerăm vehiculul spațial ca fiind corpul de masă infinitezimală ce se deplasează în cîmpul generat de cele două planete

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 1, 1981, P. 3–25

care evoluează pe o orbită circulară. Se presupune că orbitele corpurilor de masă finită se află în același plan trecînd prin centrul maselor. S-a demonstrat că în planul mișcării punctului de masă infinitezimală aflat sub influența atracției corpurilor de masă finită există cinci puncte de echilibru, dintre care trei coliniare cu masele finite, celelalte două fiind situate în puncte simetrice față de axa comună a centrelor maselor finite și care formează triunghiuri echilaterale cu centrele de masă finită.

Fie G centrul de greutate al maselor finite și GXY un sistem inerțial. Presupunînd un sistem Gxy a cărui axă x coincide cu linia centrelor de masă finită, noul sistem de coordonate se rotește cu masele finite care au viteza unghiulară constantă ω. În sistemul rotitor se determină energia cinetică și potențială a corpului infinitezimal care sînt utilizate în ecuațiile lui Lagrange.

Sistemul de unități adaptat este astfel încît unitatea de lungime este distanța dintre corpurile de masă finită, iar unitatea de timp este aleasă astfel ca perioada de revoluție a maselor finite să fie 2π.

Dacă vom nota cu $L\xi\eta$ un sistem rotitor de axe cu originea în punctele de librație coliniare ale sistemului Pămînt-Lună și făcînd dezvoltările menționate mai sus, se obțin ecuațiile de mișcare sub acțiunea unei forțe de propulsie de mică tracțiune :

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= V_\xi, \\
\frac{dV_\xi}{dt} &= 2\omega V_\eta + K_1\xi + a_\xi, \\
\frac{d\eta}{dt} &= V_\eta, \\
\frac{dV_\eta}{dt} &= -2\omega V_\xi + K_2\eta + a_\eta,
\end{aligned} \tag{1}$$

unde K_i $(i = 1, 2)$ sînt constante care depind de raportul maselor finite m_i, de distanța de la Pămînt la punctul de librație r și de distanța de la Lună la punctul de librație, ρ fiind date de expresiile

$$\begin{aligned}
K_1 &= 1 + m^* + \frac{2}{r^3} + \frac{2m^*}{\rho^3}, \\
K_2 &= 1 + m^* - \frac{1}{r^3} - \frac{m^*}{\rho^3}.
\end{aligned} \tag{2}$$

3. INDICELE DE PERFORMANȚĂ

În condițiile în care analizăm transferul vehiculelor spațiale de pe orbite ale Pămîntului sau Lunii în punctele de librație, o problemă deosebit de importantă care se impune a fi rezolvată este determinarea legilor de

comandă care induc un consum minim de combustibil de-a lungul traiectoriei de mișcare. În cele ce urmează vom deduce expresia funcționalei care dă consumul minim de combustibil reprezentînd indicele de performanță al problemei de optimum considerate.

Puterea vehiculului este dată de expresia

$$P = -\frac{\dot{m}}{2} c^2, \tag{3}$$

unde c este viteza de ejecție a gazelor.

Accelerația datorată forței de propulsie a tracțiunii este dată de

$$u = -\frac{\dot{m}}{m} c. \tag{4}$$

Există un domeniu admis pentru variația accelerației tracțiunii astfel încît avem

$$|u| \leqslant \bar{u}, \tag{5}$$

$\bar{u}$ fiind o constantă pozitivă.

Din relațiile (3) și (4) rezultă

$$\frac{u^2}{2P} = -\frac{\dot{m}}{m^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{m}\right). \tag{6}$$

Presupunînd puterea vehiculului constantă, se obține

$$\frac{m_0}{m_T} = 1 + \frac{m_0}{2P}\int_0^T u^2 \mathrm{d}t, \tag{7}$$

m_0 și m_T reprezentînd masa combustibilului la valoarea inițială $t = 0$ și la valoarea finală $t = T$.

Din (7) se obține

$$\frac{m_0 - m_T}{m_0} = \frac{\frac{m_0}{2P}\int_0^T u^2 \mathrm{d}t}{1 + \frac{m_0}{2P}\int_0^T u^2 \mathrm{d}t} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{m_0}{2P}\int_0^T u^2 \mathrm{d}t}}. \tag{8}$$

Rezultă că se realizează un consum minim de combustibil atunci cînd u este astfel încît funcționala

$$J = \int_0^T u^2 \mathrm{d}t \tag{9}$$

are cea mai mică valoare posibilă.

4. PROBLEMA DE OPTIMUM

Fie un sistem comandat descris de ecuații de stare de forma :

$$\Phi_i \equiv \frac{dx_i}{dt} - f_i(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r) = 0, \quad i = 1, \dots n, \tag{10}$$

unde x_i, u_r sînt variabilele de stare, respectiv de comandă, iar funcțiile f_i sînt definite de valori ale variabilelor vectoriale $x \in X$ și valorile $u \in U$. Aceste funcții sînt presupuse continui în $x_1 \dots x_n$, $u_1 \dots u_r$ și continui derivabile în $x_1 \dots x_n$, ceea ce înseamnă că funcțiile

$$f_i(x_i, u_k), \quad \frac{\partial f_i(x_i, u_k)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots n, \tag{11}$$

sînt definite și continui pe produsul $X \times U$.

Fie $S_0(t)$ și $S_1(t)$ două varietăți netede de dimensiuni n_0, respectiv n_1 definite de ecuațiile

$$\begin{aligned} g_k^0(x, t) &= 0, \quad k = 1 \dots n - n_0, \\ g_l^1(x, t) &= 0, \quad 1 = 1 \dots n - n_1. \end{aligned} \tag{12}$$

Problema de optimum de tip Lagrange se enunță sub forma :

Printre comenzile admisibile $u = u(t)$ $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ care transferă punctul reprezentativ din poziția $x^0 \in S_0(t_0)$ în $x^1 \in S_1(t_1)$ să se determine acelea care minimizează funcționala

$$J = \int_{t_0}^{t} f_0(x(t), u(t))\, dt. \tag{13}$$

În scopul rezolvării problemei de optimum formulate se utilizează următoarea :

TEOREMĂ. *Dacă curba γ_0 realizează extremumul funcționalei J cu condiția* (10) *și dacă de-a lungul acestei curbe unul dintre determinanții principali ai matricei funcționale*

$$\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, \dots n \tag{14}$$

este tot timpul diferit de zero, atunci γ_0 este o curbă integrală a următorului sistem de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots n, \quad \text{(a)} \\ &\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_k} = 0, \qquad\qquad k = 1, \dots r, \quad \text{(b)} \\ &\Phi_j = 0, \qquad\qquad j = 1, \dots n, \quad \text{(c)} \end{aligned} \tag{15}$$

unde

$$\mathscr{L} = f_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Phi_j, \tag{16}$$

$$\lambda_j = \lambda_j(t).$$

Dacă notăm cu u_1, u_2 componentele acceleraţiei forţei de tracţiune din sistemul (1) şi ţinînd seama de (8), funcţionala (13) devine

$$J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2)\,dt. \tag{17}$$

4.1. NATURA EXTREMULUI

1) Pentru ca funcţia $\mathscr{L}$ definită în (16) să aibă un minimum în raport cu u, nu este suficient ca derivatele ei de ordinul întîi să fie nule, relaţie exprimată de relaţia (15.b). Este necesar în plus ca forma pătratică

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial u_k \partial u_l} \left(f_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Phi_j \right) \alpha_k \alpha_l \tag{18}$$

să fie pozitivă pentru orice versor α de coordonate $\alpha_1, \ldots \alpha_r$. Cu notaţiile din (16) această condiţie devine în cazul problemei noastre

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial u_k \partial u_l} \alpha_k \alpha_l > 0. \tag{19}$$

Inegalitatea (19) poartă denumirea de condiţia lui Legendre. Vom arăta că pentru problema considerată, condiţia lui Legendre este îndeplinită.

Fie funcţia $\alpha(u)$ şi vectorul $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$.

Definim funcţia

$$l(s) = \mathscr{L}(u + s\alpha). \tag{20}$$

Dacă u realizează un minimum pentru $\mathscr{L}$, atunci 0 realizează un minimum pentru l. Rezultă că

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \mathscr{L}(u)}{\partial u_k} \alpha_k = l'(0) = 0, \tag{21}$$

relaţie care coincide cu (15b).

Pentru ca funcţia $l(s)$ să aibă un minimum pentru $s = 0$ este necesar în plus ca

$$l''(s)|_{s=0} > 0. \tag{22}$$

Întrucît

$$l''(s) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial u_k \partial u_l} (u + s\alpha)\alpha_k \alpha_l, \tag{23}$$

utilizarea condiției (22) ne conduce la relația (19) care devine

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2 > 0. \tag{24}$$

Relația (24) este adevărată pentru orice α_i. Cu aceasta, condiția (19) este demonstrată.

2) Satisfacerea condiției lui Legendre nu exclude posibilitatea unui minimum relativ. De aceea, pentru demonstrarea existenței unui minimum absolut (în raport cu întreaga mulțime U) este necesar să fie îndeplinită condiția lui Weierstrass,

$$f_0(x, u) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x, u) \leqslant f_0(x, u^*) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x, u^*), \tag{25}$$

pentru orice $u(t) \neq u^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, unde am notat cu semnul stelat valorile pe care le iau parametrii de comandă pe extremală. Condiția lui Weierstrass devine

$$-u_1^2 - u_2^2 + \lambda_2 u_1 + \lambda_4 u_2 \geqslant -u_1^{*2} - u_2^{*2} + \lambda_2 u_1^* + \lambda_4 u_2^*. \tag{26}$$

Pentru îndeplinirea condiției (26) este necesar și suficient să avem

$$-u_1^2 - u_2^2 + \lambda_2 u_1 + \lambda_4 u_2 = \max(-u_1^{*2} - u_2^{*2} + \lambda_2 u_1^* + \lambda_4 u_2^*). \tag{27}$$

Analizînd expresia din dreapta egalității (26) se observă că ea va fi maximă cînd sînt îndeplinite simultan condițiile

$$u_1^{*2} + u_2^{*2} = \min(u_1^2 + u_2^2), \tag{28}$$

$$\lambda_2 u_1^* + \lambda_4 u_2^* = \max(\lambda_2 u_1 + \lambda_4 u_2). \tag{29}$$

Presupunem adevărată relația (28) astfel încît avem

$$u_1^{*2} + u_2^{*2} \leqslant u_1^2 + u_2^2. \tag{30}$$

Fie intervalul compact $[0, T]$ și funcțiile

$$\begin{aligned} h^*(t) &= u_1^{*2} + u_2^{*2}, \\ h(t) &= u_1^2 + u_2^2, \end{aligned} \tag{31}$$

definite pe intervalul compact $[0, T]$.

Ținînd seama de (30) și (31)

$$h^*(t) \leqslant h(t). \tag{32}$$

Potrivit proprietății de monotonie a integralei definite rezultă

$$\int_0^T h^*(t)\,dt \leqslant \int_0^T h(t)\,dt. \tag{33}$$

Relația (33) exprimă de fapt că pentru valorile parametrilor de comandă situate pe extremală se obține valoarea minimă a integralei

$$J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2)\,dt. \tag{34}$$

Pe de altă parte, din (29) se observă că produsul scalar între vectorii $\bar{\lambda}(\lambda_2, \lambda_4)$ și $\bar{u}^*(u_1^*, u_2^*)$ este maxim atunci cînd vectorii $\bar{\lambda}$ și $\bar{u}^*$ sînt coliniari, ceea ce rezultă din satisfacerea relației (15.b). În concluzie, sînt îndeplinite simultan (28) și (29). Cu aceasta, condiția lui Weierstrass este demonstrată.

3) Integrarea sistemului (15) conduce la determinarea funcțiilor $\lambda_i(t)$ care sînt funcții continui. De asemenea, $\dot{\lambda}_i(t)$ sînt funcții continui. Fie vectorul $\lambda^0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Întrucît componentele sale λ_i, $\dot{\lambda}_i$ sînt funcții continui, rezultă că atît vectorii λ^0 cît și $\dot{\lambda}^0$ sînt vectori continui, ceea ce determină faptul că hedograful vectorului λ^0 este o curbă netedă.

Condițiile Weierstrass-Erdman cer ca în punctele de discontinuitate ale variabilelor de comandă, funcția

$$F_1 = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \dot{x}_i \tag{35}$$

să fie continuă.

Cum λ_i, $x_i (i = 1, \ldots 4)$ sînt funcții continue de-a lungul traiectoriei optime, urmează că funcția F_1 este continuă dacă funcția

$$f_1 = \lambda_2 u_1 + \lambda_4 u_2 \tag{36}$$

este continuă. Acest lucru este evident ținînd seama de expresiile comenzilor care rezultă din (15.b).

4) Considerăm funcția

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i(t) \Phi_i. \tag{36'}$$

Fie

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \tag{37}$$

o funcție scalară reală definită într-un domeniu D al spațiului euclidian X.

Vom numi hipersuprafață a spațiului X ansamblul S de puncte $X = (x_1, \ldots x_n)$ care satisfac relația

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) = 0. \tag{38}$$

Punctele de pe hipersuprafața S în care grad $\varphi(x) \neq 0$ sînt numite puncte nesingulare.

Notăm cu $S_1 \ldots S_k$ hipersuprafețele care nu conțin puncte singulare, fiind definite în spațiul X de ecuațiile

$$\varphi_r(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad r = 1, \ldots k. \tag{39}$$

Intersecția M a acestor hipersuprafețe (adică ansamblul punctelor $x \in X$ care satisfac simultan ecuațiile (39)) se numește varietate continuu diferențiabilă de dimensiune $n - k$ în X dacă îndeplinește condiția următoare : în fiecare $x \in M$ vectorii grad $\varphi_r (r = 1 \ldots k)$ sînt liniar independenți, ceea ce revine la condiția de maximalitate a rangului matricei funcționale

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right), \qquad \begin{matrix} i = 1 \ldots k, \\ j = 1 \ldots n. \end{matrix} \tag{40}$$

În cazul analizat de noi avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathscr{F}_{\dot{x}_k \lambda_i} & \mathscr{F}_{\dot{x}_k \dot{x}_i} \\ 0 & \Phi_{k\dot{x}_i} \end{vmatrix} \neq 0, \; ik = 1 \ldots 4. \tag{41}$$

Într-adevăr,

$$\left\{\mathscr{F}_{\dot{x}_k \lambda_i}, \Phi_{k\dot{x}_i}\right\} = \delta_{ki}, \tag{42}$$

unde δ_{ki} este simbolul lui Kroneker.

Rezultă că extremalele problemei de optimum considerate sînt nesingulare.

5. DETERMINAREA EXTREMALELOR

5.1. INTEGRAREA ECUAȚIILOR LUI LAGRANGE

Efectuînd calculele, ecuațiile (15.a) devin

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -K_1 \lambda_2, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -K_2 \lambda_4, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = 2\omega\lambda_4 - \lambda_1,$$
$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\lambda_3 - 2\omega\lambda_2 \tag{43}$$

sau

$$\dot{\bar{\lambda}} = L\bar{\lambda}, \tag{44}$$

unde L este matricea sistemului (43).

Un sistem fundamental de soluții pentru (43) se obține căutînd soluții de forma

$$\lambda_i = A_i e^{rt}, \quad i = 1, \ldots 4. \tag{45}$$

Înlocuind în sistemul (43) se obține un sistem liniar și omogen în raport cu necunoscutele A_i, iar condiția ca acest sistem să aibă soluții nu toate nule conduce la ecuația algebrică

$$\Delta = |L - rE| = 0, \tag{46}$$

E fiind matricea unitate.

Se găsește

$$r^4 + (4\omega^2 - K_2 - K_1)r^2 + K_1K_2 = 0, \tag{47}$$

ale cărei soluții sînt

$$r_1 = a, \quad r_2 = -a, \quad r_3 = ib, \quad r_4 = -ib,$$

unde

$$a = \left[\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 + \sqrt{(K_1 + K_2 - 4\omega^2)^2 - 4K_1K_2}}{2}\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$b = \left[\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 - \sqrt{(K_1 + K_2 - 4\omega^2)^2 - 4K_1K_2}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{48}$$

Rădăcinilor distincte ale ecuației (47) le corespund patru vectori proprii coloană $\bar{V}_i$ și patru soluții particulare de forma (45) ce constituie un sistem fundamental de soluții în domeniul $|t| < +\infty$, $|\lambda_i| < +\infty$ ($i = 1, \ldots 4$) cu ajutorul cărora soluția generală a sistemului (43) se scrie imediat. Expresiile vectorilor proprii sînt date de

$$\bar{V}_i = (L_{kj})_{r=r_i} \quad i, k, j = 1, \ldots 4, \tag{49}$$

unde L_{kj} sînt complemenții algebrici ai liniei k a determinantului $\Delta(r_i)$.

Dacă notăm cu $\lambda_i^p (i = 1, \ldots 4)$ soluțiile particulare obținute din (45), un sistem fundamental de soluții poate fi luat :

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_1^p &= \frac{\lambda_1^p + \lambda_2^p}{2}, \\
\bar{\lambda}_2^p &= \frac{\lambda_1^p - \lambda_2^p}{2i}, \\
\bar{\lambda}_3^p &= \frac{\lambda_3^p + \lambda_4^p}{2}, \\
\bar{\lambda}_4^p &= \frac{\lambda_3^p - \lambda_4^p}{2i}.
\end{aligned} \tag{50}$$

Soluția generală scrisă cu ajutorul sistemului fundamental de soluții (50) va fi

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^{4} C_i \bar{\lambda}_i^p, \tag{51}$$

unde $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}_i^p$ sînt vectorii coloană, iar C_i sînt constante arbitrare.

Din relația (51), pe baza dezvoltării calculelor, se obțin soluțiile pentru sistemul (43)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} a(4\omega^2 - K_2 + a^2 \\ -a^2 + K_2 \\ -2\omega K_2 \\ 2\omega a \end{pmatrix} e^{at} + C_2 \begin{pmatrix} -a(4\omega^2 - K^2 + a^2) \\ a^2 + K_2 \\ -2\omega K_2 \\ -2\omega a \end{pmatrix} e^{-at} +$$

$$+ C_3 \begin{pmatrix} -b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\sin bt \\ (b^2 + K_2)\cos bt \\ -2\omega K_2 \cos bt \\ -2\omega b \sin bt \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\cos bt \\ (b^2 + K_2)\sin bt \\ -2\omega K_2 \sin bt \\ 2\omega b \cos bt \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Ținînd seama de (15.b) rezultă expresiile căutate ale componentelor accelerației datorită tracțiunii

$$\begin{aligned}
a_\xi = \frac{\lambda_2}{2} = \frac{1}{2} [C_1(-a^2 + K_2)e^{at} + C_2(-a^2 + K_2)e^{-at} + \\
+ C_3(b^2 + K_2)\cos bt + C_4(b^2 + K_2)\sin bt],
\end{aligned} \tag{53}$$

$$a_\eta = \frac{\lambda_4}{2} = C_1 2\omega a e^{at} - C_2 a e^{-at} - C_3 \omega b \sin bt + C_4 \omega b \cos bt.$$

Expresiile funcțiilor de comandă (53) permit determinarea extremalelor pentru problema considerată.

5.2. LEGILE MIȘCĂRII OPTIMALE

Reprezentarea parametrică a traiectoriei optime care asigură transferul vehiculelor spațiale în punctele coliniare de librație din sistemul Pămînt-Lună cu minimum de combustibil se reduce la integrarea sistemului de ecuații

$$\dot{x}_i - \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j = \psi_i(t) \quad (i = 1, \ldots 4), \tag{54}$$

unde a_{ij} sînt coeficienții constanți ai matricei ecuațiilor de mișcare (1), iar ψ_i (t) sînt funcții de timp definite astfel

$$\begin{aligned} &\psi_{2k+1}(t) \equiv 0, \quad k = 0, 1, \\ &\psi_{2k}(t) = u_i(t) \quad k, i = 1, 2. \end{aligned} \tag{55}$$

Soluția sistemului (54) se scrie sub forma

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{ij}(t)\, x_j(0) + \sum_{j=1}^{4} \int_0^t K_{ij}(t, \tau) \psi_j(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad i = 1, \ldots 4, \tag{56}$$

unde $R_{ij}(t)$ este matricea soluției fundamentale normale în $t_0 = 0$ a sistemului (54) la $\psi_i(t) = 0$ $(i = 1, \ldots 4)$.
Rezultă

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij}. \tag{57}$$

De asemenea, am notat

$$K_{ij}(t, \tau) = \sum_{m=1}^{4} R_{im}(t)\, R_m^{-1}(\tau), \tag{58}$$

R_{mj}^{-1} fiind elementele matricei fundamentale inverse.
Fie $\bar{x}_i (i = 1, \ldots 4)$ soluția sistemului (54) la $\psi_i(t) \equiv 0$.
Avem

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{4} \bar{c}_j f_j^i(t), \tag{59}$$

unde

$$
\begin{aligned}
f_1^1(t) &= a(4\omega^2 - K_2 + a^2)\,e^{at},\\
f_2^1(t) &= -a(4\omega^2 - K^2 + a^2)\,e^{-at},\\
f_3^1(t) &= -b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\sin bt,\\
f_4^1(t) &= b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\cos bt,\\
f_1^2(t) &= K_1(a^2 - K_2)\,e^{at},\\
f_2^2(t) &= K_1(a^2 - K_2)\,e^{-at},\\
f_3^2(t) &= -K_1(b^2 + K_2)\cos bt,\\
f_4^2(t) &= -K_1(b^2 + K_2)\sin bt,\\
f_1^3(t) &= -2\omega K_1 e^{+at},\\
f_2^3(t) &= -2\omega K_1 e^{-at},\\
f_3^3(t) &= -2\omega K_1 \cos bt,\\
f_4^3(t) &= -2\omega K_1 \sin bt,\\
f_1^4(t) &= -2\omega K_1 a\,e^{at},\\
f_2^4(t) &= 2\omega K_1 a\,e^{-at},\\
f_3^4(t) &= 2\omega K_1 b \sin bt,\\
f_4^4(t) &= -2\omega K_1 b \cos bt,
\end{aligned}
\tag{60}
$$

iar $\bar{c}_j (j = 1, \ldots 4)$ sînt constante oarecare.

Ţinînd seama de (59) termenii matricei soluţiei fundamentale a sistemului omogen pot fi scrişi sub forma

$$
\begin{aligned}
R_{1j} &= \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^1(t), \qquad R_{2j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^2(t),\\
R_{3j} &= \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^3(t), \qquad R_{4j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^4(t).
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Coeficienţii c_{ij} sînt determinaţi din condiţia (57) care devine

$$
\begin{aligned}
\delta_{1j} &= c_{1j} f_1^1(0) + c_{2j} f_2^1(0) + c_{3j} f_3^1(0) + c_{4j} f_4^1(0),\\
\delta_{2j} &= c_{1j} f_1^2(0) + c_{2j} f_2^2(0) + c_{3j} f_3^2(0) + c_{4j} f_4^2(0),\\
\delta_{3j} &= c_{1j} f_1^3(0) + c_{2j} f_2^3(0) + c_{3j} f_3^3(0) + c_{4j} f_4^3(0),\\
\delta_{4j} &= c_{1j} f_1^4(0) + c_{2j} f_2^4(0) + c_{3j} f_3^4(0) + c_{4j} f_4^4(0).
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Rezolvînd sistemul (62) se găsește

$$c_{11} = \frac{1}{2(4\omega^2 - K_2 + a^2)}, \quad c_{12} = \frac{1}{2K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{13} = \frac{b^2 + K_2}{4\omega K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)}, \quad c_{14} = \frac{4\omega^2 - K_2 - b^2}{4\omega K_1 a(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{21} = -\frac{1}{2ab(4\omega^2 - K_2 + a^2)}, \quad c_{22} = \frac{1}{2K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{23} = -\frac{b^2 + K_2}{4\omega K_1^2(4\omega^2 - K_2 + a^2)}, \quad c_{24} = -\frac{4\omega^2 - K_2 - b^2}{4\omega K_1 a(4\omega^2 - K_2 + a^2)}, \tag{63}$$

$$c_{31} = 0, \quad c_{32} = -\frac{1}{K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{33} = -\frac{a^2 + K_2}{2K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)}, \quad c_{41} = -\frac{1}{4\omega^2 - K^2 + a^2},$$

$$c_{42} = 0, \quad c_{43} = 0, \quad c_{44} = -\frac{1}{2K_1 b}.$$

Din (56) rezultă

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{1j}(t)\, x_j(0) + \int_0^t [R_{12}(t-\tau)\, u_1(\tau) + R_{14}(t-\tau)\, u_2(\tau)]\, d\tau,$$

$$x_2(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{2j}(t)\, x_j(0) + \int_0^t [R_{22}(t-\tau)\, u_1(\tau) + R_{24}(t-\tau)\, u_2(\tau)]\, d\tau,$$

$$x_3(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{3j}(t)\, x_j(0) + \int_0^t [R_{32}(t-\tau)\, u_1(\tau) + R_{34}(t-\tau)\, u_2(\tau)]\, d\tau, \tag{64}$$

$$x_4(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{4j}(t)\, x_j(0) + \int_0^t [R_{42}(t-\tau)\, u_1(\tau) + R_{44}(t-\tau)\, u_2(\tau)]\, d\tau.$$

Rezolvarea problemei de tip Lagrange cu extremități fixe implică folosirea condițiilor la capete cunoscute:

$$x_i(0) = x_i^0, \quad x_i(T) = 0. \tag{65}$$

Dezvoltînd calculele și utilizînd notațiile din anexă se găsește

$$x_i(t) = H_1^i e^{at} + H_2^i e^{-at} + H_3^i \sin bt + H_4^i \cos bt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} C_j N_j^i + \sum_{j=1}^{4} C_i [A_j^i e^{at} + B_j^i e^{-at}] +$$

$$+ C_1 [D_1^i t e^{at} + E_1^i e^{at} \cos bt + K_1^i e^{at} \sin bt + L_1^i \sin bt + M_1^i \cos bt] +$$

$$+ C_2 [D_2^i t e^{-at} + E_2^i e^{-at} \cos bt + K_2^i e^{-at} \sin bt + L_2^i \sin bt + M_2^i \cos bt] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} C_{j+2} [D_{j+2}^i t \sin bt + E_{j+2}^i t \cos bt + K_{j+2}^i \sin bt + L_{j+2}^i \cos bt]. \quad (66)$$

Relațiile (66) se pot scrie sub forma

$$x_i(t) = F_0^i(t) + \sum_{j=1}^{4} C_j F_j^i(t), \quad i = 1, \ldots 4. \quad (67)$$

Din (65) rezultă

$$\sum_{j=1}^{4} C_j F_j^i(T) = -F_0^i(T), \quad i = 1, \ldots 4, \quad (68)$$

de unde se determină

$$C_j = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta}, \quad (69)$$

unde Δ_{ji} se obține prin înlocuirea coloanei coeficienților lui C_j cu $-F_0^i(T)$, iar $\Delta = |F_j^i(T)|$ $(i, j = 1, \ldots 4)$. Cu aceasta legile optimale care asigură transferul vehiculelor spațiale în punctele coliniare de librație ale sistemului Pămînt-Lună pot fi reprezentate prin soluția generală a sistemului (1)

$$x_i(t) = \left[H_1^i + \sum_{j=1}^{4} \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} A_j^i\right] e^{at} + \left[H_2^i + \sum_{j=1}^{4} \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} B_j^i\right] e^{-at} +$$

$$+ \left[H_3^i + \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\Delta_{ji}}{\Delta} L_j^i + \frac{\Delta_{j+2,i}}{\Delta} K_{j+2}^i\right)\right] \sin bt +$$

$$+ \left[H_4^i + \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\Delta_{ji}}{\Delta} M_j^i + \frac{\Delta_{j+2,i}}{\Delta} L_{j+2}^i\right)\right] \cos bt +$$

$$+ t\left[\sum_{j=1}^{2} \frac{\Delta_{j+2,i}}{\Delta} D_{j+2}^i \sin bt + \sum_{j=1}^{2} \frac{\Delta_{j+2,i}}{\Delta} E_{j+2}^i \cos bt\right] + \quad (70)$$

$$+ \frac{\Delta_{1i}}{\Delta} (t D_1^i + E_1^i \cos bt + K_1^i \sin bt) e^{at} +$$

$$+ \frac{\Delta_{2i}}{\Delta} (t D_2^i + E_2^i \cos bt + K_2^i \sin bt) e^{-at} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} N_j^i.$$

6. CONSIDERAȚII PRIVIND STABILITATEA MIȘCĂRII ÎN JURUL PUNCTELOR DE LIBRAȚIE COLINIARE

Analiza stabilității mișcării în jurul punctelor de libraţie coliniare implică studiul stabilității unui sistem de ecuaţii cu coeficienţi constanţi. Dacă rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mișcării sînt reale, mișcarea este aperiodică amortizată sau neamortizată, după cum ele sînt negative sau pozitive. Dacă rădăcinile sînt complexe, două cîte două conjugate, mișcarea este periodică amortizată sau neamortizată, după cum părțile reale sînt negative sau pozitive.

În cazul cînd ecuația caracteristică are rădăcini atît reale, cît și complexe, mișcările suprapuse aperiodice și periodice care apar își păstrează caracterul conform precizărilor de mai sus.

După cum s-a pus în evidență, ecuația caracteristică în cazul punctelor coliniare are rădăcini reale pozitive și negative. Rădăcinile reale negative r^2 dau soluții periodice și a fost verificat că pentru toate punctele coliniare se obțin aceleași rădăcini.

Soluțiile reale pozitive conduc la soluții aperiodice neamortizate (instabile). Pentru sistemul Pămînt-Lună cu raportul maselor $m^* = 0{,}0122$ s-au obținut următoarele valori pentru cele trei puncte de libraţie L_1, L_2, L_3, respectiv :

$$r_1^2 = -5{,}9408, \quad r_2^2 = -3{,}1881, \quad r_3^2 = -1{,}0355. \tag{71}$$

Acest calcul indică că instabilitatea este cea mai mare pentru punctul de libraţie L_1.

Vom prezenta în cele ce urmează corespondența care se stabilește între sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare caracteristice mișcării analizate și valorile proprii ale sale.

Considerăm sistemul liniar

$$\dot{X} = AX, \tag{72}$$

unde A reprezintă matricea sistemului (1).

Presupunem că valorile proprii ale sistemului de mai sus sînt distincte. Atunci, folosind transformarea liniară

$$X = Pz, \tag{73}$$

ecuația (72) devine

$$\dot{z} = \Lambda z, \tag{74}$$

unde Λ este matricea diagonală a valorilor proprii ale lui A. Prin urmare, ecuația (74) este echivalentă cu patru ecuații de ordinul 1 de forma

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i \quad (i = 1, \ldots 4). \tag{75}$$

Pentru a studia stabilitatea acestui sistem utilizînd teorema de stabilitate după Liapunov este necesar să se selecteze o funcție V astfel încît $\dot{V}(x)$ este cel puțin negativ semidefinită.

Să considerăm următoarea funcție reală scalară

$$V(z) = -\sum_{i=1}^{4} (2\mathrm{Re}\lambda_i) z_i \bar{z}_i = -\sum_{i=1}^{4} (\lambda_i + \bar{\lambda}_i) z_i \bar{z}_i. \tag{76}$$

Dacă cantitatea este reală, operația de conjugare lasă cantitatea neschimbată.

Derivata în raport cu timpul a acestei funcții scalare este

$$\dot{V}(z) = -\sum_{i=1}^{4} (\lambda_i + \bar{\lambda}_i)(\dot{z}_i \bar{z}_i + z_i \dot{\bar{z}}_i) = -\sum_{i=1}^{4} (\lambda_i + \bar{\lambda}_i)^2 z_i \bar{z}_i =$$

$$= -\sum_{i=1}^{4} (2\mathrm{Re}\lambda_i)^2 z_i \bar{z}_i. \tag{77}$$

În cazul cînd partea reală a tuturor valorilor proprii este nenulă, vedem imediat că $\dot{V}(z)$ este negativ definită. Astfel, stabilitatea sistemului poate fi determinată prin investigarea lui $V(z)$. Se observă că $V(z)$ este pozitiv definită și deci sistemul este stabil dacă părțile reale ale tuturor valorilor proprii sînt negative. De asemenea, dacă partea reală a oricărei valori proprii este pozitivă, atunci $V(z)$ este nedefinită și sistemul este instabil. Așadar, avem următoarele rezultate pentru sistemele cu valori proprii distincte :

1. Sistemul este asimptotic stabil dacă toate valorile proprii au părțile reale negative.

2. Sistemul este instabil dacă oricare din valorile proprii au părțile reale pozitive.

6.1. OSCILAȚII MICI

În problema restrînsă a celor trei corpuri considerăm energia cinetică și potențială a corpului de masă infinitezimală.

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}), \quad U = \frac{1}{2}(Bq, q) \quad q \in R^n, \ \dot{q} \in R^n, \tag{78}$$

q, $\dot{q}$ fiind coordonatele generalizate, respectiv vitezele generalizate.

Formele pătratice $(A\dot{q}, \dot{q})$, (Bq, q) pot fi reduse la axele lor principale printr-o schimbare de coordonate,

$$Q = cq, \ Q = (Q_1, \ldots Q_n). \tag{79}$$

Fie Q alese astfel încît să obținem

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{Q}_i^2, \quad U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i^2. \tag{80}$$

În coordonatele Q, sistemul lui Lagrange se descompune în ecuațiile independente

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i. \tag{81}$$

Se poate formula astfel următoarea

TEOREMĂ. *Un sistem care efectuează oscilații mici este un produs cartezian al unor sisteme de ordinul 1.*

Pentru fiecare sistem de ordin 1 se pot distinge trei cazuri

1) $\lambda = k^2$, *soluția este în acest caz*

$$Q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{82}$$

care reprezintă oscilațiile sistemului,

2) $\lambda = 0$, cu soluția

$$Q = C_1 + C_2 t \tag{83}$$

și reprezintă cazul echilibrului indiferent,

3) $\lambda = -k^2 < 0$, avînd soluția

$$Q = C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt \tag{84}$$

și caracterizează instabilitatea.

Presupunem că una dintre valorile proprii este pozitivă. Atunci sistemul (78) poate efectua oscilații periodice de forma

$$q(t) = (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt)\alpha, \tag{85}$$

unde α este un vector propriu asociat valorii proprii λ

$$B\alpha = \lambda A\alpha. \tag{86}$$

Mișcarea periodică (85) este numită oscilație proprie a sistemului (78) și numărul k frecvență proprie. Sîntem conduși la următoarele concluzii :

— Sistemul (78) are n oscilații proprii ale căror direcții sînt două cîte două ortogonale în sensul produsului scalar definit de energia cinetică A.

— Oscilațiile mici sînt sume de oscilații proprii.

Ecuațiile lui Lagrange pentru sistemul (78) pot fi rezolvate în felul următor.

Se caută mai întîi oscilații proprii de forma

$$q = e^{ikt}\alpha. \tag{87}$$

Înlocuind apoi în ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A\dot{q} = Bq, \tag{88}$$

se obține

$$(B - k^2 A)\alpha = 0. \tag{89}$$

Din ecuația caracteristică a lui (89) se deduc n valori proprii cărora li se asociază n vectori proprii α_s ortogonali, doi cîte doi.

Dacă $\lambda \neq 0$, soluția generală se scrie

$$q(t) = \mathrm{Re} \sum_{s=1}^{n} c_s \mathrm{e}^{ik_s t} \alpha_s. \tag{90}$$

Considerațiile făcute anterior au pus în evidență mișcări periodice în jurul punctelor coliniare de librație a căror perioadă este T.

Fie $g^T : R^n \to R^n$ aplicația definită

$$g^T x(0) = x(T). \tag{91}$$

TEOREMĂ. *Dacă g^T este matricea unei aplicații liniare și dacă urma matricei σ satisface relația*

$$|\sigma g^T| > 2, \tag{92}$$

atunci soluția trivială a sistemului ecuațiilor de mișcare în jurul punctelor de librație coliniare este instabilă, frontiera de stabilitate a mișcării fiind definită de ecuația

$$|\sigma g^T| = 2. \tag{93}$$

Fie valorile inițiale ale variabilelor de stare ale mișcării situate pe varietatea

$$S_0 = \{x_{2k-1}(0) = x_{2k-1}^0 \quad x_{2k} = 0 \quad K = 1, 2\}. \tag{94}$$

Efectuînd calculele se găsește

$$|\sigma g^T| = |R_{11}(T) + R_{33}(T)| > 2, \tag{95}$$

ceea ce indică faptul că mișcarea în jurul punctelor de librație coliniare este instabilă.

Potrivit teoremei de mai sus, granița de stabilitate este dată de

$$|R_{11}(T) + R_{33}(T)| = 2. \tag{96}$$

În cele ce urmează vom face cîteva remarci privind rezultatele obținute în studiul elaborat.

CONCLUZII

Dezvoltările făcute în această lucrare urmăresc elucidarea unor probleme de importanță majoră privind mișcarea în jurul punctelor de echilibru din spațiu. Este vorba în primul rînd de problemele care vizează transferul de pe orbite ale Pămîntului sau Lunii în punctele de librație, cînd vehiculul spațial se află sub acțiunea unei forțe de tracțiune ale cărei accelerații aparțin unui domeniu admis compatibil cu deplasarea corpului infinitezimal în cîmpul generat de sistemul Pămînt-Lună. Ecuațiile parametrice ale traiectoriei optimale care asigură pentru un timp de manevră limitat consum minim de combustibil, cuprind termeni rezonanți.

Dependența soluției de condițiile inițiale atunci cînd timpul tinde la infinit definește stabilitatea mișcării. Analiza parametrilor care caracterizează mișcarea în problema de optim tratată indică instabilitate pentru un interval de timp infinit, concluzie firească ținînd seama de faptul că un sistem comandat nu modifică instabilitatea mișcării în ipoteza cînd sistemul în perturbații liniarizat este instabil, fenomen semnalat în cazul punctelor de librație coliniare.

Partea a doua a lucrării studiază stabilitatea mișcărilor necomandate în jurul punctelor de librație coliniare. Utilizînd teoria clasică se pune în evidență instabilitatea mișcării precum și fenomenele oscilatorii care apar în jurul acestor puncte.

Se semnalează existența mișcărilor periodice și aperiodice, calculele efectuate indicînd că mișcările periodice sînt instabile. De asemenea, se determină granița de stabilitate pentru aceste mișcări.

ANEXĂ

Dezvoltînd calculele în produsele $R_{ks}(t)\,u_j(t)$ $(k, s = 1, \ldots 4)$ $j = 1, 2$ se obțin:

$$\frac{1}{2}\, c_{1,2j}\, a(4\omega^2 - K_2 + a^2) = A^1_{1j},$$

$$-\frac{1}{2}\, c_{2,2j}\, a(4\omega^2 - K_2 + a^2) = B^1_{1j},$$

$$-\frac{1}{2}\, c_{3,2j}\, b(4\omega^2 - K_2 - b^2) = D^1_{1j},$$

$$\frac{1}{2}\, c_{4,2j}\, b(4\omega^2 - K_2 - b^2) = E^1_{1j},$$

$$\frac{1}{2}\, c_{1,2j}\, K_1(a^2 - K_2) = A^2_{1j},$$

$$\frac{1}{2} c_{2,2j} K_1(a^2 - K_2) = B^2_{1j},$$

$$-\frac{1}{2} c_{3,2j} K_1(b^2 + K_2) = D^2_{1j},$$

$$-\frac{1}{2} c_{4,2j} K_1(b^2 + K_2) = E^2_{1j},$$

$$-c_{1,2j}\,\omega K_1 = A^3_{1j},$$

$$-c_{2,2j}\,\omega K_1 \quad B^3_{1j},$$

$$-c_{3,2j}\,\omega K_1 = D^3_{1j},$$

$$-c_{4,2j}\,\omega K_1 = E^3_{1j},$$

$$-c_{1,2j}\,\omega K_1 a = A^4_{1j},$$

$$c_{2,2j}\,\omega K_1 a = B^4_{1j},$$

$$c_{3,2j}\,\omega K_1 b = D^4_{1j},$$

$$-c_{4,2j}\,\omega K_1 b = E^4_{1j},$$

unde A^k_{1j}, B^k_{1j}, D^k_{1j}, E^k_{1j} sînt termenii de sub integrală ai expresiilor (64) pentru $x_k (k = 1, \ldots 4)$. Ţinînd seama de notaţiile

$$c^1_{11} = \sum_{j=1}^{4} c_{1j}\, x^0_j, \quad c^1_{12} = \sum_{j=1}^{4} c_{2j}\, x^0_j, \quad c^1_{13} = \sum_{j=1}^{4} c_{3j}\, x^0_j, \quad c^1_{14} = \sum_{j=1}^{4} c_{4j}\, x^0_j,$$

se obţine

$$\frac{1}{2a}(-a^2 + K_2) B^k_{11} + \frac{(-a^2 + K_2)}{ab} D^k_{11} + \frac{1}{2} B^k_{12} + \frac{ab}{a^2 + b^2} D^k_{12} +$$

$$+ \frac{a^2}{a^2 + b^2} E^k_{12} \quad A^k_1,$$

$$\frac{-(-a^2 + K_2)}{2a} B^k_{11} - \frac{B^k_{12}}{2} = B^k_1,$$

$$(-a^2 + K_2) A^k_{11} + a A^k_{12} = D^k_1,$$

$$-\frac{1}{ab}(-a^2 + K_2) D^k_{11} = E^k_1,$$

$$\frac{(-a^2+K_2)}{ab}E_{11}^k = K_1^k,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2)}{ab}E_{11}^k - \frac{a^2}{a^2+b^2}D_{12}^k + \frac{ab}{a^2+b^2}E_{12}^k = L_1^k,$$

$$\frac{(-a^2+K_2)}{ab}D_{11}^k - \frac{ab}{a^2+b^2}D_{12}^k - \frac{a^2}{a^2+b^2}E_{12}^k = M_1^j,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2)}{ab}D_{11}^k = N_1^j,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2)}{2a}A_{11}^k - \frac{A_{12}^k}{2} = A_2^k,$$

$$\frac{(-a^2+K_2)}{2a}A_{11}^k - \frac{(-a^2+K_2)}{ab}D_{11}^k + \frac{1}{2}A_{12}^k - \frac{ab}{a^2+b^2}D_{12}^k +$$

$$+\frac{a^2}{a^2+b^2}E_{12}^k = B_2^k,$$

$$(-a^2+K_2)B_{11}^k - aB_{12}^k = D_2^k,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2)}{ab}D_{11}^k = E_2^k,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2)}{ab}E_{11}^k = K_2^k,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2)}{ab}E_{11}^k - \frac{a^2}{a^2+b^2}D_{12}^k - \frac{ab}{a^2+b^2}E_{12}^k = L_2^k,$$

$$\frac{-a^2+K_2}{ab}D_{11}^k = N_2^j,$$

$$\frac{a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k - \frac{b^2}{a^2+b^2}A_{12}^k = A_3^k,$$

$$\frac{-a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k - \frac{b^2}{a^2+b^2}B_{12}^k = B_3^k,$$

$$\frac{1}{2}(b^2+K_2)D_{11}^k - \frac{b}{2}E_{12}^k = D_3^k,$$

$$\frac{1}{2}(b^2+K_2)E_{11}^k+\frac{b}{2}D_{12}^k=E_3^k,$$

$$\frac{b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k+\frac{b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k+\frac{1}{2b}(b^2+K_2)E_{11}^k+\frac{ab}{a^2+b^2}A_{12}^k-$$

$$-\frac{ab}{a^2+b^2}B_{12}^k-\frac{1}{2}D_{12}^k=K_3^k,$$

$$\frac{-a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k+\frac{b^2}{a^2+b^2}A_{12}^k+\frac{b^2}{a^2+b^2}B_{12}^k-\frac{a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k=L_3^k,$$

$$\frac{b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k+\frac{ab}{a^2+b^2}A_{12}^k=A_4^k,$$

$$\frac{b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k-\frac{ab}{a^2+b^2}B_{12}^k=B_4^k,$$

$$\frac{1}{2}(b^2+K_2)E_{11}^k+\frac{1}{2}bD_{12}^k=D_4^k,$$

$$-\frac{1}{2}(b^2+K_2)D_{11}^k+\frac{b}{2}E_{12}^k=E_4^k,$$

$$\frac{-a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k+\frac{a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k+\frac{1}{2b}(b^2+K_2)D_{11}^k+$$

$$+\frac{b^2}{a^2+b^2}A_{12}^k+\frac{b^2}{a^2+b^2}B_{12}^k+\frac{1}{2}E_{12}^k=K_4^k,$$

$$\frac{-b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k-\frac{b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k-\frac{ab}{a^2+b^2}A_{12}^k+\frac{ab}{a^2+b^2}B_{12}^k=L_4^k,$$

$$c_{11}^1a(4\omega^2-K_2+a^2)=H_1^1,$$

$$-c_{12}^1a(4\omega^2-K_2+a^2)=H_2^1,$$

$$-c_{13}^1b(4\omega^2-K_2-b^2)=H_3^1,$$

$$c_{14}b(4\omega^2-K_2-b^2)=H_4^1,$$

$$c_{11}^1K_1(a^2-K_2)=H_1^2,$$

$$c_{12}K_1(a^2 - K_2) = H_2^2,$$

$$-c_{14}K_1(b^2 + K_2) = H_3^2,$$

$$-c_{13}K_1(b^2 + K_2) = H_4^2,$$

$$c_{11}^1(-2\omega K_1) = H_1^3,$$

$$c_{12}^1(-2\omega K_1) = H_2^3,$$

$$c_{14}^1(-2\omega K_1) = H_3^3,$$

$$c_{13}^1(-2\omega K_1) = H_4^3,$$

$$c_{11}^1(-2\omega a K_1) = H_1^4,$$

$$c_{12}^1(2\omega a K_1) = H_2^4,$$

$$c_{13}^1(2\omega K_1 b) = H_3^4,$$

$$c_{14}(-2\omega K_1 b) = H_4^4.$$

Cu notațiile făcute rezultă

$$H_1^k e^{at} + H_2^k e^{-at} + H_3^k \sin bt + H_4^k \cos bt = F_0^k(t),$$

$$A_1^k e^{at} + B_1^k e^{-at} + D_1^k t e^{at} + E_1^k e^{at} \cos bt + K_1^k e^{at} \sin bt +$$

$$+ L_1^k \sin bt + M_1^j \cos bt + N_1^j = F_1^k(t),$$

$$A_2^k e^{at} + B_2^k e^{-at} + D_2^k t e^{-at} + E_2^k e^{-at} \cos bt +$$

$$+ K_2^k e^{-at} \sin bt + L_2^k \sin bt + M_2^j \cos bt + N_2^j = F_2^k(t).$$

Primită la redacție la 21 iulie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. I. POPESCU, *Absolut extremum determination in the transfer problem of spatial vehicules from colliniar libration points of the Eearth-Moon system to a maximum distance*, Al XXX-lea Congres internațional de astronautică, München, septembrie, 1979.
2. M. POPESCU, *On the optimum controlled mouvement around the Lagrangian points in the Earth-Moon system*, Rev. roum. sci. techn.—Méc. appl. (sub tipar).
3. M. POPESCU, *Asupra transferului optim al vehiculelor spațiale în punctele de librație echidistante din sistemul Pămînt-Lună*, St. cerc. mec. apl., *1* (1980).
4. L. D'AMARIO, *Minimum impulse three-body trajectories*, AIAA Journal, *4* (1974).
5. H. NAYFEH, *Three-to-one resonances near the equilateral libration points*, AIAA Journal, *6* (1970).
6. V. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Moscou, 1976.

CÎTEVA ASPECTE PRIVIND DINAMICA SOLIDULUI CU UN PUNCT FIX

de ŞTEFAN STAICU
Institutul politehnic Bucureşti

În această lucrare se studiază dinamica solidului cu un punct fix, supus la legături suplimentare.
În continuare se face studiul ciocnirii solidului, obţinînd unele cazuri particulare interesante.

I. ASUPRA MOBILITĂŢII SOLIDULUI

Dacă *trei puncte* ale unui solid rămîn în permanenţă pe suprafeţele unor sfere concentrice cu o sferă fixă, atunci solidul respectiv execută o *mişcare sferică*. Suprafaţa sferică de referinţă se numeşte *sferă directoare*.

În timpul mişcării rigidului un punct al său îşi păstrează o poziţie fixă care coincide cu centrul sferei directoare; de aceea corpul material mai este denumit şi solid cu un punct fix. Punctele rigidului descriu nişte curbe strîmbe situate pe suprafeţe sferice concentrice, iar o axă a sa care trece prin punctul fix generează o suprafaţă conică.

Să remarcăm că rigidul poate avea trei grade de libertate şi că poziţia sa poate fi definită utilizînd trei parametri scalari independenţi.

Pentru a studia mobilitatea solidului în mişcare sferică vom presupune corpul material rezemat în trei puncte ale sale B_1, B_2, B_3. Aceste puncte vor rămîne în permanenţă pe trei suprafeţe fixe (S_1), (S_2), (S_3) de ecuaţii $h_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$, $h_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$ şi, respectiv, $h_3(\xi, \eta, \zeta) = 0$ (fig. 1).

Condiţiile de mişcare ale solidului supus la cele trei legături,

$$\vec{v}_{Bj} \cdot \vec{\nabla} h_j = 0, \tag{1.1}$$

se mai scriu

$$(\vec{\omega}, \overrightarrow{IB_j}, \vec{\nabla} h_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{1.2}$$

unde $\vec{\omega}$ reprezintă viteza unghiulară instantanee de rotație în jurul axei instantanee (Δ) care trece prin punctul fix I al rigidului.

Cele trei condiții sînt simultan satisfăcute dacă în orice moment fiecare dintre vectorii $\vec{\nabla} h_j$ este coplanar cu axa (Δ).

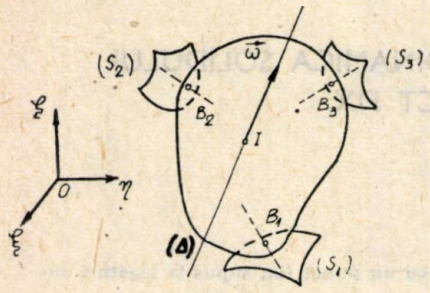


Fig. 1

Pornind de aici putem obține mai multe cazuri posibile de mișcare :

a) Cele trei normale la suprafețele de reazem trebuie să fie în permanență concurente cu axa (Δ). Necunoscutele care apar sînt reacțiunile din legături, unghiurile dintre aceste reacțiuni și vectorii $\overrightarrow{IB_j}$ și viteza unghiulară instantanee de rotație. O asemenea problemă este simplu nedeterminată.

b) Normalele duse la suprafețele (S_1) și (S_2) sînt concurente cu axa (Δ), iar cea de-a treia normală trece permanent prin punctul fix I. Rigidul are un singur grad de libertate.

Legăturile (S_1), (S_2) pot fi două suprafețe oarecare, iar (S_3) trebuie să fie o suprafață sferică concentrică cu sfera directoare. Problema este determinată.

c) Axa (Δ) este concurentă cu normala la suprafața (S_1) în timp ce normalele la (S_2) și (S_3) trec prin I.

Așadar rigidul se reazemă pe două sfere de centru I și pe o suprafață oarecare ; mișcarea are două grade de libertate.

d) Cele trei normale în punctele B_1, B_2, B_3 trec continuu prin punctul fix I al rigidului. Solidul are trei grade de libertate și se reazemă pe trei sfere concentrice cu sfera directoare.

Observații. 1°. Considerații analoage pot fi făcute dacă vom presupune că cele trei puncte B_1, B_2, B_3 se deplasează pe trei curbe (C_1), (C_2), (C_3) date de intersecțiile suprafețelor sferice

$$g_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad g_2(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad g_3(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{1.3}$$

cu suprafețele conice

$$f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad f_2(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad f_3(\xi, \eta, \zeta) = 0, \tag{1.4}$$

avînd centrul și respectiv vîrful în punctul fix I.

Din condițiile de mișcare ale rigidului,

$$(\vec{\omega}, \overrightarrow{IB_j}, \vec{\nabla} g_j) = 0, \quad (\vec{\omega}, \overrightarrow{IB_j}, \vec{\nabla} f_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \tag{1.5}$$

rezultă toate situațiile posibile :

a) Cele trei suprafețe conice trebuie să fie astfel alese încît cele trei normale în punctele de reazem să fie mereu concurente cu axa instantanee de rotație a rigidului.

Necunoscutele sînt cele șase reacțiuni și viteza unghiulară instantanee de rotație. Problema este de asemenea simplu nedeterminantă.

b) Punctele B_1, B_2 pot să se deplaseze pe două suprafețe conice și se suprimă cea de-a treia suprafață conică ($\vec{\nabla} f_3 = \vec{0}$). Rigidul va avea tot un grad de libertate.

c) Condițiile $\vec{\nabla} f_2 = \vec{0}$, $\vec{\nabla} f_3 = \vec{0}$ conduc la eliminarea a două suprafețe conice; solidul va efectua o mișcare sferică cu două grade de libertate.

d) Rigidul rămîne rezemat numai pe cele trei suprafețe sferice concentrice în punctele sale B_1, B_2, B_3 în cazul în care $\vec{\nabla} f_1 = \vec{0}$, $\vec{\nabla} f_2 = \vec{0}$, $\vec{\nabla} f_3 = \vec{0}$.

Să observăm că cele trei puncte pot să se găsească pe o aceeași suprafață sferică. Dacă raza acestei sfere devine oricît de mică, tinzînd către zero, se ajunge la definiția articulației sferice.

2°. Mișcarea de rostogolire cu alunecare pe suprafețele conice (1.4) a unui rigid rezemat în punctele B_1, B_2, B_3 pe trei sfere concentrice este asemănătoare cu cea studiată mai sus.

3°. Să considerăm mai departe cazurile c) de rezemare ale solidului și să adăugăm încă o legătură reprezentată de o suprafață conică rugoasă (Σ). Peste această suprafață corpul material poate să se rostogolească în jurul generatoarei (Δ) a conului, fără să alunece.

Din condițiile de mișcare analoage cu (1.2) sau (1.5) rezultă:

α) Normala la suprafața (S_1) trebuie să fie în continuu concurentă cu axa instantanee de rotație (Δ). Problema devine simplu nedeterminată.

β) Condiția ca normala la (S_1) să treacă chiar prin punctul I, reduce această legătură la o sferă concentrică cu sfera directoare.

De asemenea, condiția de mișcare $\vec{\nabla} f_1 = \vec{0}$ implică suprimarea suprafeței conice (S_1) de ecuație $f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

În aceste cazuri problema este determinată.

II. DINAMICA RIGIDULUI CU UN PUNCT FIX

Fie un solid rezemat în trei puncte ale sale B_1, B_2, B_3 pe trei suprafețe sferice avînd același centru I. Să mai presupunem că alte două puncte D_1, D_2 ale rigidului rămîn în permanență pe două suprafețe conice fixe (Σ_1), (Σ_2) (fig. 2).

Se raportează mișcarea rigidului la un triedru fix $I\xi\eta\zeta$ și la un triedru mobil $I\,x\,y\,z$, solidar cu rigidul, ale căror origini coincid cu punctul fix I al rigidului. De asemenea, se presupune, fără a reduce generalitatea problemei, că axele Ix, Iy, Iz coincid cu axele principale de inerție în raport cu I.

Luînd în considerație acțiunea forțelor exterioare $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ asupra rigidului de masă M, se vor determina legile de mișcare și reacțiunile din legături.

Deoarece mișcarea rigidului este aceeași cu a triedrului mobil, poziția sa va fi determinată dacă se va cunoaște variația în timp a trei funcții scalare

$$\psi = \psi(t),$$
$$\theta = \theta(t),$$
$$\varphi = \varphi(t), \tag{2.1}$$

unde ψ, θ, φ reprezintă unghiurile lui Euler.

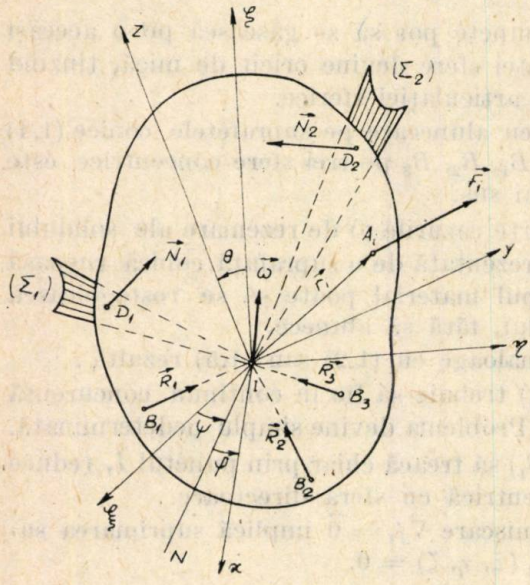


Fig. 2

Aceste trei funcții scalare împreună cu reacțiunile normale $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ introduse de legături se pot obține cu ajutorul teoremelor generale ale dinamicii.

Fie

$$f_k(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad (k = 1, 2) \tag{2.2}$$

ecuațiile suprafețelor conice pe care se vor deplasa punctele D_1 și D_2. Cele trei sfere pe care se deplasează punctele B_1, B_2, B_3 vor fi definite de ecuațiile

$$g_j(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - IB_j^2 = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \tag{2.3}$$

Pornind de la teorema mișcării centrului maselor

$$M\vec{\rho}_c = \sum_{k=1}^{2} \vec{N}_k + \sum_{j=1}^{3} \vec{R}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \tag{2.4}$$

în care

$$\vec{N}_k = \lambda_k \vec{\nabla} f_k \qquad (k = 1,2),$$
$$\vec{R}_j = \nu_j \vec{\nabla} g_j \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{2.5}$$

și, proiectînd pe axele mobile, rezultă următorul sistem de ecuații:

$$-Mx_c(\omega_y^2 + \omega_z^2) + My_c(\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z) + Mz_c(\omega_x\omega_z + \dot{\omega}_y) =$$
$$= \sum_{k=1}^{2} \lambda_k a_k + 2\sum_{j=1}^{3} \nu_j(\alpha_1\xi_{Bj} + \alpha_2\eta_{Bj} + \alpha_3\zeta_{Bj}) + \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{2.6}$$

$$-My_c(\omega_z^2+\omega_x^2)+Mz_c(\omega_y\omega_z-\dot{\omega}_x)+Mx_c(\omega_y\omega_x+\dot{\omega}_z)=$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\lambda_k b_k+2\sum_{j=1}^{3}\nu_j(\beta_1\xi_{Bj}+\beta_2\xi_{Bj}+\beta_3\zeta_{Bj})+\sum_{i=1}^{n}Y_i,$$

$$-Mz_c(\omega_x^2+\omega_y^2)+Mx_c(\omega_z\omega_x-\dot{\omega}_y)+My_c(\omega_z\omega_y+\dot{\omega}_x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\lambda_k c_k+2\sum_{j=1}^{3}\nu_j(\gamma_1\xi_{Bj}+\gamma_2\eta_{Bj}+\gamma_3\zeta_{Bj})+\sum_{i=1}^{n}Z_i.$$

În aceste relații x_c, y_c, z_c sînt coordonatele centrului maselor C în raport cu sistemul mobil; ω_x, ω_y, ω_z — componentele vitezei unghiulare instantanee de rotație $\vec{\omega}$ după aceleași axe. De asemenea, s-au făcut notațiile:

$$a_k=\alpha_1\frac{\partial f_k}{\partial\xi_{Dk}}+\alpha_2\frac{\partial f_k}{\partial\eta_{Dk}}+\alpha_3\frac{\partial f_k}{\partial\zeta_{Dk}},$$

$$b_k=\beta_1\frac{\partial f_k}{\partial\xi_{Dk}}+\beta_2\frac{\partial f_k}{\partial\eta_{Dk}}+\beta_3\frac{\partial f_k}{\partial\zeta_{Dk}},$$

$$c_k=\gamma_1\frac{\partial f_k}{\partial\xi_{Dk}}+\gamma_2\frac{\partial f_k}{\partial\eta_{Dk}}+\gamma_3\frac{\partial f_k}{\partial\zeta_{Dk}},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1&=\vec{i}\,\vec{i}_1=\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi,\\
\alpha_2&=\vec{i}\,\vec{j}_1=\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi,\\
\alpha_3&=\vec{i}\,\vec{k}_1=\sin\theta\sin\varphi,\\
\beta_1&=\vec{j}\,\vec{i}_1=-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi,\\
\beta_2&=\vec{j}\,\vec{j}_1=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi,\\
\beta_3&=\vec{j}\,\vec{k}_1=\sin\theta\cos\varphi,\\
\gamma_1&=\vec{k}\,\vec{i}_1=\sin\psi\sin\theta,\\
\gamma_2&=\vec{k}\,\vec{j}_1=-\cos\psi\sin\theta,\\
\gamma_3&=\vec{k}\vec{k}_1=\cos\theta.
\end{aligned}\qquad(2.7)$$

Teorema momentului cinetic în raport cu punctul fix I se scrie sub forma

$$\frac{d\vec{K}_I}{dt}=\vec{ID}_1\wedge\vec{N}_1+\vec{ID}_2\wedge\vec{N}_2+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\wedge\vec{F}_i,\qquad(2.8)$$

în care:

$$\vec{K}_I=J_x\omega_x\vec{i}+J_y\omega_y\vec{j}+J_z\omega_z\vec{k}.\qquad(2.9)$$

Proiecţiile relaţiei vectoriale (2.8) pe axele mobile Ix, Iy, Iz conduc la următoarele ecuaţii :

$$J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k (y_{Dk}c_k - z_{Dk}b_k) + \sum_{i=1}^{n} (y_iZ_i - z_iY_i),$$

$$J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k(z_{Dk}a_k - x_{Dk}c_k) + \sum_{i=1}^{n} (z_iX_i - x_iZ_i), \quad (2.10)$$

$$J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k (x_{Dk}b_k - y_{Dk}a_k) + \sum_{i=1}^{n} (x_iY_i - y_iX_i).$$

Pe de altă parte, din condiţiile de legătură ale punctelor D_1, D_2

$$\vec{v}_{Dk} \cdot \vec{\nabla} f_k = 0, \quad (2.11)$$

scrise sub forma

$$(\vec{\omega}, \overrightarrow{ID}_k, \vec{\nabla} f_k) = 0 \qquad (k = 1, 2), \quad (2.12)$$

rezultă încă două relaţii

$$\omega_x (y_{Dk}c_k - z_{Dk}b_k) + \omega_y (z_{Dk}a_k - x_{Dk}c_k) +$$

$$+ \omega_z (x_{Dk}b_k - y_{Dk}a_k) = 0 \qquad (k = 1, 2). \quad (2.13)$$

Multiplicînd ecuaţiile (2.10) cu ω_x, ω_y şi, respectiv, ω_z, adunîndu-le pe coloană şi ţinînd seama şi de (2.13) se obţine relaţia

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2} J_x\omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y\omega_y^2 + \frac{1}{2} J_z\omega_z^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(y_iZ_i - z_iY_i)\omega_x + (z_iX_i - x_iZ_i)\omega_y + (x_iY_i - y_iX_i)\omega_z]\mathrm{d}t, \quad (2.14)$$

care reprezintă teorema energiei cinetice scrisă pentru mişcarea rigidului cu un punct fix.

Această ecuaţie împreună cu condiţiile (2.13) vor reprezenta ecuaţiile diferenţiale ale mişcării solidului cu un punct fix.

Dacă presupunem că forţele exterioare sînt definite prin funcţii vectoriale de forma

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i (t, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}), \quad (2.15)$$

atunci din cele trei ecuații rezultă

$$\omega_x = \omega_x(t, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}),$$
$$\omega_y = \omega_y(t, \psi, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}), \tag{2.16}$$
$$\omega_z = \omega_z(t, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}).$$

Pornind de aici și ținînd seama de relațiile cinematice:

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$\omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \tag{2.17}$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

se determină în final legile de mișcare (2.1) ale solidului rigid.

Mai departe, două din ecuațiile (2.10) dau parametrii λ_1, λ_2 care servesc la calculul reacțiunile $\vec{N}_1$ și $\vec{N}_2$.

În sfîrșit, din ecuațiile (2.6) rezultă imediat parametrii ν_1, ν_2, ν_3 necesari pentru determinarea reacțiunilor normale $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ și $\vec{R}_3$.

Observații. 1°. Cazurile particulare echivalente b) de mai sus se obțin dacă vom pune, în rezultatele anterioare, condiția ca punctele B_1 și B_2 să coincidă cu punctele D_1 și respectiv D_2, adică

$$\overrightarrow{ID}_k = \overrightarrow{IB}_j \quad (j = k = 1, 2). \tag{2.18}$$

2°. Dacă se îndepărtează suprafața (Σ_2) mișcarea rigidului va avea două grade de libertate. Aceasta înseamnă că vom înlocui în relațiile de mai sus: $\lambda_2 = 0$, $\vec{\nabla} f_2 = \vec{0}$.

Astfel, relațiile diferențiale

$$\omega_x (y_{D_1}c_1 - z_{D_1}b_1) + \omega_y (z_{D_1}a_1 - x_{D_1}c_1) + \omega_z(x_{D_1}b_1 - y_{D_1}a_1) = 0, \tag{2.19}$$

$$\frac{J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z - \sum_{i=1}^{n}(y_iZ_i - z_iY_i)}{y_{D_1}c_1 - z_{D_1}b_1} =$$

$$= \frac{J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x - \sum_{i=1}^{n}(z_iX_i - x_iZ_i)}{z_{D_1}a_1 - x_{D_1}c_1},$$

împreună cu teorema energiei cinetice (2.14), conduc la legile de mișcare ale solidului.

3°. Cazurile particulare c) prezentate mai înainte se deduc ușor făcînd în relațiile precedente

$$\overrightarrow{ID}_1 = \overrightarrow{IB}_1. \tag{2.20}$$

4°. Solidul rigid cu un punct fix poate avea trei grade de libertate dacă se elimină cele două suprafeţe conice (Σ_1) şi (Σ_2). Procedînd astfel, se obţin cazurile particulare d), cînd corpul material se reazemă pe trei sfere concentrice prin intermediul punctelor B_1, B_2, B_3.

În acest caz vom introduce

$$\lambda_k = 0, \quad \vec{\nabla} f_k = \vec{0} \quad (k = 1, 2), \tag{2.21}$$

în rezultatele de mai sus. Se regăsesc ecuaţiile, cunoscute în mecanică, ale rigidului cu un punct fix.

5°. Vom considera mai departe cazul β) al rostogolirii fără alunecare a rigidului peste o suprafaţă conică fixă (Σ_1) de ecuaţie $f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Solidul fiind rezemat în B_1, B_2, B_3 pe trei sfere concentrice va avea un grad de libertate.

Dacă se face $\lambda_2 = 0$, $\vec{\nabla} f_2 = \vec{0}$ în relaţiile obţinute mai sus şi se completează sistemul forţelor cu forţa de frecare

$$\vec{T_1} = \lambda_{T_1}(\vec{\nabla} f_1 \wedge \vec{ID_1}), \tag{2.22}$$

se obţine următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{aligned}
&-Mx_c(\omega_y^2 + \omega_z^2) + My_c(\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z) + Mz_c(\omega_x\omega_z + \dot{\omega}_y) = \\
&= \lambda_1 a_1 + \lambda_{T_1}(b_1 z_{D_1} - c_1 y_{D_1}) + 2\sum_{j=1}^{3} \nu_j(\alpha_1\xi_{Bj} + \alpha_2\eta_{Bj} + \alpha_3\zeta_{Bj}) + \sum_{i=1}^{n} X_i, \\
&-My_c(\omega_z^2 + \omega_x^2) + Mz_c(\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x) + Mx_c(\omega_y\omega_x + \dot{\omega}_z) = \\
&= \lambda_1 b_1 + \lambda_{T_1}(c_1 x_{D_1} - a_1 z_{D_1}) + 2\sum_{j=1}^{3} \nu_j(\beta_1\xi_{Bj} + \beta_2\eta_{Bj} + \beta_3\zeta_{Bj}) + \sum_{i=1}^{n} Y_i, \\
&-Mz_c(\omega_x^2 + \omega_y^2) + Mx_c(\omega_z\omega_x - \dot{\omega}_y) + My_c(\omega_z\omega_y + \dot{\omega}_x) = \\
&= \lambda_1 c_1 + \lambda_{T_1}(a_1 y_{D_1} - b_1 x_{D_1}) + 2\sum_{j=1}^{3} \nu_j(\gamma_1\xi_{Bj} + \gamma_2\eta_{Bj} + \gamma_3\zeta_{Bj}) + \sum_{i=1}^{n} Z_i,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z &= y_{D_1}[\lambda_1 c_1 + \lambda_{T_1}(a_1 y_{D_1} - b_1 x_{D_1})] - z_{D_1}[\lambda_1 b_1 + \lambda_{T_1}(c_1 x_{D_1} - \\
&- a_1 z_{D_1})] + \sum_{i=1}^{n}(y_i Z_i - z_i Y_i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x &= z_{D_1}[\lambda_1 a_1 + \lambda_{T_1}(b_1 z_{D_1} - c_1 y_{D_1})] - x_{D_1}[\lambda_1 c_1 + \lambda_{T_1}(a_1 y_{D_1} - \\
&- b_1 x_{D_1})] + \sum_{i=1}^{n}(z_i X_i - x_i Z_i),
\end{aligned}$$

$$J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = x_{D_1}[\lambda_1 b_1 + \lambda_{T_1}(c_1 x_{D_1} - a_1 z_{D_1})] - y_{D_1}[\lambda_1 a_1 +$$

$$+ \lambda_{T_1}(b_1 z_{D_1} - c_1 y_{D_1})] + \sum_{i=1}^{n}(x_i Y_i - y_i X_i),$$

la care se adaugă condițiile

$$\frac{\omega_x}{x_{D_1}} = \frac{\omega_y}{y_{D_1}} = \frac{\omega_z}{z_{D_1}} = \frac{|\vec{\omega}|}{|\overrightarrow{ID}_1|} \tag{2.24}$$

deduse din

$$\vec{v}_{D_1} = \vec{0}. \tag{2.25}$$

Să multiplicăm ultimele trei ecuații ale sistemului prin ω_x, ω_y și, respectiv, ω_z și să le însumăm; se obține relația

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2} J_\Delta \vec{\omega}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{D_1 A_i} \wedge \vec{F}_i)\vec{\omega}\mathrm{d}t, \tag{2.26}$$

care reprezintă teorema energiei cinetice.

Condiția ca rigidul să execute o mișcare de rostogolire fără alunecare se referă la valoarea coeficientului de frecare:

$$\mu_1 > \frac{\lambda_{T_1}}{\lambda_1} = \mu_{min}. \tag{2.27}$$

6°. Dacă solidul se rostogolește și alunecă cu frecare pe două suprafețe (Σ_1), (Σ_2) sau dacă cele două puncte ale sale D_1, D_2 alunecă cu frecare pe aceleași suprafețe conice, ecuațiile dinamice sînt cele date de relațiile (2.23) în care se va înlocui λ_1, λ_{T_1}, f_1, $\overrightarrow{ID}_1$, respectiv prin λ_k, λ_{Tk}, f_k, $\overrightarrow{ID}_k$ și se va aplica operatorul $\sum_{k=1}^{2}$.

Se precizează, de asemenea, că condițiile (2.24) se vor înlocui cu cele date de (2.13), iar relația (2.27) se schimbă prin

$$\lambda_{Tk} = \mu_k \lambda_k, \qquad (k = 1, 2). \tag{2.28}$$

7°. Reacțiunile normale $\vec{N}_1$ și $\vec{N}_2$ nu depind de forțele exterioare dacă acestea trec prin punctul fix al rigidului.

Dacă forțele exterioare formează un sistem de cupluri, reacțiunile normale $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$ sînt independente față de aceste forțe.

III. CIOCNIREA SOLIDULUI CU UN PUNCT FIX

Să considerăm același rigid rezemat în punctele B_1, B_2, B_3 pe trei suprafețe sferice concentrice. Presupunem de asemenea că încă două puncte D_1, D_2 ale solidului se deplasează pe două suprafețe conice fixe (Σ_1), (Σ_2) (fig. 3).

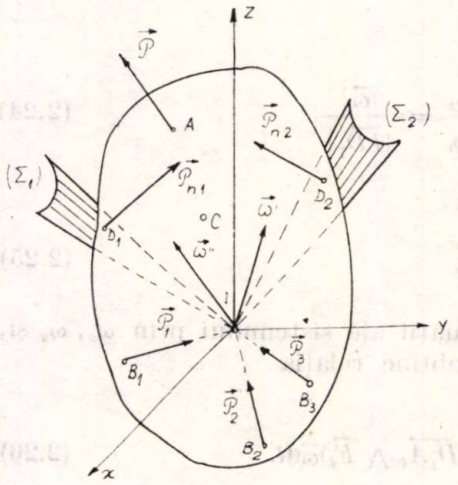


Fig. 3

Presupunînd cunoscută viteza unghiulară $\vec{\omega}'$ a rigidului la începutul ciocnirii se cere să se determine viteza unghiulară a acestuia la sfîrșitul ciocnirii $\vec{\omega}''$ și percuțiile din legături $\vec{\mathcal{P}}_1$, $\vec{\mathcal{P}}_2$, $\vec{\mathcal{P}}_3$, $\vec{\mathcal{P}}_{n1}$ și $\vec{\mathcal{P}}_{n2}$ ca urmare a aplicării unei percuții $\vec{\mathcal{P}}$ în punctul A (x, y, z).

Fie $I\,x\,y\,z$ triedrul mobil, solidar cu rigidul, avînd originea în punctul fix I și axele Ix, Iy, Iz orientate după direcțiile principale de inerție în raport cu I care coincid în momentul ciocnirii cu axele triedrului fix $I\xi\eta\zeta$.

Pentru studiul acestei probleme se aplică teoremele generale ale ciocnirilor.

Din teorema impulsului

$$\vec{H}'' - \vec{H}' = \sum_{k=1}^{2} \vec{\mathcal{P}}_{nk} + \sum_{j=1}^{3} \vec{\mathcal{P}}_i + \vec{\mathcal{P}}, \tag{3.1}$$

în care vom înlocui

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}_{nk} &= \lambda_k \vec{\nabla} f_k \qquad (k = 1, 2), \\ \vec{\mathcal{P}}_j &= \nu_j \vec{\nabla} g_j \qquad (j = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{3.2}$$

rezultă următoarele ecuații de proiecții pe axele mobile:

$$M\,(z_c \delta\omega_y - y_c \delta\omega_z) = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \xi_{Dk}} + 2 \sum_{j=1}^{3} \nu_j x_{Bj} + \mathcal{P}_x, \tag{3.3}$$

$$M\,(x_c \delta\omega_z - z_c \delta\omega_x) = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \eta_{Dk}} + 2 \sum_{j=1}^{3} \nu_j y_{Bj} + \mathcal{P}_y,$$

$$M\,(y_c \delta\omega_x - x_c \delta\omega_y) = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \zeta_{Dk}} + 2 \sum_{j=1}^{3} \nu_j z_{Bj} + \mathcal{P}_z,$$

unde s-a notat cu δ operatorul saltului finit pe perioada ciocnirii.

Din teorema momentului cinetic în raport cu punctul fix I :

$$\vec{K}_I'' - \vec{K}_I' = \overrightarrow{ID}_1 \wedge \vec{\mathscr{P}}_{n1} + \overrightarrow{ID}_2 \wedge \vec{\mathscr{P}}_{n2} + \overrightarrow{IA} \wedge \vec{\mathscr{P}}, \tag{3.4}$$

se obține sistemul

$$\begin{aligned} J_x \delta\omega_x &= \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \left(y_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \zeta_{Dk}} - z_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \eta_{Dk}} \right) + y\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y, \\ J_y \delta\omega_y &= \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \left(z_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_{Dk}} - x_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \zeta_{Dk}} \right) + z\mathscr{P}_x - x\mathscr{P}_z, \\ J_z \delta\omega_z &= \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \left(x_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \eta_{Dk}} - y_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_{Dk}} \right) + x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Salturile vitezelor punctelor D_1, D_2 pe perioada ciocnirii fiind situate în planele tangente la (Σ_1), respectiv (Σ_2), putem scrie :

$$(\delta\vec{\omega},\ \overrightarrow{ID}_k, \vec{\nabla} f_k) = 0, \tag{3.6}$$

de unde rezultă relațiile

$$\begin{aligned} &\left(y_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \zeta_{Dk}} - z_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \eta_{Dk}} \right) \delta\omega_x + \left(z_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_{Dk}} - x_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \zeta_{Dk}} \right) \delta\omega_y + \\ &+ \left(x_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \eta_{Dk}} - y_{Dk} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_{Dk}} \right) \delta\omega_z = 0 \qquad (k = 1, 2). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dacă vom multiplica ecuațiile (3.5) cu $\delta\omega_x$, $\delta\omega_y$ și respectiv $\delta\omega_z$ și le vom aduna se obține relația

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[J_x (\delta\omega_x)^2 + J_y (\delta\omega_y)^2 + J_z (\delta\omega_z)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} (y\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y)\delta\omega_x + \frac{1}{2} (z\mathscr{P}_x - x\mathscr{P}_z)\delta\omega_y + \frac{1}{2} (x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x)\delta\omega_z, \end{aligned} \tag{3.8}$$

care constituie teorema lui Kelvin [5] privind energia vitezelor pierdute pe intervalul ciocnirii.

Această relație împreună cu (3.7), vor da componentele vitezei unghiulare a rigidului la sfîrșitul ciocnirii : ω_x'', ω_y'', ω_z''.

Mai departe, două din relaţiile (3.5) dau parametrii λ_1, λ_2 care determină percuţiile $\vec{\mathscr{P}}_{n1}$ şi $\vec{\mathscr{P}}_{n2}$, iar din ecuaţiile teoremei impulsului (3.3) vor rezulta uşor parametrii ν_1, ν_2, ν_3 care determină reacţiunile normale $\vec{\mathscr{P}}_1$, $\vec{\mathscr{P}}_2$ şi $\vec{\mathscr{P}}_3$.

Observaţii. 1°. Dacă se înlătură suprafaţa (Σ_2) vom face în rezultatele precedente $\lambda_2 = 0$, $\vec{\nabla} f_2 = \vec{0}$.

Într-adevăr, relaţia

$$\frac{J_x \delta\omega_x + z\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_z}{y_{D_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial \zeta_{D_1}} - z_{D_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial \eta_{D_1}}} = \frac{J_y \delta\omega_y + x\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_x}{z_{D_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_{D_1}} - x_{D_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial \zeta_{D_1}}} \tag{3.9}$$

împreună cu teorema lui Kelvin (3.8) şi cu condiţia (3.7) scrisă în cazul $k = 1$, vor da parametrii ω_x'', ω_y'', ω_z''.

2°. Cazul particular al solidului cu un punct fix se deduce din cel general dacă vom face

$$\lambda_k = 0, \quad \vec{\nabla} f_k = \vec{0} \qquad (k = 1, 2). \tag{3.10}$$

Se regăsesc ecuaţiile cunoscute [5] ale ciocnirii rigidului în mişcarea sferică.

a) Pentru ca mişcarea rigidului să caracterizeze, la sfîrşitul ciocnirii, o rotaţie instantanee în jurul unei axe care să treacă printr-un punct dat $J(a, b, c)$ al rigidului sînt necesare condiţiile

$$v_{Jx}'' = 0, \quad v_{Jy}'' = 0, \quad v_{Jz}'' = 0, \tag{3.11}$$

din care rezultă sistemul

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b\mathscr{P}_y}{J_z} + \frac{c\mathscr{P}_z}{J_y}\right)x - \frac{b\mathscr{P}_x}{J_z}y - \frac{c\mathscr{P}_x}{J_y}z = -b\omega_z' + c\omega_y', \\
&-\frac{a\mathscr{P}_y}{J_z}x + \left(\frac{c\mathscr{P}_z}{J_x} + \frac{a\mathscr{P}_x}{J_z}\right)y - \frac{c\mathscr{P}_y}{J_x}z = -c\omega_x' + a\omega_z', \\
&-\frac{a\mathscr{P}_z}{J_y}x - \frac{b\mathscr{P}_z}{J_x}y + \left(\frac{a\mathscr{P}_x}{J_y} + \frac{b\mathscr{P}_y}{J_x}\right)z = -a\omega_y' + b\omega_x'.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Deoarece atît determinantul principal, cît şi determinanţii caracteristici ai sistemului sînt nuli, rezultă că punctele de aplicaţie ale unei percuţii arbitrare exterioare vor fi situate pe o dreaptă.

Pentru $x = a$, $y = b$, $z = c$, se obţine cazul introducerii unei legături rigide persistente în punctul J sau al fixării brusce a acelui punct.

b) Pentru ca rigidul cu un punct fix să se oprească brusc, datorită ciocnirii, sînt necesare următoarele condiții:

$$\omega_x'' = 0, \quad \omega_y'' = 0, \quad \omega_z'' = 0, \tag{3.13}$$

din care rezultă sistemul

$$\begin{aligned} y\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y &= -J_x\omega_x', \\ z\mathscr{P}_x - x\mathscr{P}_z &= -J_y\omega_y', \\ x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x &= -J_z\omega_z'. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Determinantul principal fiind nul, sistemul (3.14) devine compatibil și simplu nedeterminat dacă determinantul caracteristic este egal cu zero, adică

$$J_x\omega_x'\mathscr{P}_x + J_y\omega_y'\mathscr{P}_y + J_z\omega_z'\mathscr{P}_z = \vec{K}_I' \cdot \vec{\omega}' = 0. \tag{3.15}$$

Rezultă că dacă percuția va fi aplicată în punctele dreptei definită de două din ecuațiile (3.14), atunci rigidul cu un punct fix se va opri. De asemenea, percuția trebuie să fie situată într-un plan normal la momentul cinetic inițial al rigidului.

c) Centrul de percuție este definit prin condițiiile

$$\nu_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \tag{3.16}$$

din care se deduc ecuațiile

$$\begin{aligned} \left(-\frac{z_c}{J_y}\mathscr{P}_z - \frac{y_c}{J_z}\mathscr{P}_y\right)x + \frac{y_c}{J_z}\mathscr{P}_x y + \frac{z_c}{J_y}\mathscr{P}_x z &= \frac{\mathscr{P}_x}{M}, \\ \frac{x_c}{J_z}\mathscr{P}_y x + \left(-\frac{x_c}{J_z}\mathscr{P}_x - \frac{z_c}{J_x}\mathscr{P}_z\right)y + \frac{z_c}{J_x}\mathscr{P}_y z &= \frac{\mathscr{P}_y}{M}, \\ \frac{x_c}{J_y}\mathscr{P}_z x + \frac{y_c}{J_x}\mathscr{P}_z y + \left(-\frac{y_c}{J_x}\mathscr{P}_y - \frac{x_c}{J_y}\mathscr{P}_x\right)z &= \frac{\mathscr{P}_z}{M}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Determinantul principal al acestui sistem este egal cu zero; așadar punctele de aplicație ale percuției vor fi situate pe o dreaptă definită de două din cele trei ecuații dacă determinantul caracteristic este nul, adică

$$x_c\mathscr{P}_x + y_c\mathscr{P}_y + z_c\mathscr{P}_z = \vec{IC}.\vec{\mathscr{P}} = 0. \tag{3.18}$$

Acest rezultat arată că suportul percuției va fi situat într-un plan normal la vectorul de poziție al centrului de greutate.

3°. Dacă la începutul şi la sfîrşitul ciocnirii rigidul execută o mişcare de rostogolire fără alunecare peste o suprafaţă conică fixă (Σ_1), atunci pe lîngă percuţia normală $\vec{\mathscr{P}}_{n_1}$ se va introduce în punctul D_1 şi percuţia tangenţială :

$$\vec{\mathscr{P}}_{t_1} = \lambda_{T_1}(\vec{\nabla} f_1 \wedge \overrightarrow{ID_1}), \tag{3.19}$$

iar apoi se vor adăuga condiţiile de legătură

$$\frac{\delta\omega_x}{x_{D_1}} = \frac{\delta\omega_y}{y_{D_1}} = \frac{\delta\omega_z}{z_{D_1}} = \frac{|\delta\vec{\omega}|}{|\overrightarrow{ID_1}|} \tag{3.20}$$

şi teorema lui Kelvin (3.8) care se reduce la

$$J_\Delta (\delta\vec{\omega})^2 = (\delta\vec{\omega}, \overrightarrow{D_1A}, \vec{\mathscr{P}}). \tag{3.21}$$

4°. În cazul în care solidul se rostogoleşte şi alunecă cu frecare sau atunci cînd punctele de contact alunecă cu frecare pe cele două suprafeţe, se adaugă relaţiile

$$\lambda_{Tk} = \mu_k \lambda_k \quad (k = 1, 2), \tag{3.22}$$

iar condiţiile de legătură vor fi date de relaţiile (3.7) stabilite în cazul general.

Primită la redacţie la 27 iunie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. M. ROY, *Mécanique. I. Corps rigides*, Dunod, Paris, 1965.
2. V. VÂLCOVICI, ŞT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanică teoretică*, Edit. tehn. 1968.
3. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanică*, Edit. Academiei, 1970.
4. M. ATANASIU, *Mecanică tehnică*, Edit. tehnică, 1963.
5. ŞT. STAICU, *Mecanica. Dinamica şi elemente de Mecanica fluidelor*, Litografia I.P. Bucureşti, 1973.
6. ŞT. STAICU, C. LEFTER, *Asupra ciocnirii rigidului în mişcarea generală*, St. cerc. mec. apl., **35**, 3 (1976).

ASUPRA MIȘCĂRILOR NESTAȚIONARE PRIN FISURI CU PEREȚI PERMEABILI

de AL. D. STAN

Institutul de petrol și gaze, Ploiești

Frecvent sînt întîlnite situații la exploatarea zăcămintelor de petrol și gaze mișcări nestaționare prin fisuri cu pereți permeabili. Caracterul nestaționar al mișcării este mai pronunțat la începutul unor tratamente care se efectuează la sonde (operații de fisurări hidraulice, acidizări etc.) unde sînt observate creșteri mari de presiune, atribuite de cele mai multe ori pe seama formării unor noi fisuri în strat, cu toate că aceste creșteri de presiune se produc atît la sondele noi cît și la cele de mai multe ori supuse tratamentului. Mișcarea nepermanentă printr-o fisură are efect direct, mărirea pierderii de presiune față de cazul staționar.

Elementele mișcării nestaționare printr-o fisură permeabilă sînt asemănătoare cu cele de la o mișcare staționară prin fisura permeabilă.

1. INTRODUCERE

Cazul unei mișcări laminare lente printr-o fisură a fost tratat într-o lucrare anterioară [1] unde s-a obținut legea de variație a vitezei de filtrare în această situație și căderea de presiune care are loc. Rezultate asemănătoare s-au obținut la un tub permeabil [2] sau la fisura circulară permeabilă [3].

În toate situațiile s-a considerat că mișcarea este staționară. Cazul unei mișcări nestaționare printr-o fisură, sau tub de secțiune circulară a fost tratat în lucrările [4, 5].

Studii privind mișcările nestaționare prin fisuri permeabile lipsesc cu toate că în tehnica de șantier sînt întîlnite frecvent asemenea cazuri. Un astfel de caz ar fi posibil la efectuarea operațiilor de fisurare hidraulică unde se întîlnesc, mai ales la începutul tratamentului, creșteri însemnate ale debitului într-un timp scurt. Efectul observat la sonde este de cele mai multe ori atribuit formării de noi fisuri în zăcămint. Această explicație ar fi plauzibilă cel mult la zăcămintele nou fisurate în care se deschid fisuri. La zăcămintele refisurate creșterea presiunii, în faza inițială a operației de fisurare hidraulică, poate fi atribuită caracterului nepermanent al mișcării prin fisurile formate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 1, 1981, P. 41–52

2. FUNDAMENTUL MATEMATIC AL PROBLEMEI

Ecuațiile de mișcare Navier-Stokes pentru un fluid incompresibil au forma

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

unde prin ρ și ν s-au notat densitatea și viscozitatea cinematică a fluidului, prin t timpul, și s-a introdus

$$p = \bar{\bar{p}} - \rho g y, \tag{2}$$

$\bar{\bar{p}}$ este presiunea, iar g accelerația gravitațională.

Celelalte elemente din relațiile anterioare sînt prezentate în figura 1.

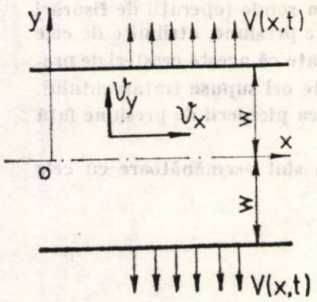


Fig. 1

Condițiile limită pe care le satisfac ecuațiile (1) sînt

$$v_x = 0 \quad \text{și} \quad v_y = 0 \quad \text{la} \quad t = 0, \tag{3}$$

$$v_x = 0 \quad \text{la} \quad y = \pm w, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} v_y &= V(x,t) \quad \text{la} \quad y = w, \\ v_y &= -V(x,t) \quad \text{la} \quad y = -w. \end{aligned} \tag{5}$$

Se pot introduce variabilele adimensionale $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{v}_x, \bar{v}_y$ și $\bar{t}$ prin relațiile

$$\bar{x} = \frac{x}{w}, \quad \bar{y} = \frac{y}{w}, \tag{6}$$

$$\bar{p} = \frac{\bar{\bar{p}}}{\rho U^2}, \tag{7}$$

$$\bar{v}_x = \frac{v_x}{U}, \quad \bar{v}_y = \frac{\bar{v}_y}{U}, \tag{8}$$

$$\bar{t} = \frac{\nu t}{w^2}. \tag{9}$$

Cu aceste variabile ecuațiile de mișcare (1) devin

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\mathcal{R}e\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\mathcal{R}e\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}, \end{aligned} \tag{10}$$

unde s-au omis pentru simplificarea scrierii barele și s-a notat

$$\mathcal{R}e = \frac{U \cdot w}{\nu},$$

U fiind o viteză de referință pentru v_x.

Condițiile limită (3), (4) și (5) devin în urma introducerii variabilelor adimensionale

$$v_x = 0 \text{ și } v_y = 0 \text{ la } t = 0, \tag{11}$$

$$v_x = 0 \quad \text{la } y = \pm 1, \tag{12}$$

$$v_y = \bar{V}(x, t) \quad \text{la } y = 1,$$
$$v_y = -\bar{V}(x, t) \text{ la } y = -1. \tag{13}$$

Mărimea $\bar{V}(x, t)$ a fost obținută prin împărțirea vitezei $V(x, t)$ la U. Ecuația de continuitate pentru un fluid incompresibil scrisă tot sub formă adimensională are forma

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{14}$$

Se poate considera că u și v sînt transformatele Laplace ale lui v_x și, respectiv, v_y prin variabila t și parametrul de integrare s,

$$u = \int_0^\infty v_x e^{-st} dt \text{ și } v = \int_0^\infty v_y e^{-st}\, dt. \tag{15}$$

Ecuațiile (10) prin aplicarea transformatei Laplace devin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - su = \mathcal{R}e \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - sv = \mathcal{R}e \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{16}$$

La obținerea acestor relații s-au admis egalitățile $\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t}$ și $\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t}$.

Ecuația de continuitate are forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{17}$$

Condițiile limită (12) și (13) devin tot prin aplicarea transformatei Laplace

$$u = 0 \text{ la } y = \pm 1, \tag{18}$$

$$v = V \text{ la } y = 1,$$
$$v = -V \text{ la } y = -1, \tag{19}$$

unde V este transformata Laplace a lui $\overline{V}(x, t)$

$$V = \int_0^\infty \overline{V}(x, t)\, e^{-st}\, dt. \tag{20}$$

Se multiplică prima dintre ecuațiile (16) cu $\sin(\xi x)$ și se integrează în raport cu x între 0 și ∞ obținîndu-se relația

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2 - s\right) X_s = -\xi \mathcal{R}e P_c, \tag{21}$$

unde X_s și P_c sînt sinus și respectiv cosinus transformata Fourier a lui u și p [6],

$$X_s = \int_0^\infty u \sin(\xi x)\, dx, \tag{22}$$

$$P_c = \int_0^\infty p \cos(\xi x)\, dx. \tag{23}$$

Dacă se introduce cosinus transformata lui v ca fiind definită prin relația

$$Z_c = \int_0^\infty v \cos(\xi x)\, dx, \tag{24}$$

iar cea de-a doua dintre ecuațiile (16) se multiplică cu $\cos(\xi x)$ și se integrează între 0 și ∞ se găsește

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2 - s\right) Z_c = \mathcal{R}e \frac{dP_c}{dy}, \tag{25}$$

iar ecuația de continuitate devine

$$\xi X_s + \frac{dZ_c}{dy} = 0. \tag{26}$$

Condițiile limită (18) înmulțite cu $\sin(\xi x)$ dau prin integrare în raport cu x între 0 și ∞

$$X_s = 0 \quad \text{la } y = \pm 1, \tag{27}$$

iar condițiile (19) dacă se multiplică cu funcția $\cos(\xi x)$ și se integrează în raport cu x conduc la obținerea relațiilor

$$\begin{aligned} Z_c &= V_c \text{ la } y = 1, \\ Z_c &= -V_c \text{ la } y = -1, \end{aligned} \tag{28}$$

unde prin V_c s-a notat transformata cosinus a lui V

$$V_c = \int_0^\infty V \cos(\xi x)\, \mathrm{d}x. \tag{29}$$

Dacă se elimină P_c şi X_s din ecuaţiile (21), (25) şi (26) se obţine ecuaţia diferenţială

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - k^2\right)^2 Z_c = 0, \tag{30}$$

unde s-a notat

$$k^2 = \xi^2 + s.$$

Soluţia ecuaţiei (30) este

$$Z_c = C_1 \mathrm{e}^{ky} + C_2 y\, \mathrm{e}^{ky} + C_3 \mathrm{e}^{-ky} + C_4 y\, \mathrm{e}^{-ky}, \tag{31}$$

iar X_s se deduce din (26),

$$X_s = -\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}Z_c}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{\xi}(C_1 k\, \mathrm{e}^{ky} + C_2 k y\, \mathrm{e}^{ky} - C_3 k\, \mathrm{e}^{-ky} -$$

$$- C_4 k y\, \mathrm{e}^{-ky} + C_2\, \mathrm{e}^{ky} + C_4\, \mathrm{e}^{-ky}). \tag{32}$$

Constantele C_1, C_2, C_3 şi C_4 se determină din sistemul care satisface ecuaţiile (27), (28) şi au valorile

$$C_1 = -C_3 = \frac{D_1}{D} \quad \text{şi} \quad C_2 = C_4 = \frac{D_2}{D},$$

unde au fost introduse notaţiile

$$D = -(A^4 + B^4 - 16k^2 - 2),$$

$$D_1 = V_c[-A^3(1+k) - B^3(k-1) - A(4k^2 + 3k + 1) + B(4k^2 -$$

$$- 3k + 1)],$$

$$D_2 = V_c[A^3 k - B^3 k + Ak(4k+1) + Bk(4k-1)],$$

$$A = \mathrm{ch}\, k + \mathrm{sh}\, k,$$

$$B = \mathrm{ch}\, k - \mathrm{sh}\, k.$$

Mărimile u și v se deduc din relațiile lui X_s și Z_c [6]

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty X_s \sin(\xi x)\,\mathrm{d}\xi, \tag{33}$$

$$v = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z_c \cos(\xi x)\,\mathrm{d}\xi, \tag{34}$$

iar viteza V se obține din relația

$$V = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_c \cos(\xi x)\,\mathrm{d}\xi. \tag{35}$$

Mărimile u, v și V nu pot fi determinate deoarece acestea sînt funcție de V_c, care la rîndul său depinde de viteza de filtrare prin pereții fisurii care, în general, nu este cunoscută.

Ca și în alte lucrări [1, 2, 3] se va calcula unele elemente utile în situațiile tehnice.

Viteza medie $u_{med}(x)$ se poate defini prin relația

$$u_{med}(x) = \int_{-1}^{1} u\,\mathrm{d}y, \tag{36}$$

dacă se înlocuiește în această ecuație u, relația (35), prin integrare se găsește

$$u_{med}(x) = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_c}{\xi}\sin(\xi x)\,\mathrm{d}\xi. \tag{37}$$

Pe de altă parte se poate scrie că viteza medie prin fețele fisurii are expresia

$$2x v_{med} = \int_0^\infty v\Big|_{y=1}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty v\Big|_{y=-1}\,\mathrm{d}x. \tag{38}$$

Pentru viteza de pe planul inferior al fisurii ($y = -1$) s-a adoptat semnul minus deoarece viteza de filtrare pe acest plan are semn contrar celei de pe planul superior ($y = +1$).

Dacă se înlocuiește expresia lui v din relația (34), se găsește

$$2x v_{med} = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_c}{\xi}\sin(\xi x)\,\mathrm{d}\xi. \tag{39}$$

Comparînd relația (37) cu (39) se observă că se poate scrie imediat

$$u_{med}(0) - u_{med}(x) = 2x v_{med}, \tag{40}$$

unde s-a introdus notația

$$u_{med}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{V_e}{\xi} \sin(\xi x)\, d\xi.$$

Relația (40) arată, ca și la mișcarea staționară printr-o fisură [3], că debitul ce intră într-o secțiune a fisurii este egal cu cel care iese din fisură și prin pereții permeabili ai acesteia.

Între efortul de forfecare și componentele vitezei există relația

$$\bar{\tau}_f = \frac{1}{\mathcal{R}e} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \tag{41}$$

în care $\bar{\tau}_f$ este forma adimensională a efortului de forfecare care a fost obținută prin împărțirea lui τ_f la ρU^2. Dacă se consideră că τ este transformata Laplace a lui $\bar{\tau}_f$,

$$\tau = \int_0^\infty \bar{\tau}_f e^{-st}\, dt, \tag{42}$$

ecuația (41) devine în urma transformării Laplace

$$\tau = \frac{1}{\mathcal{R}e} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \tag{43}$$

Avînd în vedere relațiile lui u și v, expresia lui τ va fi

$$\tau = \frac{2}{\pi \mathcal{R}e} \int_0^\infty \left(\frac{dX_e}{dy} - \xi Z_e \right) \sin(\xi x)\, d\xi. \tag{44}$$

Pe cele două fețe ale fisurii eforturile τ_1 și τ_2 au mărimile

$$\tau_1 = \frac{2}{\pi \mathcal{R}e} \int_0^\infty \left(\frac{dX_e}{dy} - \xi Z_e \right)\Big|_{y=1} \sin(\xi x)\, d\xi, \tag{45}$$

$$\tau_2 = -\frac{2}{\pi \mathcal{R}e} \int_0^\infty \left(\frac{dX_e}{dy} - \xi Z_e \right)\Big|_{y=-1} \sin(\xi x)\, d\xi. \tag{46}$$

La τ_2 s-a adoptat semnul minus deoarece acesta crește pe măsură ce scade y. Între elementul diferențial dp și eforturile de forfecare τ_1 și τ_2 există relația (fig. 2)

$$dp = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \frac{dx}{w}. \tag{47}$$

Presupunînd că p_L este transformata Laplace a lui p,

$$p_L = \int_0^\infty p\, e^{-st}\, dt, \tag{48}$$

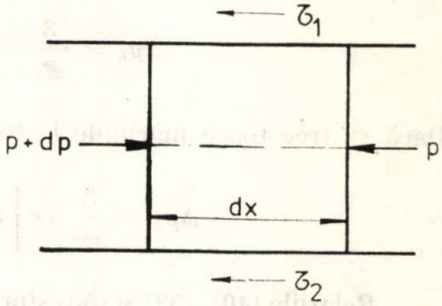


Fig. 2

dacă relaţia (47) se trece la forma adimensională şi se aplică transformata Laplace, aceasta devine

$$\mathrm{d}p_L = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\,\mathrm{d}x. \tag{48}$$

Dacă se înlocuiesc eforturile τ_1 şi τ_2 şi se integrează în raport cu x, se obţine

$$p_L(x) - p_L(0) = \frac{4}{\pi \mathcal{R}e}\int_0^\infty V_c \cos(\xi x)\,\mathrm{d}\xi. \tag{50}$$

Avînd în vedere relaţia (30) se scrie imediat

$$\Delta p_L = \frac{2}{\mathcal{R}e}[V(0) - V(x)], \tag{51}$$

cu Δp_L s-a notat diferenţa de presiune dintre $p_L(0)$ şi $p_L(x)$. Prin trecerea mărimilor la forma dimensională se obţine

$$V(x) = V(0) - \frac{\Delta p_L}{\mu}\cdot\frac{w}{2}. \tag{52}$$

Căderea de presiune Δp_L se poate calcula în mod analog ca la mişcarea staţionară [1]. În acest scop se poate scrie că elementul diferenţial $\mathrm{d}p_L$ satisface pentru un tronson de lungime $\mathrm{d}x$ relaţia

$$\mathrm{d}p_L = -\frac{3}{\mathcal{R}e}\,u_{med}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{53}$$

în această relaţie toate mărimile sînt scrise sub formă adimensională.

Prin integrare, între 0 şi x, după ce se înlocuieşte $u_{med}(x)$ dată de relaţia (40), se găseşte

$$\Delta p_L = \frac{3}{\mathcal{R}e}\,x[u_{med}(0) - xv_{med}]. \tag{54}$$

Dacă se trec toate mărimile la forma dimensională, se obţine relaţia

$$\Delta p_L = \frac{3}{w^2}\mu x\left[u_{med}(0) - \frac{x}{w}\,v_{med}\right]. \tag{55}$$

Relaţiile (40), (52) şi (55) sînt identice cu cele de la mişcarea staţionară. Mărimile care satisfac aceste ecuaţii sînt de fapt transformatele Laplace ale variabilelor corespondente de la mişcarea staţionară.

Toate aceste relații formal sînt identice cu cele de la mișcarea staționară mărimile nestaționare ale mișcării se obțin din originalele elementelor care satisfac expresiile corespunzătoare. Evident că transformatele Laplace sînt independente de variabila t. Elementele mișcării reale sînt funcție de această variabilă. Echivalența relațiilor dintre transformatele Laplace și acelea dintre inversele acestora este prezentată în anexa A.

În literatură se redau elementele mișcării pentru o fisură impermeabilă pentru lățimea infinită [5] sau pentru un dreptunghi [4].

Pentru fisura de lățime infinită viteza are expresia

$$v_x(y,t) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} w^2 \left[1 - \frac{y^2}{w^2} - 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} \cdot \frac{y}{w}}{(2n-1)^3 \pi^3} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4w^2} \nu t} \right], \tag{56}$$

iar viteza medie este

$$v_{x\,med} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} w^2 \left[\frac{2}{3} - 64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} e^{-(2n-1)^2\pi^2 \frac{\theta}{\mathscr{R}}} \right], \tag{57}$$

unde prin θ s-a notat timpul adimensional,

$$\theta = \frac{2 v_{x\,med} \cdot t}{w},$$

iar $\mathscr{R}$ este numărul lui Reynolds definit cu ajutorul vitezei medii $v_{x\,med}$ și deschiderii fisurii $2w$.

Se știe că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

rezultat ce conduce la concluzia că pentru valori foarte mici ale lui θ viteza medie $v_{x\,med}$ tinde către zero,

$$\lim_{\theta \to 0} v_{x\,med} = 0, \tag{58}$$

iar la valori mari ale lui θ

$$\lim_{\theta \to \infty} v_{x\,med} = -\frac{1}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x} w^2. \tag{59}$$

Acest ultim rezultat coincide cu cel de la o mișcare permanentă.

Pentru aceeași viteză medie, raportul dintre pierderea de presiune Δp_n într-o fisură cu mișcare nepermanentă și pierderea de presiune în aceeași fisură cu mișcare permanentă Δp este

$$\frac{\Delta p_n}{\Delta p} = \frac{2}{3\left[\frac{2}{3} - 64\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\,e^{-(2n-1)^2\pi^2\frac{\theta}{\mathscr{R}}}\right]}. \tag{60}$$

Seria din această expresie a fost calculată pe un calculator FELIX C – 256 pentru $\theta = 0{,}00001$; $0{,}0001$; $0{,}001$ și $\mathscr{R} = 250$, 1250, 2250. Sumarea termenilor seriei s-a efectuat pînă la termenul de ordinul n care a îndeplinit una dintre condițiile

$$\frac{1}{2n-1} \leqslant 0{,}00001 \text{ sau } (2n-1)^2\pi^2\frac{\theta}{\mathscr{R}} \geqslant 60.$$

Ultimul termen care s-a adăugat la serie a avut valori mai mici decît $3{,}5 \cdot 10^{-42}$.

Valorile absolute ale raportului $\Delta p_n/\Delta p$ obținute în funcție de θ și $\mathscr{R}$ sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

θ \ $\mathscr{R}$	250	1250	2250
0,00001	498094,78	498094,78	498094,78
0,0001	127425,87	498094,78	498094,78
0,001	21155,48	127425,87	127425,87

Datorită valorilor relativ mici alese în calcul pentru θ și raportul $\Delta p_n/\Delta p$ are mărimi comparabile între acestea. Se observă că raportul menționat este supraunitar, ceea ce dovedește că la aceeași viteză medie printr-o fisură în situația unei mișcări nepermanente se realizează pierderi de presiune cu mult mai mari decît dacă mișcarea ar avea un caracter permanent. S-a observat de multe ori la efectuarea operațiilor de fisurare hidraulică creșteri însemnate ale presiunii la începutul tratamentului care au fost puse pe seama formării de noi fisuri în strat atît la sondele fisurate pentru prima dată, cît și la cele refisurate.

Această creștere a presiunii poate fi atribuită și caracterului nepermanent al mișcării, și numai la sondele noi creșterea presiunii în faza inițială a operației poate fi pusă pe seama formării de fisuri. Avînd în vedere că în mișcarea nepermanentă se produc pierderi de presiune mai mari decît pentru o mișcare permanentă, este de presupus că viteza de filtrare în lungul unei fisuri scade mult mai mult față de cazul în care prin fisură mișcarea ar fi permanentă.

3. CONCLUZII

Mișcarea laminară și nestațională a unui fluid incompresibil printr-o fisură permeabilă se poate trata în mod asemănător ca și la mișcarea staționară.

Transformatele Laplace ale mișcării nestaționare satisfac aceleași relații ca pentru o mișcare staționară.

Pierderea de presiune într-o fisură rectilinie și mișcare nestațională este mai mare decît în situația unei mișcări staționare dacă în ambele ar exista aceeași viteză medie. Această observație permite să se tragă concluzia că în timpul unei operații la sondă creșterea presiunii poate fi atribuită și caracterului nestaționar al mișcării nu numai formării de fisuri noi.

ANEXA A

Prin introducerea mărimilor adimensionale, expresia lui v_x din relația (56) din lucrare, se scrie sub forma,

$$v_x = -\mathscr{R}e\frac{\partial p}{\partial x}\left[1-y^2-32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}y\cdot e^{-\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2t}}{(2n-1)^3\pi^3}\right], \quad (A-1)$$

unde v_x, p, x, y, t au fost definite tot în lucrare.

Într-o curgere laminară a fluidului, efortul de forfecare τ_f se poate defini prin relația

$$\tau_f = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (A-2)$$

și forma adimensională a acestuia $\bar{\tau}_f$ obținută prin împărțirea lui τ_f la ρU^2 conduce la expresia

$$\bar{\tau}_f = \frac{1}{\mathscr{R}e}\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}\left[2y-16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}y\cdot e^{-\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2t}}{(2n-1)^2\pi^2}\right]. \quad (A-3)$$

Dacă se calculează u ca transformata Laplace a lui v_x prin parametrul s și variabila de integrare t, se găsește

$$u = \int_0^{\infty} v_x e^{-st}\,dt = \mathscr{R}e\frac{\partial p}{\partial x}\left\{\frac{1-y^2}{s}-32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}y}{(2n-1)^3\pi^3\left[\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2+s\right]}\right\}. \quad (A-4)$$

Transformata Laplace a lui $\bar{\tau}_f$ este τ și considerînd că se poate calcula cu relația

$$\tau = \frac{1}{\mathscr{R}e}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}\left\{\frac{2y}{s} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}y}{(2n-1)^2\pi^2\left[\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2+s\right]}\right\}, \quad (A-5)$$

se observă imediat că inversînd pe τ se găsește expresia lui $\bar{\tau}_f$ obținută cu (A—3). Acest calcul dovedește că relațiile existente între transformatele Laplace sînt de aceeași formă ca și între inversele acestora.

Primită la redacție la 24 septembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Mișcarea lentă a unui fluid incompresibil printr-o fisură permeabilă*. St. cerc. mec. apl. **37**, *1*, p. 33—44 (1978).
2. T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Mișcarea unui fluid printr-un tub cu pereți permeabili*, St. cerc. mec. apl. **38**, *1*, p. 29—39 (1979).
3. T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Sur les écoulements dans les fissures circulaires à parois perméables*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **24**, *2*, p. 175—189 (1979).
4. T. OROVEANU, *Asupra unor probleme de mișcare nestaționară a unui fluid vîscos*, St. cerc. mec. apl., **31**, *2*, p. 429—442 (1972).
5. AL. D. STAN, *Asupra noțiunii de permeabilitate a unei fisuri deschise într-un zăcămînt petrolifer*, St. cerc. mec. apl., **36**, *3*, p. 325—334 (1977).
6. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Comp. Inc., New York, Toronto, London, 1951, p. 308—310, 512—513.

CALCULUL DINAMIC AL SISTEMELOR DE CONDUCTE

de N. POSEA, AL. ANGHEL
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

Lucrarea prezintă un algoritm complet pentru calculul dinamic al sistemelor de conducte, transpus într-un program, denumit C.S.D.C., pentru calculatoare electronice cifrice. Programul cuprinde inclusiv calculul static expus în articolul [1].
Metoda elaborată permite obținerea pulsațiilor proprii, a modurilor proprii de oscilație, a deplasărilor și eforturilor în orice punct al structurii atît din acțiunea unor forțe perturbatoare armonice, cît și din vibrațiile forțate ale unor suporți.

Calculul dinamic reprezintă o etapă importantă și totodată dificilă în proiectarea sistemelor de conducte.

În prezent nu există o metodologie pentru calculul dinamic al conductelor care să poată fi utilizată la proiectare, calculul de rezistență al acestora rezumîndu-se doar la calculul static. În consecință, abia după punerea în funcțiune a sistemului de conducte, se constată dacă corespunde din punct de vedere dinamic. În situația în care vibrațiile conductei sînt supărătoare, existînd pericolul de distrugere al conductei sau al suporților, se iau măsuri de schimbare a caracteristicilor dinamice ale sistemului, fie prin modificarea traseului conductei sau ale legăturilor acesteia, fie prin introducerea unor sisteme de amortizare care să reducă amplitudinile dinamice în limite admisibile.

În această lucrare se prezintă o metodă pentru calculul dinamic al sistemelor de conducte, care va permite proiectarea corectă a acestora. În plus, aplicarea metodei va fi relativ ușoară datorită programului pentru calculatoarele electronice cifrice, întocmit pe baza ei. Prezentarea atît a algoritmului, cît și a programului se face în strînsă legătură cu lucrarea „CALCULUL STATIC AL SISTEMELOR DE CONDUCTE", [1], publicată în revista „Studii și cercetări de mecanică aplicată", *6* (1980).

1. CONSIDERAȚII PRIVIND CALCULUL DINAMIC AL SISTEMELOR DE CONDUCTE

Din punct de vedere dinamic, un sistem de conducte cu ramificații și rezemări multiple reprezintă un sistem cu o infinitate de grade de libertate. Prin înlocuirea maselor distribuite ale elementelor, cu mase concentrate în anumite puncte, numărul gradelor de libertate devine finit și egal cu numărul parametrilor independenți, prin care se poate preciza poziția maselor în orice moment.

Algoritmul pentru calculul dinamic al conductelor, ce se prezintă în continuare, se bazează pe metoda elementelor finite, care, în cazul concentrării maselor la noduri, ia forma cunoscută a metodei deplasărilor specifică structurilor din bare. Forma clasică a metodei elementelor finite [4], [5], în care deplasările elementelor se exprimă prin funcţii polinomiale dependente de deplasările nodurilor, permite evidenţierea efectului maselor distribuite în comparaţie cu situaţia cînd masele se consideră concentrate la noduri, dacă se studiază mai multe variante cu elemente finite din ce în ce mai mici.

2. ECUAŢIILE DE MIŞCARE ALE STRUCTURILOR DISCRETIZATE

Se consideră un element finit (e), avînd eforturile şi deplasările de la capete în sistemul local de axe notate cu $\bar{\mathbf{Q}}^{(e)}$, respectiv $\bar{\mathbf{Z}}^{(e)}$, aşa cum s-a procedat în § 2 din [1].

Deplasările u, v, w ale unui punct curent al elementului formează matricea-coloană

$$\mathbf{\Delta} = [u, v, w]^t, \tag{2.1}$$

care se exprimă în funcţie de deplasările nodurilor prin relaţia

$$\mathbf{\Delta}^{(e)} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{Z}}^{(e)}, \tag{2.2}$$

unde $\mathbf{H}$ reprezintă o matrice dreptunghiulară 3×12, dependentă de forma deformată aleasă pentru element între noduri.

Deformaţiile specifice dintr-un punct curent al elementului se exprimă matriceal, de asemenea, în funcţie de deplasările nodurilor, sub forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{Z}}^{(e)}, \tag{2.3}$$

iar eforturile unitare prin relaţia

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{DB}\bar{\mathbf{Z}}^{(e)}, \tag{2.4}$$

în care $\mathbf{D}$ reprezintă matricea de elasticitate.

Aplicînd principiul lui d'Alembert, deformata dinamică a elementului se poate calcula ca o deformată statică sub acţiunea forţelor efectiv aplicate şi a forţelor de inerţie. Ţinînd seama de aceasta şi aplicînd principiul lucrului mecanic virtual în varianta deplasărilor virtuale, rezultă că pentru orice deplasare virtuală $\delta\bar{Z}^{(e)}$ trebuie îndeplinită egalitatea

$$\delta\bar{L}_{ex} = \delta\bar{L}_{ef}. \tag{a}$$

Folosind (2.2) se determină

$$\delta\bar{L}_{ex} = \delta\bar{Z}^{(e)t}\bar{Q}^{(e)} + \int_V \delta\Delta^t(-\rho\,dV\cdot\ddot{\Delta}) = \delta\bar{Z}^{(e)t}(\bar{Q}^{(e)} - \int_V \rho\mathbf{H}^t\mathbf{H}\ddot{\mathbf{Z}}^{(e)}\,dV) \tag{b}$$

şi utilizînd relaţiile (2.3), (2.4), rezultă

$$\delta \bar{L}_{ex} = \int \delta \varepsilon^t \sigma \, dV = \delta \bar{\mathbf{Z}}^{(e)t} \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} \bar{\mathbf{Z}}^{(e)} \, dV. \tag{c}$$

Prin dV s-a notat elementul de volum şi prin ρ densitatea specifică a materialului.

Introducînd expresiile (b) şi (c) în (a) şi ţinînd seama că egalitatea trebuie să existe pentru orice deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, se obţine

$$\bar{\mathbf{Q}}^{(e)} = \left(\int_V \rho \mathbf{H}^t \mathbf{H} \, dV \right) \ddot{\bar{\mathbf{Z}}}^{(e)} + \left(\int_V \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV \right) \bar{\mathbf{Z}}^{(e)}. \tag{d}$$

Comparînd această relaţie cu (2.6) din [1], rezultă

$$\bar{\mathbf{r}}^{(e)} = \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV, \tag{2.5}$$

care reprezintă matricea de rigiditate statică a elementului (e).

Notînd

$$\bar{\mathbf{m}}^{(e)} = \int_{(V)} \rho \mathbf{H}^t \mathbf{H} \, dV, \tag{2.6}$$

matricea maselor echivalente pentru elementul (e), relaţia (d), devine

$$\bar{\mathbf{Q}}^{(e)} = \bar{\mathbf{m}}^{(e)} \ddot{\bar{\mathbf{Z}}}^{(e)} + \bar{\mathbf{r}}^{(e)} \bar{\mathbf{Z}}^{(e)}. \tag{2.7}$$

Matricele $\bar{\mathbf{m}}^{(e)}$, $\bar{\mathbf{r}}^{(e)}$ au dimensiuni 12×12 şi sînt în sistemul local de axe al elementului (fig. 2.2.) din [1].

Pentru obţinerea relaţiei (2.7) în sistemul general de axe, se folosesc transformările (2.13) din [1] şi rezultă expresia

$$\mathbf{Q}^{(e)} = \mathbf{m}^{(e)} \ddot{\mathbf{Z}}^{(e)} + \mathbf{r}^{(e)} \mathbf{Z}^{(e)}, \tag{2.8}$$

în care

$$\mathbf{m}^{(e)} = \mathbf{L}^t \bar{\mathbf{m}}^{(e)} \mathbf{L} \tag{2.9}$$

reprezintă matricea maselor echivalente şi

$$\mathbf{r}^{(e)} = \mathbf{L}^t \bar{\mathbf{r}}^{(e)} \mathbf{L} \tag{2.10}$$

matricea de rigiditate în sistemul general de axe. Matricea $\mathbf{L}$ este definită de (2.14) din [1].

Se consideră forţele exterioare avînd componentele după direcţiile parametrilor $\mathbf{Z}$ şi care acţionează în nodurile structurii discretizate $(1, 2 \ldots n)$, formînd în totalitate matricea coloană :

$$\mathbf{F}(t) = [\mathbf{F}_1(t), \mathbf{F}_2(t) \ldots \mathbf{F}_i(t) \ldots \mathbf{F}_n(t)]^t. \tag{2.11}$$

Izolînd un nod oarecare i al structurii, echilibrul acestuia se exprimă prin condiţia matriceală :

$$\mathbf{F}_i(t) - \sum_e \mathbf{Q}_i^{(e)} = 0, \tag{e}$$

unde $\sum_e$ se referă la toate elementele finite aferente nodului i.

Folosind (2.8) şi scriind ecuaţiile de echilibru dinamic pentru toate nodurile $i = 1, 2, \ldots n$ ale structurii se obţine sistemul ecuaţiilor de mişcare :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}}(t) + \mathbf{r}\mathbf{Z}(t) = \mathbf{F}(t), \tag{2.12}$$

în care $\mathbf{M}$ este matricea maselor echivalente pentru întreaga structură, iar $\mathbf{r}$ este matricea de rigiditate pentru întreaga structură, echivalentă cu $\mathbf{r}_{ii}$ din formula (2.57), [1].

Asamblarea matricelor $\mathbf{M}$ şi $\mathbf{r}$ se face cu uşurinţă din matricele corespunzătoare elementelor componente ale structurii.

Prin elementul

$$\mathbf{m}_{ij} = \sum_{(e)} m_{ij}^{(e)} \tag{2.13}$$

al matricei $\mathbf{M}$ se înţelege submatricea maselor echivalente care dau forţe de inerţie după direcţia i, cînd vibrează cu acceleraţii unitare corespunzătoare gradului Z_j^b $(b = 1, 2 \ldots 6)$. O coloană (h) a matricei $\mathbf{M}$ reprezintă masele echivalente gradului Z_h^b care dau forţe de inerţie pe direcţiile tuturor celorlalţi parametrii $\mathbf{Z}_j$.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (2.12) descrie oscilaţia generală a structurii sub acţiunea forţelor perturbatoare $\mathbf{F}(t)$.

Dacă nu există forţe perturbatoare şi structura este scoasă din echilibru, ea vibrează în mod liber şi aceste oscilaţii sînt descrise de sistemul de ecuaţii :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}}(t) + \mathbf{r}\mathbf{Z}(t) = 0, \tag{2.14}$$

care constituie un sistem omogen.

Pentru a ţine seama de amortizarea fenomenelor oscilatorii se adoptă o amortizare de tip vîscos, ceea ce înseamnă introducerea unor forţe rezistente proporţionale cu vitezele. Totalitatea acestor forţe se asamblează sub forma matricei

$$\mathbf{R}^a = \beta\dot{\mathbf{Z}}(t), \tag{2.15}$$

în care β reprezintă matricea coeficienților de amortizare; dacă $\mathbf{Z}$ are n linii, atunci β este o matrice pătratică $n \times n$.

Sistemul (2.12) în prezența amortizării devine

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}}(t) + \beta\dot{\mathbf{Z}}(t) + \mathbf{r}\mathbf{Z}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{2.16}$$

și constituie sistemul ecuațiilor de mișcare pentru structurile cu amortizări, sau sistemul de ecuații al vibrațiilor amortizate.

3. DETERMINAREA FRECVENȚELOR ȘI FORMELOR PROPRII LA SISTEMELE DE CONDUCTE

La calculul static [1], prin modul de alegere al necunoscutelor, întreaga structură este împărțită în bare drepte și bare curbe circulare (coturi). Dacă masele barelor se consideră concentrate în aceleași secțiuni în care deplasările și rotirile au fost considerate drept necunoscute, se ajunge la o schemă de calcul dinamic deosebit de avantajoasă, deoarece parametrii dinamici sînt identici cu parametrii statici.

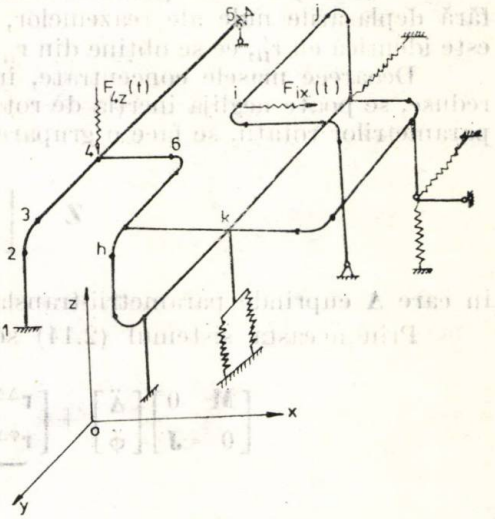


Fig. 1

Pentru un sistem de conducte oarecare (fig. 1) se vor considera noduri în toate punctele de ramificații, în toate punctele de rezemări, la schimbările de direcții și uneori, chiar pe unele porțiuni drepte de conducte, dacă acestea sînt prea lungi.

Prin aceasta se obține un model dinamic apropiat de structura reală, al cărui calcul este simplu întrucît matricea maselor este diagonală, iar matricea de rigiditate este cea din calculul static [1], strict necesară pentru calculul eforturilor.

Sistemul de ecuații diferențiale pentru vibrațiile libere păstrează forma matriceală (2.14).

Se precizează însă că matricea $\mathbf{M}$ spre deosebire de forma pătratică ce rezultă din aplicarea formulelor (2.9) și (2.13) este o matrice diagonală

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & m_n \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Ţinînd seama că fiecare vector $\mathbf{Z}_i$ are şase componente, trei translaţii şi trei rotaţii, submatricele $\mathbf{m}_i$ din (3.1) sînt la rîndul lor matrice diagonale de forma

$$\mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_i^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_i^y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_i^z \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

în care m_i reprezintă masa concentrată din nodul i, iar J_i^x, J_i^y, J_i^z momentele de inerţie ale masei m_i faţă de axele x, y, z ale sistemului general, trecînd prin nodul respectiv.

Întrucît vectorul $\mathbf{Z}(t)$ cuprinde toate deplasările posibile ale nodurilor structurii, inclusiv parametrii după direcţiile legăturilor elastice dar fără deplasările nule ale reazemelor, înseamnă că matricea $\mathbf{r}$ din (2.14) este identică cu $\mathbf{r}'_{ll}$, ce se obţine din $\mathbf{r}_{ll}$ aşa cum se arată în § 2.9 din [1].

Deoarece masele concentrate, în cazul conductelor, au dimensiuni reduse, se poate neglija inerţia de rotaţie a acestora. În scopul eliminării parametrilor rotaţii, se face o grupare a necunoscutelor $\mathbf{Z}$ sub forma

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \Delta \\ \varphi \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

în care Δ cuprinde parametrii-translaţii, iar φ parametrii-rotaţii.

Prin aceasta sistemul (2.14) se descompune în

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\Delta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}^{\Delta\Delta} & \mathbf{r}^{\Delta\varphi} \\ \mathbf{r}^{\varphi\Delta} & \mathbf{r}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}'_{ll}} \begin{bmatrix} \Delta \\ \varphi \end{bmatrix} = 0 \tag{a}$$

din care rezultă ecuaţiile matriceale:

$$\mathbf{M}\ddot{\Delta} + \mathbf{r}^{\Delta\Delta}\Delta + \mathbf{r}^{\Delta\varphi}\varphi = 0, \tag{b}$$

$$\mathbf{J}\ddot{\varphi} + \mathbf{r}^{\varphi\Delta}\Delta + \mathbf{r}^{\varphi\varphi}\varphi = 0. \tag{c}$$

Neglijînd inerţia de rotaţie $\mathbf{J} = 0$ şi introducînd φ din (c) în (b) se obţine sistemul:

$$\mathbf{M}\ddot{\Delta} + [\mathbf{r}^{\Delta\Delta} - \mathbf{r}^{\Delta\varphi}(\mathbf{r}^{\varphi\varphi})^{-1}\mathbf{r}^{\varphi\Delta}]\,\Delta = 0. \tag{d}$$

Notînd matricea de rigiditate pentru parametrii Δ

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}^{\Delta\Delta} - \mathbf{r}^{\Delta\varphi}(\mathbf{r}^{\varphi\varphi})^{-1}\,\mathbf{r}^{\varphi\Delta}, \tag{3.4}$$

relaţia (d) devine :

$$\mathbf{M}\ddot{\Delta} + \mathbf{K}\Delta = 0, \tag{3.5}$$

şi reprezintă sistemul de ecuaţii diferenţiale pentru oscilaţiile libere, atunci cînd parametrii de oscilaţie sînt numai translaţii.

Alegînd o soluţie de forma

$$\Delta = \mathbf{A}\cos(pt - \nu), \tag{3.6}$$

sistemul (3.5) devine un sistem algebric,

$$(\mathbf{K} - p^2\mathbf{M})\,\mathbf{A} = 0, \tag{3.7}$$

care, pentru a admite soluţii diferite de cea banală, trebuie să aibă determinantul caracteristic nul. Exprimînd această condiţie,

$$|\mathbf{K} - p^2\mathbf{M}| = 0, \tag{3.8}$$

se obţine ecuaţia pulsaţiilor proprii.

Se defineşte matricea diagonală

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}_1}} & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}_2}} & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}_n}} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

astfel încît produsul $\mathbf{DMD} = \mathbf{I}$, unde $\mathbf{I}$ reprezintă matricea unitate.

Folosind transformarea

$$\mathbf{A} = \mathbf{DB} \tag{3.10}$$

şi notaţia

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{DKD}, \tag{3.11}$$

sistemul algebric (3.7) devine :

$$(\mathbf{K}^* - p^2\mathbf{I})\,\mathbf{B} = 0. \tag{3.12}$$

Întrucît constantele $\mathbf{B}$ nu pot fi toate nule, trebuie ca determinantul sistemului (3.12) să fie nul, ceea ce conduce la ecuaţia pulsaţiilor proprii (3.8) sub forma

$$|\mathbf{K}^* - \lambda\mathbf{I}| = 0, \tag{3.13}$$

unde

$$\lambda = p^2. \tag{3.14}$$

Prin rezolvarea ecuației (3.13) se determină valorile proprii (λ) ale matricei $\mathbf{K}^*$, după care utilizînd (3.14) se obțin pulsațiile proprii ale sistemului de conducte, ordonate crescător,

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_\alpha < \ldots < p_n, \tag{3.15}$$

unde p_1 reprezintă pulsația fundamentală.

Frecvențele proprii se obțin cu relațiile

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi}\,;\; f_2 = \frac{p_2}{2\pi}\,;\; \ldots f_\alpha = \frac{p_\alpha}{2\pi}\,;\; \ldots f_n = \frac{p_n}{2\pi}\,. \tag{3.16}$$

Prin rezolvarea sistemului algebric (3.7) pentru fiecare din pulsațiile proprii (3.15) se obține matricea modală

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \ldots \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\beta \ldots \mathbf{V}_n] \tag{3.17}$$

de dimensiuni $n \times n$, în care

$$\mathbf{V}_\alpha = [A_{1,\alpha}\, A_{2,\alpha} \ldots A_{i,\alpha} \ldots]^t \tag{3.18}$$

reprezintă forma proprie de oscilație corespunzătoare lui p_α, sau vectorul propriu α.

Întrucît la fiecare vector propriu una din amplitudini poate fi arbitrară, este de preferat ca această constantă să fie luată astfel încît vectorul propriu să fie normalizat. Aceasta revine la îndeplinirea condiției :

$$\mathbf{V}_\alpha^t \mathbf{M} \mathbf{V}_\alpha = 1, \tag{3.19}$$

care, în formă dezvoltată, devine

$$\sum_i m_i A_{i,\alpha}^2 = 1. \tag{3.19'}$$

Deoarece fiecare vector propriu îndeplinește condiția (3.19), rezultă că matricea modală îndeplinește condiția

$$\mathbf{V}^t \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{I}. \tag{3.20}$$

Aranjînd pulsațiile proprii într-o matrice diagonală,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & p_2^2 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & p_n^2 \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

şi folosind condiţia (3.20), sistemul (3.7) devine

$$\mathbf{V}^t\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{P} \tag{3.22}$$

şi este echivalent cu n ecuaţii independente.

4. SOLUŢIA GENERALĂ A VIBRAŢIILOR LIBERE

Dacă se cunosc vectorii proprii, soluţia sistemului (3.5) se alege de forma

$$\Delta = \mathbf{V}\mathbf{q}(t), \tag{4.1}$$

în care vectorul $\mathbf{q}$ reprezintă n funcţii de timp necunoscute, similare a n coordonate generalizate de tip Lagrange. De aceea, $\mathbf{q}$ se va numi vectorul coordonatelor generalizate.

Introducînd soluţia (4.1) în (3.5), se obţine

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{q} = 0. \tag{a}$$

Premultiplicînd această relaţie cu $\mathbf{V}^t$ şi ţinînd seama de (3.20) şi de (3.22), rezultă

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\mathbf{q} = 0, \tag{4.2}$$

care reprezintă n ecuaţii independente:

$$\ddot{q}_\alpha + p_\alpha^2 q_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots n. \tag{4.2'}$$

Soluţia ecuaţiei (4.2') fiind

$$q_\alpha = C_{1\alpha} \cos p_\alpha t + C_{2\alpha} \sin p_\alpha t = C_\alpha \cos (p_\alpha t - \nu_\alpha), \tag{4.3}$$

rezultă soluţia generală a oscilaţiilor libere (4.1) sub forma

$$\Delta_h = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{A}_{h_\alpha} \mathbf{C}_\alpha \cos (p_\alpha t - \nu_\alpha); \quad h = 1, 2, \ldots n, \tag{4.4}$$

care reprezintă o combinaţie liniară a formelor proprii.

Cele 2 n constante (C_α şi ν_α) se deterină din condiţiile iniţiale:

$$\Delta_h(t = 0) = \Delta_{h0}; \quad \dot{\Delta}_h(t = 0) = \dot{\Delta}_{h0}.$$

Ecuaţiile de mişcare cu luarea în consideraţie a amortizărilor se obţin prin particularizarea ecuaţiei matriceale (2.16):

$$\mathbf{M}\ddot{\Delta} + \beta\dot{\Delta} + \mathbf{K}\Delta = 0. \tag{4.5}$$

Dacă matricea $\boldsymbol{\beta}$ a coeficienților de amortizare pentru sistemul numai cu parametrii $\boldsymbol{\Delta}$ se alege de forma

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_m \mathbf{M} + \lambda_k \mathbf{K}, \tag{4.6}$$

folosind ecuația (4.1) și premultiplicînd ecuația (4.5) cu $\mathbf{V}^t$, rezultă ecuația matriceală:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \lambda_m \dot{\mathbf{q}} + \lambda_k \mathbf{P}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\mathbf{q} = 0, \tag{4.7}$$

care reprezintă n ecuații independente de forma

$$\ddot{q}_\alpha + (\lambda_m + \lambda_k p_\alpha^2)\, \dot{q}_\alpha + p_\alpha^2 q_\alpha = 0\,; \quad \alpha = 1, 2 \ldots n. \tag{4.7'}$$

Notînd

$$2b_\alpha p_\alpha = \lambda_m + p_\alpha^2 \lambda_k, \tag{4.8}$$

unde b_α reprezintă factorul de amortizare pentru forma de oscilație α;

$$p_{\alpha 1} = p_\alpha \sqrt{1 - b_\alpha^2}, \tag{4.9}$$

pulsația proprie ținînd seama de amortizare, soluția ecuației (4.7') este

$$q_\alpha = \mathrm{e}^{-b_\alpha p_\alpha t}\, C_\alpha \cos(p_{\alpha 1} t - \nu_\alpha), \tag{4.10}$$

unde C_α și ν_α reprezintă două constante care se determină din condiții inițiale.

Soluția generală a vibrațiilor libere amortizate (4.5), folosind (4.1) și (4.10), este

$$\Delta_h = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{h\alpha}\, \mathrm{e}^{-b_\alpha p_\alpha t}\, C_\alpha \cos(p_{\alpha 1} t - \nu_\alpha),$$

$$h = 1, 2 \ldots n. \tag{4.11}$$

Dacă din anumite experiențe se prescrie b_1 pentru un anumit sistem de conducte cu ramificații, atunci factorul de amortizare pentru formele proprii superioare se poate determina, în multe situații, cu rezultate satisfăcătoare, cu relația aproximativă:

$$b_\alpha = b_1 \frac{p_\alpha}{p_1}, \tag{4.12}$$

ceea ce înseamnă că factorul de amortizare crește proporțional cu ordinul modului de oscilație.

5. VIBRAȚIILE FORȚATE ALE SISTEMELOR DE CONDUCTE

Prin adoptarea ipotezelor formulate în § 3, privind concentrarea maselor și neglijarea inerției de rotație, sistemul ecuațiilor ce descrie vibrațiile forțate ale unui sistem de conducte cu ramificații (2.12) ia forma :

$$\mathbf{M}\ddot{\Delta} + \mathbf{K}\Delta = \mathbf{F}(t) \tag{5.1}$$

în cazul sistemelor fără amortizare și forma

$$\mathbf{M}\ddot{\Delta} + \beta\dot{\Delta} + \mathbf{K}\Delta = \mathbf{F}(t) \tag{5.2}$$

în cazul sistemelor de conducte cu amortizări.

Vectorul $\mathbf{F}(t)$ este format din componentele forțelor exterioare perturbatoare din toate nodurile modelului dinamic adoptat și se exprimă prin relația

$$\mathbf{F}(t) = [\mathbf{F}_1(t)\, \mathbf{F}_2(t) \ldots \mathbf{F}_j(t) \ldots \mathbf{F}_n(t)]^t, \tag{5.3}$$

în care fiecare termen poate avea trei componente :

$$\mathbf{F}_j(t) = [F_j^x(t)\ F_j^y(t)\ F_j^z(t)]^t = [F_j^1 F_j^2 F_j^3]^t. \tag{5.4}$$

Pentru a se putea analiza și fenomenele vibratorii la rezonanță, se va stabili răspunsul dinamic pentru sistemele cu amortizare ; aceasta înseamnă stabilirea soluției ecuației matriceale (5.2).

5.1. CAZUL FORȚELOR PERTURBATOARE OARECARE

Se consideră soluția generală prin folosirea vectorilor proprii $\mathbf{V}$ (3.17) și a coordonatelor generalizate $\mathbf{q}(t)$:

$$\Delta = \mathbf{V}\mathbf{q}(t). \tag{5.5}$$

Prin multiplicarea la stînga a ecuației (5.2) cu $\mathbf{V}^t$ și ținînd seama de (3.20), (3.22) și (4.6), se obține ecuația matriceală :

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\lambda_m + \lambda_k \mathbf{P})\, \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{P}\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}^t\mathbf{F}(t), \tag{5.6}$$

care se descompune în n ecuații independente :

$$\ddot{q}_\alpha(t) + (\lambda_m + \lambda_k p_\alpha^2)\, \dot{q}_\alpha(t) + p_\alpha^2 q_\alpha(t) = \sum_{j=1}^{n} A_{j\alpha}^t F_j(t),$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots n. \tag{5.7}$$

Notînd

$$f_\alpha(t) = \sum_{j=1}^{n} A^t_{j\alpha} F_j(t) \tag{5.8}$$

componenta forţelor exterioare după forma proprie de oscilaţie α şi ţinînd cont de relaţiile (4.8), (4.9), soluţia generală a ecuaţiei (5.7) este

$$q_\alpha(t) = \frac{1}{p^2_{\alpha 1}} \int_0^t f_\alpha(\tau)\, e^{-b_\alpha p_\alpha (t-\tau)} \sin p_{\alpha 1}(t - \tau)\, d\tau, \tag{5.9}$$

unde τ reprezintă variabila independentă în intervalul $0-t$.

Dacă condiţiile iniţiale nu sînt nule, atunci la soluţia (5.9) trebuie adăugată soluţia (4.10), ale cărei constante se determină din condiţiile pentru amplitudini şi viteze la $t = 0$.

Întrucît condiţiile trebuie exprimate în valorile $q_{\alpha 0}$, $\dot{q}_{\alpha 0}$, se procedează astfel :

— se premultiplică relaţia (4.1) cu $\mathbf{V}^t\mathbf{M}$, ceea ce conduce la

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}^t\mathbf{M}\Delta ; \tag{5.10}$$

— cunoscînd vectorul Δ_0 şi $\dot{\Delta}_0$, se obţine

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{V}^t\mathbf{M}\Delta_0 \quad \text{şi}$$

$$\dot{q}_0 = \mathbf{V}^t\mathbf{M}\dot{\Delta}_0 \tag{5.11}$$

şi apoi se determină C_α şi ν_α cu ajutorul relaţiei (4.10) şi al derivatei acesteia.

Deplasarea unui nod oarecare după direcţia h (translaţie după una din axele x, y sau z) va fi

$$\Delta_h(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{h\alpha} q_\alpha(t). \tag{5.12}$$

Se observă că vibraţia forţată reprezintă o suprapunere a formelor proprii multiplicate cu coordonatele generalizate $q_\alpha(t)$, care indică contribuţia fiecăruia dintre modurile proprii la vibraţia forţată a structurii.

După determinarea amplitudinilor se determină forţele de inerţie

$$F^i_h(t) = -m_h \ddot{\Delta}_h(t), \tag{5.13}$$

după care se calculează eforturile produse de toate forţele exterioare şi forţele de inerţie.

5.2. CAZUL FORȚELOR ARMONICE

Se condiseră că sistemul de conducte este acționat la noduri de forțe perturbatoare periodice în fază, depinzînd de aceeași pulsație ω, variind după legea cos ωt sau după legea sin ωt. Acesta este un caz frecvent întîlnit la conductele industriale la care refularea fluidului din conductă se face de către o pompă sau un compresor cu piston.

Pentru a soluționa atît cazul cînd ele variază după legea cosωt, cît și cel în care variază cu sin ωt, se admite forma generală

$$\mathbf{F}_j(t) = \mathbf{F}_j^0 \cdot e^{i\omega t} = \mathbf{F}_j^0 (\cos\omega t + i\sin\omega t). \tag{5.14}$$

Introducînd această expresie în (5.7), se obține

$$\ddot{q}_\alpha + 2b_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha + p_\alpha^2 q_\alpha = e^{i\omega t} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{j\alpha}^t \mathbf{F}_j^0. \tag{5.15}$$

Se notează componenta maximă a forțelor exterioare după forma proprie de oscilație α cu

$$f_\alpha^0 = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{j\alpha} \mathbf{F}_j^0. \tag{5.16}$$

Dacă se urmărește numai soluția stabilizată,

$$q_\alpha = C_\alpha e^{i\omega t},$$

întrucît

$$\dot{q}_\alpha = i\omega q_\alpha; \quad \ddot{q}_\alpha = -\omega^2 q_\alpha,$$

se obține

$$q_\alpha(t) = f_\alpha^0 e^{i\omega t} \frac{1}{p_\alpha^2 - \omega^2 + 2ib_\alpha p_\alpha \omega}. \tag{5.17}$$

Raționalizînd numitorul expresiei (5.17), deplasările unui nod oarecare h sînt descrise de expresia (5.12), care devine

$$\Delta_h(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{h\alpha} f_\alpha^0 \frac{(p_\alpha^2 - \omega^2 - 2ib_\alpha p_\alpha) e^{i\omega t}}{(p_\alpha^2 - \omega^2)^2 + (2b_\alpha p_\alpha \omega)^2}. \tag{5.18}$$

Alegînd partea reală a expresiei (5.18) se obține răspunsul pentru forțe periodice, în fază, variind după legea cosωt.
Rezultă

$$\Delta_h(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{h\alpha} \frac{f_\alpha^0}{p_\alpha^2} \psi'_\alpha \cos(\omega t - \nu), \tag{5.19}$$

unde prin ψ'_α s-a notat coeficientul dinamic la vibrații forțate cu amortizare a cărui expresie este

$$\psi'_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_\alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{2b_\alpha \omega}{p_\alpha}\right)^2}}. \tag{5.20}$$

Aplicînd (5.13), se determină forțele de inerție

$$F_k^i(t) = m_k \sum_{\alpha=1}^{n} A_{k\alpha} f_\alpha^0 \frac{\omega^2}{p_\alpha^2} \psi'_\alpha \cos(\omega t - \nu), \tag{5.21}$$

după care se calculează eforturile la capetele fiecărui element, pe baza algoritmului și programului prezentate în lucrările [1], [2], [3].

Evident, la determinarea eforturilor maxime și minime se vor suprapune efectele produse de forțele permanente, forțele perturbatoare maxime, respectiv minime și forțele de inerție corespunzătoare.

5.3. VIBRAȚIILE FORȚATE PRODUSE DE OSCILAȚIILE UNOR LEGĂTURI

În afara parametrilor Δ se introduc parametrii $\mathbf{U}_s$ corespunzători legăturilor (suporților) care pot avea mișcare vibratorie.

În acest caz, se notează vectorul total al deplasărilor cu

$$\Delta' = \begin{bmatrix} \Delta \\ \mathbf{U}_s \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

și matricele corespunzătoare acestuia $\mathbf{M}'$, $\mathbf{K}'$, $\boldsymbol{\beta}'$, $\mathbf{F}'$. Astfel, ecuația matricială (5.2) devine:

$$\mathbf{M}'\ddot{\Delta}' + \boldsymbol{\beta}'\dot{\Delta}' + \mathbf{K}'\Delta' = \mathbf{F}'. \tag{5.23}$$

Întrucît numărul total de parametri este acum $n + s$, se partiționează matricele $\mathbf{M}'$, $\mathbf{K}'$, $\boldsymbol{\beta}'$, $\mathbf{F}'$, astfel încît matricele folosite în cazul suporților fără vibrații să rămînă compacte. Astfel, se va admite:

$$\mathbf{K}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{K}^{\Delta U} \\ \hline \mathbf{K}^{U\Delta} & \mathbf{K}^{UU} \end{array}\right], \tag{5.24}$$

$$\mathbf{M}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{M}^{\Delta U} \\ \hline \mathbf{M}^{U\Delta} & \mathbf{M}^{UU} \end{array}\right], \tag{5.25}$$

$$\boldsymbol{\beta}' = \lambda_K \mathbf{K}' + \lambda_m \mathbf{M}'. \tag{5.26}$$

Vectorul forțelor exterioare va avea componentele

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{R}_s \end{bmatrix}, \tag{5.27}$$

unde $\mathbf{F} = 0$ întrucît structura se consideră fără forţe exterioare, şi $\mathbf{R}$, reacţiuni apărute în legăturile s ca urmare a vibraţiilor acestora.

Se alege soluţia ecuaţiei (5.23) sub forma

$$\Delta' = \mathbf{V}'\mathbf{q}', \tag{5.28}$$

în care

$$\mathbf{V}' = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix}.$$

Folosind relaţiile cunoscute $\mathbf{V}^t\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}^t\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{P}$ din situaţia suporţilor ficşi, introducerea soluţiei (5.28) în (5.23) şi premultiplicarea cu $\mathbf{V}'^t$ conduc la ecuaţia

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^t\mathbf{M}^{\Delta U}\ddot{\mathbf{q}}_s + \lambda_m\ddot{\mathbf{q}} + \lambda_m\mathbf{V}^t\mathbf{M}^{\Delta U} + \lambda_k\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} +$$

$$+ \lambda_k\mathbf{V}^t\mathbf{K}^{\Delta U}\dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{V}^t\mathbf{K}^{\Delta U}\mathbf{q}_s = 0,$$

care, ţinînd seama că $\mathbf{q}_s = \mathbf{U}_s$, se aranjează sub forma

$$\ddot{\mathbf{q}} + (\lambda_m + \lambda_k\mathbf{P})\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\mathbf{q} = -\mathbf{V}^t[\mathbf{M}^{\Delta U}(\ddot{\mathbf{U}}_s + \lambda_m\dot{\mathbf{U}}_s) + \mathbf{K}^{\Delta U}(\mathbf{U}_s + \lambda_k\dot{\mathbf{U}}_s). \tag{5.29}$$

Această ecuaţie matriceală se descompune în n ecuaţii scalare:

$$\ddot{q}_\alpha + (\lambda_m + \lambda_k p_\alpha^2)\,\dot{q}_\alpha + p_\alpha^2 q_\alpha = f_\alpha(t), \tag{5.30}$$

unde partea dreaptă a relaţiei (5.29) pentru modul de oscilaţie α se poate scrie sub forma:

$$f_\alpha(t) = -\sum_{j=1}^{n} A_{j\alpha} \sum_{s} [m_{j,s}(\ddot{U}_s + \lambda_m\dot{U}_s) + K_{j,s}(U_s + \lambda_k U_s)], \tag{5.31}$$

$$\alpha = 1, 2 \ldots n.$$

Soluţia ecuaţiei (5.30) are forma (5.9), în care $f_\alpha(t)$ este dat de (5.31).

În acest fel, răspunsul structurii la excitaţii ale suporţilor s-a exprimat în funcţie de valorile proprii şi modurile proprii de oscilaţie ale structurii cu legăturile fixe.

Pentru cazul matricei maselor diagonală $m_{j,s} = 0$, $f_\alpha(t)$ (5.31) este definită prin deplasările U_s şi vitezele deplasărilor $\dot{U}_s$ ale suporţilor

$$f_\alpha(t) = -\sum_{j=1}^{n} A_{j\alpha} \sum_{s} K_{j,s}(U_s + \lambda_k\dot{U}_s). \tag{5.32}$$

Se precizează faptul că pentru $\lambda_m = 0$ în matricea coeficienților de amortizare (4.6), se obține conform (4.8) și (4.12)

$$\lambda_k = 2\frac{b_1}{p_1}, \tag{5.33}$$

în care b_1 reprezintă factorul de amortizare pentru prima formă proprie de oscilație.

Considerînd excitațiile suporților periodice, în fază, variind după legea $\cos\omega t$:

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{U}_s^0 \cos\omega t, \tag{5.34}$$

relația (5.32) devine

$$f_\alpha(t) = -\sum_{j=1}^{n} A_{j\alpha} \sum_s K_{j,s} U_s^0 [\cos\omega t - \omega\lambda_k \sin\omega t]. \tag{5.35}$$

Introducînd această funcție în soluția (5.9), se obține

$$q_\alpha(t) = -\frac{1}{p_{\alpha 1}^2} \sum_{j=1}^{n} A_{j\alpha} \sum_s K_{j,s} U_s^0 \int_0^t \{[\cos\omega\tau - \lambda_k\omega \sin\omega\tau] \times$$

$$\times e^{-b_\alpha p_\alpha (t-\tau)} \sin p_{\alpha 1}(t-\tau)\,d\tau\}. \tag{5.36}$$

Dacă se notează în (5.36) cu I expresia:

$$I = \int_0^t [\cos\omega\tau - \lambda_k\omega \sin\omega\tau]\, e^{-b_\alpha p_\alpha (t-\tau)} \sin p_{\alpha 1}(t-\tau)\,d\tau \tag{a}$$

și se adoptă funcțiile

$$I_1 = \int_0^t e^{-b_\alpha p_\alpha (t-\tau)} \sin[\tau(\omega - p_{\alpha 1}) + p_{\alpha 1} t]\,d\tau,$$

$$I_2 = \int_0^t e^{-b_\alpha p_\alpha (t-\tau)} \sin[-\tau(\omega + p_{\alpha 1}) + p_{\alpha 1} t]\,d\tau,$$

$$I_3 = \int_0^t e^{-b_\alpha p_\alpha (t-\tau)} \cos[-\tau(\omega + p_{\alpha 1}) + p_{\alpha 1} t]\,d\tau,$$

$$I_4 = \int_0^t e^{-b_\alpha p_\alpha (t-\tau)} \cos[\tau(\omega - p_{\alpha 1}) + p_{\alpha 1}]\,d\tau,$$

atunci expresia I devine

$$I = \frac{1}{2}[I_1 + I_2 - \lambda_k\omega(I_3 - I_4)]. \tag{b}$$

Prin efectuarea integralelor din expresiile I_1, I_2, I_3, I_4 rezultă

$$I_1 = \frac{1}{b_\alpha p_\alpha \left[1 + \frac{(\omega - p_{\alpha 1})^2}{b_\alpha^2 p_\alpha^2}\right]} \left[\sin\omega t - \frac{\omega - p_{\alpha 1}}{b_\alpha p_\alpha} \cos\omega t - e^{-b_\alpha p_\alpha t} (\sin p_{\alpha 1} t - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega - p_{\alpha 1}}{b_\alpha p_\alpha} \cos p_{\alpha 1} t)\right],$$

$$I_2 = \frac{1}{b_\alpha p_\alpha \left[1 + \frac{(\omega + p_{\alpha 1})^2}{b_\alpha^2 p_\alpha^2}\right]} \left[\sin(-\omega t) + \frac{\omega - p_{\alpha 1}}{b_\alpha p_\alpha} \cos\omega t - \right.$$

$$\left. - e^{-b_\alpha p_\alpha t} \left(\sin p_{\alpha 1} t + \frac{\omega + p_{\alpha 1}}{b_\alpha p_\alpha} \sin p_{\alpha 1} t\right)\right],$$

$$I_3 = \frac{1}{b_\alpha p_\alpha \left[1 + \frac{(\omega + p_{\alpha 1})^2}{b_\alpha^2 p_\alpha^2}\right]} \left[\cos\omega t + \frac{\omega + p_{\alpha 1}}{b_\alpha p_\alpha} \sin\omega t - \right.$$

$$\left. - e^{-b_\alpha p_\alpha t} \left(\cos p_{\alpha 1} t - \frac{\omega + p_{\alpha 1}}{b_\alpha p_\alpha} \sin p_{\alpha 1} t\right)\right],$$

$$I_4 = \frac{1}{b_\alpha p_\alpha \left[1 + \frac{(\omega - p_{\alpha 1})^2}{b_\alpha^2 p_\alpha^2}\right]} \left[\cos\omega t + \frac{\omega - p_{\alpha 1}}{b_\alpha p_\alpha} \sin\omega t - \right.$$

$$\left. - e^{-b_\alpha p_\alpha t} \left(\cos p_{\alpha 1} + \frac{\omega - p_{\alpha 1}}{b_\alpha p_\alpha} \sin p_{\alpha 1} t\right)\right].$$

După stabilirea parametrilor $q_\alpha(t)$ (5.36), deplasarea unui nod oarecare h se determină cu relaţia (5.12) şi forţele de inerţie cu (5.13).

Deşi orice sistem de conducte cu ramificaţii şi rezemări multiple are un număr mare de grade de libertate, se poate exprima răspunsul dinamic prin folosirea unui număr limitat de forme proprii. Astfel, pentru acţiunea cutremurului sînt suficiente primele trei moduri de oscilaţie, iar pentru o vibraţie forţată stabilizată de pulsaţie ω sînt suficiente cîte 2—3 moduri proprii atît sub pulsaţia ω, cît şi deasupra acesteia.

6. TANSPUNEREA ALGORITMULUI ÎN PROGRAM PENTRU CALCULATOARE NUMERICE

Algoritmul pentru calculul dinamic al sistemelor de conducte, expus mai sus, a fost transpus într-un lanţ de programe asamblate într-un program general denumit CSDC, în limbaj Fortran IV, ce efectuează atît calculul static, cît şi calculul dinamic al sistetelor de conducte.

Algoritmul pentru calculul static şi lanţul de programe pentru acesta sînt prezentate în lucrările [1], [2], [3].

Lanțul de programe pentru efectuarea calculului dinamic în care a fost transpus algoritmul prezentat în paragrafele anterioare conține următoarele „job-uri" :

job-ul DINAMIC ; job-ul VIBR ; job-ul SUP.

În cadrul job-ului DINAMIC se rearanjează matricea $\mathbf{r}'_{ii}$, care se găsește stocată în fișierul RG2 creat în job-ul RG2 [1] și se determină matricea de rigiditate a structurii fără a se ține seama de inerția de rotație, notată cu **K**, conform relației (3.4).

Se introduc ca date de intrare în acest job : greutățile maselor concentrate în noduri și pentru fiecare element al structurii [1] greutatea unui centimetru liniar.

Masele distribuite ale elementelor se discretizează automat la nodurile structurii. Se formează matricea maselor structurii **M**, care este o matrice diagonală și care intervine în ecuația pulsațiilor proprii (3.8) și pe baza ei se determină matricea diagonală **D**(3.9).

Se determină ecuația pulsațiilor proprii sub forma (3.13) și se calculează pulsațiile proprii și formele proprii ca valori și respectiv vectori proprii normalizați ai matricei **K***(3.11), ținîndu-se cont și de relația (3.12) la determinarea vectorilor proprii ai structurii reale.

Se stochează într-un fișier denumit „DINAM" matricea maselor **M**, valorile proprii (3.15) și matricea modală (3.17).

Pulsațiile proprii și vectorii proprii se și afișează.

Schema logică de principiu a acestui job este dată în figura 2.

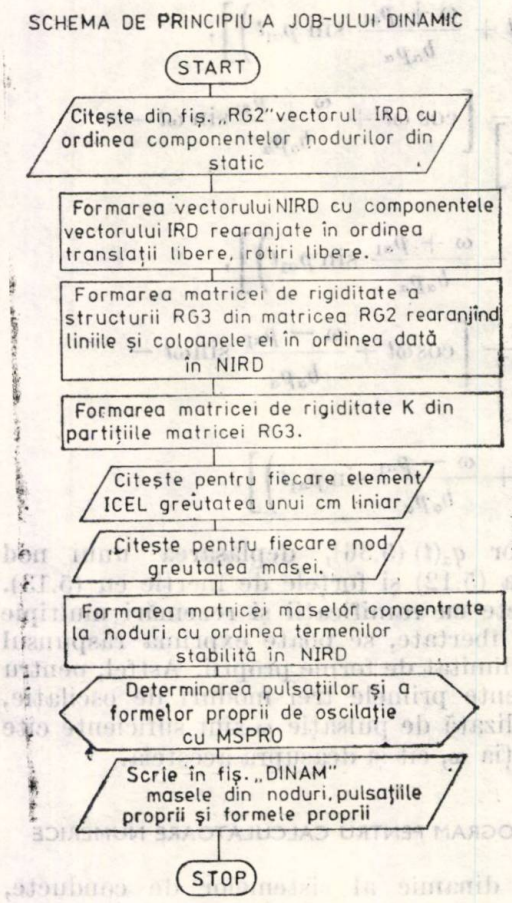


Fig. 2

Job-ul VIBR determină răspunsul dinamic al structurii în cazul acțiunii unor forțe perturbatoare periodice în fază, avînd aceeași pulsație și variind după legea $\cos\omega t$ sau $\sin\omega t$, pe baza vectorilor proprii normalizați, calculați în job-ul DINAM.

În cadrul acestui job se introduc ca date de intrare : factorul de amortizare pentru prima formă proprie de oscilație b_1, stabilit pe baza decrementului logaritmic al amortizării determinat în mod experimental prin înregistrarea oscilogramei și separarea primei forme proprii de oscilații, pe conducta reală sau model ; pulsația forțelor per-

turbatoare ω și componentele maxime ale forțelor perturbatoare după axele sistemului general adoptat pentru structură [1].

Se calculează amplitudinile dinamice ale nodurilor structurii și forțele de inerție maxime (§ 5.2), care sînt afișate.

Forțele de inerție maxime sumate cu forțele perturbatoare maxime și respectiv minime se introduc ca termeni liberi ai sistemului ecuațiilor de condiție în fișierul „RG2" și apelîndu-se în continuare job-ul STATIC se rezolvă sistemul ecuațiilor de condiție și se calculează eforturile secționale la capetele fiecărui element. Evident, la determinarea eforturilor totale se vor suprapune aceste eforturi cu cele produse de sarcinile permanente, determinate în etapa de calcul static [1].

Job-ul SUP determină răspunsul dinamic al structurii în cazul excitațiilor de suporți, cu variații periodice, în fază, după legea $\cos\omega t$ sau $\sin\omega t$, pe baza vectorilor proprii normalizați din fișerul „DINAM".

Se introduc ca date de intrare în cadrul acestui job : factorul de amortizare b_1, pulsația excitațiilor suporților ω, componentele maxime ale excitațiilor după axele de coordonate ale sistemului general adoptat pentru structură ; limitele și pasul de variație a lui ωt.

Pentru fiecare valoare discretă a lui ωt (deci a lui t) se obține cîte un set de rezultate pentru deplasările dinamice ale nodurilor și ale forțelor de inerție. Acestea sînt afișate. Introducînd fiecare set de valori ale forțelor de inerție ca termen liber al sistemului ecuațiilor de condiție pentru calculul static, în fișierul RG2, prin rularea job-ului STATIC se determină cîte un set pentru eforturi care se sumează cu eforturile din sarcinile permanente.

Se poate pune problema ca pentru fiecare secțiune să se aleagă automat valoarea maximă a fiecărui efort, considerînd toate seturile de valori. În mod deosebit interesează valorile maxime ale momentelor încovoietoare și de torsiune.

Descrierea detaliată a acestor job-uri precum și a machetelor de date este dată în [3].

7. APLICAREA PROGRAMULUI CSDC PENTRU UN SISTEM DE CONDUCTE

Se consideră sistemul de conducte în figura 3, avînd o largă aplicabilitate în rafinării, pentru care s-a prezentat calculul static în [1]. Topologia structurii, caracteristicile geometrice și mecanice fiind date în [1], se precizează aici numai datele ce intervin în plus la calculul dinamic.

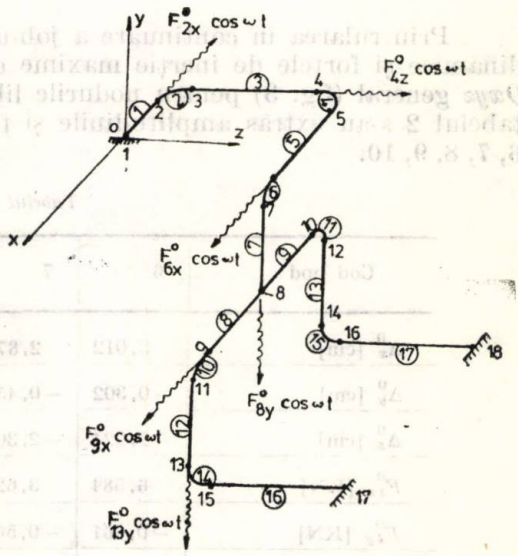


Fig. 3

Se introduce în job-ul DINAMIC pentru fiecare element drept sau cot greutatea unui cm liniar, provenită din greutatea proprie a ţevii, greutatea izolaţiei şi greutatea fluidului vehiculat, $G = 0{,}1625 \cdot 10^{-1}$ KN/cm.

Prin rularea job-urilor ELEM, NOD REG, RG2 şi DINAMIC se obţin 45 de pulsaţii proprii şi 45 de vectori proprii normalizaţi, sistemul avînd 45 de grade de libertate dinamică.

În tabelul 1 se dau primele zece pulsaţii proprii în [rad/s].

Tabelul 1

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
37,20	43,35	53,05	98,68	102,22	153,85	170,90	192,21	196,61	216,16

Pentru calculul la vibraţii forţate s-au considerat forţele perturbatoare reprezentate în figura 3, pentru care se precizează:

$$F^0_{2x} = F^0_{4z} = F^0_{6x} = F^0_{8y} = F^0_{9x} = F^0_{13y} = 15 \text{ KN};$$

$$\omega = 30 \text{ rad/s};$$

$b_1 = 0{,}029$, rezultat pentru un decrement logaritmic al amortizării pentru prima formă proprie de oscilaţie

$$\gamma = \ln \frac{\Delta^{\text{I}}_1}{\Delta^{\text{II}}_1} = \ln 1{,}2.$$

Prin rularea în continuare a job-ului VIBR se obţin amplitudinile dinamice şi forţele de inerţie maxime după cele trei axe ale sistemului *Oxyz* general (fig. 3) pentru nodurile libere ale structurii 2, 3 ... 16. În tabelul 2 s-au extras amplitudinile şi forţele de inerţie pentru nodurile 6, 7, 8, 9, 10.

Tabelul 2

Cod nod	6	7	8	9	10
Δ^0_x [cm]	3,012	2,875	2,665	2,664	2,664
Δ^0_y [cm]	−0,302	−0,451	−0,451	−0,591	−0,309
Δ^0_z [cm]	−2,224	−2,309	−1,648	−2,135	−1,134
F^0_{ix} [KN]	6,584	3,620	6,217	3,355	3,355
F^0_{iy} [KN]	−0,661	−0,568	−1,053	−0,745	−0,389
F^0_{iz} [KN]	−4,861	−2,907	−3,845	−2,690	−1,428

Eforturile secționale datorită forțelor de inerție maxime sumate cu forțele perturbatoare maxime, respectiv minime, se obțin prin rularea în continuare a job-ului STATIC. În tabelul 3 sînt extrase eforturile la capetele cîtorva elemente, în sistemul general de axe.

Tabelul 3

Cod element	Capete element	Q_x [KN]	Q_y [KN]	Q_z [KN]	M_x [KN cm]	M_y [KN cm]	M_z [KN cm]
1	1	1,184	1,678	— 13,417	442,416	—5043,290	707,398
	2	— 1,184	0,016	13,417	— 442,416	3643,930	— 794,070
2	2	—13,801	0,849	— 13,355	442,426	—3643,940	808,800
	3	13,801	— 0,849	13,354	— 481,256	2402,890	— 847,629
6	6	19,753	2,135	— 2,380	779,785	1388,000	42,985
	7	—19,760	— 0,979	2,380	— 671,052	—1279,310	938,207
7	7	23,831	2,640	— 5,290	671,000	1279,340	— 964,906
	8	—23,831	— 0,945	5,290	— 119,516	—1279,350	3450,060
17	16	36,551	27,070	—777,044	—4444,560	911,070	—7081,630
	18	—36,551	—24,157	777,043	— 147,950	5642,610	7081,630

Primită la redacție la 24 septembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. N. POSEA, AL. ANGHEL, C. KROMEK, *Calculul static al sistemelor de conducte*, St. cerc. mec. apl., *6* (1980).
2. N. POSEA, C. KROMEK, E. TOCACI, AL. POPA, *Cercetări teoretice și elaborarea algoritmilor pentru calculul la vibrații al sistemelor de conducte cu ramificații*, Lucrare de contract de cercetare nr. 10/1977, etapa 1978.
3. N. POSEA, AL. ANGHEL, C. KROMEK, E. TOCACI, DOINA TUDOR, *Cercetări teoretice și elaborarea algoritmilor pentru calculul la vibrații al sistemelor de conducte cu ramificații*, Lucrare de contract de cercetare nr. 10/1977, etapa 1979.
4. AL. GHEORGHIU, *Concepții moderne în calculul structurilor*, Edit. tehnică, București, 1975.
5. N. POSEA, *Curs de vibrații mecanice*, Litografia I. P. G. Ploiești, 1980.
6. CH. MASSONNET, *Calculul structurilor la calculatoarele electronice*, Edit. tehnică, București.
7. KLAUS-JÜRGEN BATHE, EDWARD L. WILSON, FRED E. PETERSON, *A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems*, Berkeley, California 1973.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, McGraw-Hill Publishing, C. L., England, 1971.
9. * * * *Petroleum rafinery piping*, American national standard, Published by engineers, 1973.

O METODĂ APROXIMATIVĂ DE DETERMINARE A FRECVENȚELOR VIBRAȚIILOR PROPRII LA CADRELE DIN BARE CU PEREȚI SUBȚIRI DE SECȚIUNE DESCHISĂ

de GH. MIHĂIȚĂ
Universitatea din Craiova

Se prezintă o metodă simplificată de calcul a frecvențelor vibrațiilor proprii la cadrele din bare cu pereți subțiri de secțiune deschisă, metodă bazată pe descompunerea funcțiilor deplasărilor secțiunilor în procesul de vibrație după formele încovoierii și răsucirii barelor cadrelor în sistemul de bază al metodei deformațiilor, sub acțiunea deplasărilor unitare pe direcția legăturilor suplimentare.

În construcțiile industriale și de mașini moderne, structurile de rezistență sub formă de sisteme de bare cu pereți subțiri sînt folosite pe scară tot mai largă. În rîndul acestora, un loc însemnat revine cadrelor din bare drepte cu pereți subțiri de secțiune deschisă.

De cele mai multe ori, cadrele din bare drepte cu pereți subțiri sînt supuse sarcinilor variind periodic în timp. Cunoașterea frecvențelor vibrațiilor proprii ale cadrelor prezintă în această situație o importanță deosebită.

Literatura existentă în legătură cu sistemele de bare cu pereți subțiri, tratează numai problema calculului static, inclusiv stabilitatea statică a cadrelor din bare cu pereți subțiri [10] și nu se referă deloc la calculul dinamic al acestora.

Calculul frecvențelor proprii este o problemă destul de complicată, chiar și pentru o singură bară cu pereți subțiri. În cazul cadrelor acest calcul devine deosebit de anevoios mai ales cînd se urmează metoda clasică cunoscută în dinamica sistemelor de bare. Conform cu această metodă ar urma să se scrie ecuațiile vibrațiilor libere pentru fiecare bară a cadrului, iar condițiile la limită ale tuturor barelor ar furniza un sistem algebric liniar a cărui condiție de compatibilitate ar fi chiar ecuația de determinare a frecvențelor vibrațiilor libere sau proprii.

Această metodă de obținere a frecvențelor proprii are avantajul de a fi exactă, dar calculele sînt atît de laborioase încît se preferă în locul ei metode aproximative simplificate.

În lucrarea prezentă se expune o metodă simplificată de determinare a frecvențelor vibrațiilor proprii la cadre din bare cu pereți subțiri, metodă bazată pe descompunerea funcțiilor deplasărilor și răsucirii sec-

țiunii în procesul de vibrație după formele încovoierii și răsucirii barelor cadrelor în sistemul de bază al metodei deplasărilor sub acțiunea deplasărilor unitare.

1. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE VIBRAȚIILOR PROPRII

Se consideră un cadru din bare cu pereți subțiri de secțiuni deschise oarecare, cu caracteristici geometrice și elastice cunoscute (fig. 1).

Fiecare bară a cadrului se raportează la un sistem de axe triortogonal cu axa z orientată după axa barei, iar axele x și y în planul secțiunii transversale după direcțiile principale de inerție (fig. 2).

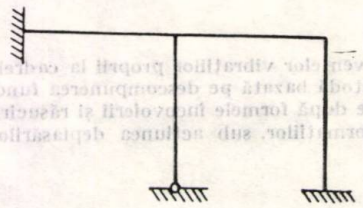


Fig. 1

În procesul vibrațiilor libere, o secțiune transversală a unei bare oarecare se va deplasa în direcția axelor principale de inerție x și y cu cantitățile u și respectiv v și se va roti în jurul centrului de răsucire cu unghiul φ, iar centrul de răsucire se va deplasa în lungul axei barei cu cantitatea w.

Se arată că [7] energia cinetică pentru o bară a cadrului poate fi scrisă sub forma

$$E_c = \frac{1}{2} m \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - 2x_0 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2y_0 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + r_y^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \right)^2 + r_x^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} \right)^2 + r_0^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + r_\omega^4 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \right)^2 \right] dz, \quad (1)$$

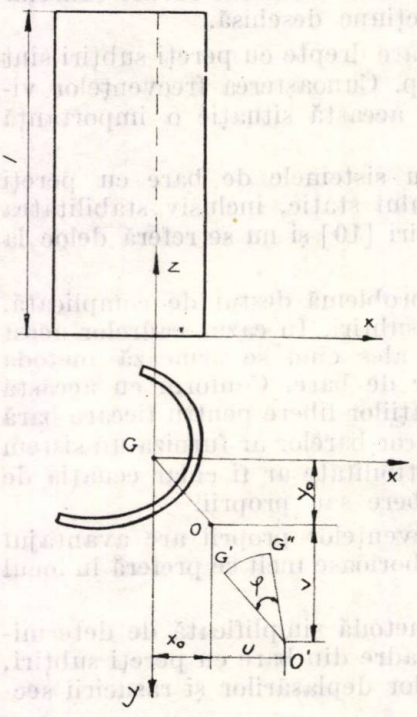


Fig. 2

în care m este masa pe unitatea de lungime a barei, x_0 și y_0 sînt coordonatele centrului de încovoiere-răsucire, iar r_x, r_y, r_0 și r_ω au următoarele semnificații,

$$r_x^2 = \frac{I_x}{A};$$

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A};$$

$$r_0^2 = \frac{1}{A} [I_x + I_y + (x_0^2 + y_0^2) A];$$

$$r_\omega^4 = \frac{I_\omega}{A}.$$

Energia potențială de deformație pentru o bară cu pereți subțiri se poate pune sub forma

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^l \left[EA\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + EI_x\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2 + EI_y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + EI_\omega\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)^2 + GI_t\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] dz, \tag{2}$$

EA, EI_x, EI_y, EI_ω, GI_t, fiind rigiditățile barei la întindere-încovoiere în planele principale de inerție, deplanare și răsucire.

Pentru întregul cadru, energiile cinetică și potențială se obțin însumînd expresiile (1) și (2) pentru fiecare bară,

$$E_c = \frac{1}{2}\int m\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - 2x_0\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2y_0\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + r_y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}\right)^2 + r_x^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}\right)^2 + r_0^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + r_\omega^4\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t}\right)^2 \right] dz,$$

$$E_p = \frac{1}{2}\int \left[EA\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + EI_x\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2 + EI_y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2 + \right. \tag{3}$$

$$\left. + EI_\omega\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)^2 + GI_t\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] dz.$$

Integralele din expresiile (3) se extind asupra tuturor barelor cadrului.

Descompunînd funcțiile necunoscute ale deplasărilor și răsucirii $u(z, t)$, $v(z, t)$, $w(z, t)$, $\varphi(z, t)$ în serii de funcții după cîte un sistem fundamental complet de funcții $Z_k^u(z)$, $Z_k^v(z)$, $Z_k^w(z)$, $Z_k^\varphi(z)$, care să satisfacă condițiile la limită pentru deplasări :

$$u(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^u(t)\, Z_k^u(z),$$

$$v(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^v(t)\, Z_k^v(z),$$

$$w(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^w(t)\, Z_k^w(z), \tag{4}$$

$$\varphi(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^\varphi(t)\, Z_k^\varphi(z),$$

și scriind ecuațiile Lagrange pentru mișcarea vibratorie a cadrului :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(E_c - E_p) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

considerînd drept coordonate generalizate q_i, funcțiile necunoscute de timp T_i^u, T_i^v, T_i^w, T_i^φ, se obține următorul sistem de ecuații diferențiale :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{uu} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^u}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{u\varphi} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{uu} T_k^u = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,\\
&\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{vv} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^v}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{v\varphi} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{vv} T_k^v = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,\\
&\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{w} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^w}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{w} T_k^w = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,\\
&\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi\varphi} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi u} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^u}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi v} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^v}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{\varphi\varphi} T_k^\varphi = 0 \quad i = 1,2,3,\ldots.
\end{aligned} \tag{5}$$

Coeficienții a_{ik} și b_{ik} conținuți în ecuațiile diferențiale (5) au următoarele semnificații :

$$a_{ik}^{uu} = \int m\, Z_i^u(z)\, Z_k^u(z)\, \mathrm{d}z + \int m\, r_y^2 \frac{\mathrm{d}Z_i^u(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{vv} = \int m\, Z_i^v(z)\, Z_k^v(z)\, \mathrm{d}z + \int m r_x^2 \frac{\mathrm{d}Z_i^v(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^v(z)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{ww} = \int m\, Z_i^w(z)\, Z_k^w(z)\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{\varphi\varphi} = \int m\, r_0^2\, Z_i^\varphi(z)\, Z_k^\varphi(z)\, \mathrm{d}z + \int m r_\omega^4 \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{u\varphi} = \int m y_0\, Z_i^u(z)\, Z_k^\varphi(z)\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{\varphi u} = \int m y_0\, Z_i^\varphi(z)\, Z_k^u(z)\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{v\varphi} = -\int m\, x_0\, Z_i^v(z)\, Z_k^\varphi(z)\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{\varphi\varphi} = -\int m x_0 \, Z_i^{\varphi}(z) \, Z_k^{\varphi}(z) \, dz,$$

$$b_{ik}^{uu} = \int EI_y \frac{d^2 Z_i^{u}(z)}{dz^2} \frac{d^2 Z_k^{u}(z)}{dz^2} dz,$$

$$b_{ik}^{vv} = \int EI_x \frac{d^2 Z_i^{v}(z)}{dz^2} \frac{d^2 Z_k^{v}(z)}{dz^2} dz,$$

$$b_{ik}^{w} = \int EA \frac{dZ_i^{w}(z)}{dz} \frac{dZ_k^{w}(z)}{dz} dz,$$

$$= \frac{d^2 Z_i^{\varphi}(z)}{dz^2} \frac{d^2 Z_k^{\varphi}(z)}{dz^2} dz + \int GI_t \frac{dZ_i^{\varphi}(z)}{dz} \frac{dZ_k^{\varphi}(z)}{dz} dz.$$

Lăsînd la o parte ecuațiile diferențiale din rîndul al treilea al sistemului (5) cu funcțiile T_k^{w} drept necunoscute, exprimînd vibrațiile libere de întindere compresie ale barelor cadrului, restul ecuațiilor se scriu matriceal sub forma,

$$A \frac{d^2 T}{dt^2} + BT = 0, \tag{6}$$

în care T este un hipervector cu o infinitate de componente,

$$T = \begin{Vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix},$$

fiecare componentă la rîndul său fiind un vector cu trei componente,

$$T_k = \begin{Vmatrix} T_k^{u}(t) \\ T_k^{v}(t) \\ T_k^{\varphi}(t) \end{Vmatrix},$$

iar A și B hipermatrice infinite ale căror elemente sînt matrice pătrate de ordinul trei și respectiv matrice diagonale de ordinul trei,

$$A_{ik} = \begin{Vmatrix} a_{ik}^{uu} & 0 & a_{ik}^{u\varphi} \\ 0 & a_{ik}^{vv} & a_{ik}^{v\varphi} \\ a_{ik}^{\varphi u} & a_{ik}^{\varphi v} & a_{ik}^{\varphi\varphi} \end{Vmatrix}, \quad B_{ik} = \begin{Vmatrix} b_{ik}^{uu} & 0 & 0 \\ 0 & b_{ik}^{vv} & 0 \\ 0 & 0 & b_{ik}^{\varphi\varphi} \end{Vmatrix}.$$

Ecuațiile (6) reprezintă ecuațiile vibrațiilor libere ale cadrului din bare cu pereți subțiri de secțiuni deschise.

2. ECUAȚIA APROXIMATIVĂ A PULSAȚIILOR VIBRAȚIILOR PROPRII

În cazul vibrațiilor libere, toate componentele hipervectorului T al ecuației matriceale (6), variază armonic, încît trebuie să se scrie,

$$T = T_0 \sin (pt + \psi),$$

unde T_0 este un hipervector constant, p este pulsația vibrațiilor proprii, iar ψ un unghi de fază.

Ecuațiile (6) furnizează în acest caz, ca o condiție de compatibilitate a sistemului algebric liniar și omogen ce se obține cu componentele hipervectorului T drept necunoscute, următoarea ecuație algebrică de determinare a pulsațiilor :

$$|R| = 0, \tag{7}$$

R fiind o hipermatrice pătrată infinită ale cărei elemente sînt matricele pătrate de ordinul trei,

$$R_{ik} = \begin{Vmatrix} r_{ik}^{uu} & 0 & r_{ik}^{u\varphi} \\ 0 & r_{ik}^{vv} & r_{ik}^{v\varphi} \\ r_{ik}^{\varphi u} & r_{ik}^{\varphi v} & r_{ik}^{\varphi\varphi} \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

avînd la rîndul lor ca elemente,

$$r_{ik}^{uu} = b_{ik}^{uu} - p^2 a_{ik}^{uu}\,; \quad r_{ik}^{u\varphi} = -p^2 a_{ik}^{u\varphi}\,; \quad r_{ik}^{\varphi u} = -p^2 a_{ik}^{\varphi u}\,; \quad r_{ik}^{vv} = b_{ik}^{vv} - p^2 a_{ik}^{vv},$$

$$r_{ik}^{v\varphi} = -p^2 a_{ik}^{v\varphi}\,; \quad r_{ik}^{\varphi v} = -p^2 a_{ik}^{\varphi v}\,; \quad r_{ik}^{\varphi\varphi} = b_{ik}^{\varphi\varphi} - p^2 a_{ik}^{\varphi\varphi}\,; \tag{9}$$

În toate situațiile practice de calcul, descompunerile (4) trebuie limitate la primii n termeni ai seriilor infinite. În acest caz A și B vor fi hipermatrice pătrate de ordinul n, iar ecuația (7) va fi ecuația aproximativă a pulsațiilor vibrațiilor libere de încovoiere-răsucire ale cadrului.

Adoptarea funcțiilor Z_k^u, Z_k^v, Z_k^φ, sub forma funcțiilor vibrațiilor libere sau a funcțiilor pierderii statice a stabilității ca în cazul barei simple, ridică în cazul cadrelor serioase probleme de calcul. Aceasta pe de o parte datorită dificultăților de determinare a funcțiilor vibrațiilor libere și funcțiilor de pierdere a stabilității statice pentru barele diferitelor cadre, iar pe de altă parte datorită calculelor laborioase la care conduc funcțiile respective odată adoptate.

Calculele se simplifică considerabil dacă se adoptă ca funcții de bază ale descompunerilor (4) funcțiile încovoierii-răsucirii barelor cadrului în sistemul de bază al metodei deformațiilor sub acțiunea deplasărilor unitare.

Dacă n este numărul de necunoscute ale cadrului în calculul după metoda deformațiilor, respectiv gradul de nedeterminare cinematică, drept primele n funcții ale descompunerilor (4) se vor lua formele încovoierii-răsucirii statice a barelor cadrului sub acțiunea deplasărilor unitare corespunzătoare, aplicate pe rînd în sistemul de bază al metodei deformațiilor.

Elementele matricelor A_{ik} și B_{ik} capătă în acest caz o interpretare statică deosebit de simplă care permite calculul lor cu destulă ușurință.

Ținînd seama că se poate scrie,

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z_i^u(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{M_{y,i}(z)}{EI_y}; \quad \frac{\mathrm{d}^2 Z_i^v(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{M_{x,i}(z)}{EI_x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{B_{\omega,i}(z)}{EI_\omega}; \quad \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{M_{t,i}(z)}{GI_t},$$

unde $M_{y,i}$, $M_{x,i}$, $B_{\omega,i}$, $M_{t,i}$, sînt, respectiv, momentele încovoietoare în planele principale de inerție, bimomentul de încovoiere-răsucire și momentul de răsucire produse de deplasarea unitară i acționînd în sistemul de bază, coeficienții b_{ik}^{uu}, b_{ik}^{vv} și $b_{ik}^{\varphi\varphi}$ devin

$$b_{ik}^{uu} = \int \frac{M_{y,i}(z)\, M_{y,k}(z)}{EI_y}\, dz; \quad b_{ik}^{vv} = \int \frac{M_{x,i}(z)\, M_{x,k}(z)}{EI_x}\, \mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{\varphi\varphi} = \int \frac{B_{\omega,i}(z)\, B_{\omega,k}(z)}{EI_\omega}\, \mathrm{d}z + \int \frac{M_{t,i}(z)\, M_{t,k}(z)}{GI_t}\, \mathrm{d}z.$$

În acest fel devine evident faptul că, coeficienții b_{ik}^{uu}, b_{ik}^{vv}, $b_{ik}^{\varphi\varphi}$, reprezintă reacțiuni unitare sau coeficienți de influență în metoda deformațiilor. Astfel,

— b_{ik}^{uu} reprezintă suma reacțiunilor pe direcția legăturilor suplimentare i provocate de încovoierea barelor cadrului în planul xz sub acțiunea deplasării unitare k acționînd în sistemul de bază;

— b_{ik}^{vv} reprezintă suma reacțiunilor pe direcția legăturilor suplimentare i provocate de încovoierea barelor cadrului în planul yz sub acțiunea deplasării unitare k acționînd în sistemul de bază;

— $b_{ik}^{\varphi\varphi}$ reprezintă suma reacțiunilor pe direcția legăturilor suplimentare i provocate de răsucirea barelor cadru sub acțiunea deplasării unitare k acționînd în sistemul de bază.

Totodată, pe baza teoremei reciprocității lucrului mecanic rezultă

$$Z_i^u(z) = -R_i^u(z); \quad Z_i^v(z) = -R_i^v(z); \quad Z_i^\varphi(z) = -R_i^\varphi(z),$$

$$\frac{\mathrm{d}Z_i^u(z)}{\mathrm{d}z} = -R_i^{*u}(z); \quad \frac{\mathrm{d}Z_i^v(z)}{\mathrm{d}z} = -R_i^{*v}(z); \quad \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} = -R_i^{*\varphi}(z),$$

unde

— $R_i^u(z)$, $R_i^v(z)$, $R_i^\varphi(z)$ sînt reacțiuni pe direcția legăturilor suplimentare i datorită încovoierii barelor în planele xz și yz și, respectiv, răsu-

cirii lor provocate de o forță unitară aplicată pe axa centrelor de răsucire, perpendicular, în punctul de coordonată z în direcțiile x și y și, respectiv, de un moment de răsucire unitar aplicat în punctul de coordonată z.

— $R_i^{*u}(z)$, $R_i^{*v}(z)$, $R_i^{*\varphi}(z)$ sînt reacțiuni pe direcția legăturilor suplimentare i datorită încovoierii barelor în planele xz și yz și, respectiv, răsucirii lor, provocate de un moment concentrat unitar aplicat în punctul de coordonată z pe axa centrelor de răsucire în plane paralele cu planele principale de inerție și, respectiv, de un bimoment de încovoiere-răsucire unitar aplicat barei în secțiunea de abscisă z.

Pe această bază se poate scrie,

$$a_{ik}^{uu} = -\int m\, R_i^u(z)\, Z_k^u(z)\, dz - \int m\, r_y^2\, R_i^{*u}(z) \frac{dZ_k^u(z)}{dz}\, dz,$$

$$a_{ik}^{vv} = -\int m\, R_i^v(z)\, Z_k^v(z)\, dz - \int m\, r_x^2\, R_i^{*v}(z) \frac{dZ_k^v(z)}{dz}\, dz,$$

$$a_{ik}^{\varphi\varphi} = -\int m\, r_0^2\, R_i^\varphi(z)\, Z_k^\varphi(z)\, dz - \int m\, r_\omega^4\, R_i^{*\varphi}(z) \frac{dZ_k^\varphi(z)}{dz}\, dz,$$

$$a_{ik}^{u\varphi} = -\int m\, y_0\, R_i^u(z)\, Z_k^\varphi(z)\, dz; \quad a_{ik}^{\varphi u} = -\int m\, y_0\, R_i^\varphi(z)\, Z_k^u(z)\, dz,$$

$$a_{ik}^{v\varphi} = \int m\, x_0\, R_i^v(z)\, Z_k^\varphi(z)\, dz; \quad a_{ik}^{\varphi v} = \int m\, x_0\, R_i^\varphi(z)\, Z_k^v(z)\, dz,$$

iar termenii,

$$a_{ik}^{uu} \frac{d^2 T_k^u}{dt^2}; \quad a_{ik}^{vv} \frac{d^2 T_k^v}{dt^2}; \quad a_{ik}^{\varphi\varphi} \frac{d^2 T_k^\varphi}{dt^2}; \quad a_{ik}^{u\varphi} \frac{d^2 T_k^\varphi}{dt^2},$$

$$a_{ik}^{\varphi u} \frac{d^2 T_k^u}{dt^2}; \quad a_{ik}^{v\varphi} \frac{d^2 T_k^\varphi}{dt^2}; \quad a_{ik}^{\varphi v} \frac{d^2 T_k^v}{dt^2},$$

conținuți de ecuația pulsațiilor capătă interpretarea de reacțiuni pe direcția legăturilor suplimentare i provocate de forțele de inerție excitate de acțiunea deplasării unitare k în sistemul de bază.

S-a pus în evidență în acest mod faptul că, descompunînd funcțiile deplasărilor în procesul de vibrație după funcțiile încovoierii-răsucirii barelor cadrului în sistemul de bază al metodei deformațiilor sub acțiunea deplasărilor unitare, termenii primi ai elementelor după diagonalele principale ale matricelor R_{ik} reprezintă reacțiuni unitare sau coeficienți de influență în metoda deformațiilor în sensul obișnuit al staticii construcțiilor, iar restul termenilor reprezintă influența forțelor de inerție. Elementele matricelor R_{ik} se vor numi din acest motiv reacțiuni dinamice, iar matricele R_{ik}, elemente ale hipermatricei R, se vor numi matricele reacțiunilor dinamice.

Pe baza celor prezentate pînă acum, rezultă că ecuația pulsațiilor vibrațiilor proprii se obține plecînd de la sistemul de bază al cadrului în metoda deformațiilor cu ajutorul căruia se calculează reacțiunile dinamice în același mod cum se calculează coeficienții de influență în metoda deformațiilor. Pentru aceasta este nevoie să se cunoască, pentru cele două tipuri de bare ce intervin în sistemul de bază al metodei deformațiilor — bara dublu încastrată și bara încastrată la un capăt și articulată la un altul — reacțiunile dinamice produse de deplasări unitare pe direcția legăturilor din reazeme.

Pentru calculul reacțiunilor dinamice ale barei cu pereți subțiri de secțiune deschisă dublu încastrată și încastrată la un capăt și articulată la un altul, se determină mai întîi funcțiile $Z_i^u(z)$, $Z_i^\varphi(z)$ și $Z_i^\varphi(z)$, ale deplasărilor pentru fiecare tip de bară sub acțiunea unei anumite deplasări unitare pe direcția legăturilor din reazeme. Se determină apoi coeficienții b_{ik} și c_{ik} integrînd conform cu formulele respective, iar apoi cu ajutorul lor se calculează reacțiunile dinamice.

Așa, spre exemplu, în cazul barei dublu încastrată, pentru determinarea momentului de răsucire dinamic în reazem, produs de deplasarea unitară a reazemului respectiv în direcția principală de inerție x, trebuie efectuată o integrare în felul următor,

$$M_z = -mp^2 y_0 \int_0^l Z^\varphi(z)\, Z^u(z)\, dz,$$

$Z^\varphi(z)$ și $Z^u(z)$ reprezentînd funcțiile răsucirii și deplasării pentru bara dublu încastrată provocată de rotirea unitară a reazemului în jurul axei barei și respectiv de deplasarea unitară a acestuia în direcția x, avînd expresiile [7]:

$$Z^\varphi(z) = \frac{1}{2\mathrm{ch}kl - kl\,\mathrm{sh}kl - 2}\,[\mathrm{ch}kl - kl\,\mathrm{sh}kl - 1 + \mathrm{sh}kl \cdot kz - \mathrm{sh}kl\,\mathrm{sh}kz + (\mathrm{ch}kl - 1)\,\mathrm{ch}kz],$$

$$Z^u(z) = 1 - 3\frac{z^2}{l^2} + 2\frac{z^3}{l^3}.$$

Planșele I și II din lucrarea [7] prezintă sistematizat reacțiunile dinamice pentru bara dublu încastrată și bara încastrată la un capăt și articulată la un altul, calculate după procedeul de mai sus, iar planșele III și IV conțin reacțiunile dinamice ale celor două tipuri de bare pentru cazul rigidității la răsucire nulă.

3. EXEMPLU DE CALCUL

Ca aplicație se va pune în continuare problema determinării pulsațiilor vibrațiilor libere ale cadrului din figura 3, format din două bare cu pereți subțiri de secțiuni deschise identice, legate între ele rigid în nodul C

și articulate în reazemele A și B, dispuse astfel încît planul principal de inerție xz să fie comun.

Cadrul are, în metoda deformațiilor, un grad de nedeterminare egal cu cinci cît totalizează cele trei rotiri ale nodului C (1, 2, 3) împreună cu deplasarea 4 și deplanarea sa 5.

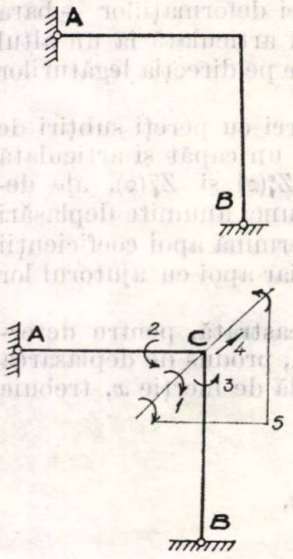


Fig. 3

Dînd nodului C, în sistemul de bază al cadrului, deplasări unitare pe direcția fiecărei legături suplimentare rezultă următoarele reacțiuni dinamice :

$$r_{11}^{uu} = 2\left[\frac{3EI_y}{l} - \frac{mp^2l}{5}\left(\frac{2}{21}l^2 + r_y^2\right)\right],$$

$$r_{21}^{\varphi u} = r_{12}^{u\varphi} = r_{31}^{\varphi u} = r_{13}^{u\varphi} = -\frac{mp^2l^2y_0}{15k^4l^4(\mathrm{th}kl - kl)} \times$$

$$\times [15(k^2l^2+3)\,\mathrm{th}kl - kl(k^4l^4+45)],$$

$$r_{51}^{\varphi u} = r_{15}^{u\varphi} = -2\frac{mp^2l^3y_0}{15k^4l^4(\mathrm{th}kl - kl)} \times$$

$$\times [(45 - 15k^2l^2 - k^4l^4)\,\mathrm{th}kl - 45kl],$$

$$r_{22}^{\varphi\varphi} = r_{33}^{\varphi\varphi} = \frac{EI_\omega}{l^3}\frac{k^2l^2}{kl - \mathrm{th}kl} -$$

$$-\frac{mp^2}{4(\mathrm{sh}kl - kl\mathrm{ch}kl)^2}\left\{\frac{r_0^2l}{3kl}[2kl(k^2l^2-6)\,\mathrm{ch}2kl + \right.$$

$$\left. + 15\mathrm{sh}2kl + 2k^3l^3 - 180kl] - \frac{r_\omega^4}{l}\,kl\,(2kl\mathrm{ch}2kl - 3\mathrm{sh}2kl + 4kl)\right\},$$

$$r_{22}^{vv} = r_{33}^{vv} = \frac{3EI_x}{l} - \frac{mp^2l}{5}\left(\frac{2}{21}l^2 + r_x^2\right),$$

$$r_{32}^{v\varphi} = r_{32}^{\varphi v} = r_{23}^{v\varphi} = r_{23}^{\varphi v} = \frac{mp^2l^2x_0}{15k^4l^4(\mathrm{th}kl - kl)}[15(k^2l^2+3)\,\mathrm{th}kl - kl(k^4l^4+45)],$$

$$r_{42}^{v\varphi} = r_{42}^{\varphi v} = r_{43}^{v\varphi} = r_{34}^{\varphi v} = \frac{mp^2lx_0}{5k^4l^4(\mathrm{th}kl - kl)}[15\mathrm{th}kl - kl(15 - 5k^2l^2 + 2k^4l^4)],$$

$$r_{42}^{vv} = r_{24}^{vv} = r_{43}^{vv} = r_{34}^{vv} = \frac{3EI_x}{l^2} - \frac{mp^2}{5}\left(\frac{3}{7}l^2 + r_x^2\right),$$

$$r_{52}^{\varphi\varphi} = r_{25}^{\varphi\varphi} = r_{35}^{\varphi\varphi} = r_{53}^{\varphi\varphi} = \frac{EI_\omega}{l^2}\frac{k^2l^2\mathrm{th}kl}{kl - \mathrm{th}kl} -$$

$$-\frac{mp^2}{4(\mathrm{sh}kl - kl\mathrm{ch}kl)}\left\{\frac{r_0^2l^2}{3k^2l^2}[6(k^2l^2+1)\,\mathrm{ch}2kl + kl(2k^3l^3+3)\,\mathrm{sh}2kl - 6] + \right.$$

$$\left. + r_\omega^4(kl\mathrm{sh}2kl - 2\mathrm{ch}2kl + k^2l^2 + 2)\right\},$$

$$r_{52}^{\varphi v} = r_{25}^{v\varphi} = r_{53}^{\varphi v} = r_{35}^{v\varphi} = \frac{mp^2l^3x_0}{15k^4l^4\,(\mathrm{th}kl - kl)}\,[(45 - 15k^2l^2 - k^4l^4)\,\mathrm{th}kl - 45kl],$$

$$r_{44}^{vv} = 2\left[\frac{3EI_x}{l^3} - \frac{mp^2}{5}\left(\frac{17}{7}\,l + 6\,\frac{r_x^2}{l}\right)\right],$$

$$r_{54}^{\varphi v} = r_{45}^{v\varphi} = 2\,\frac{mp^2l^2x_0}{5k^4l^4\,(\mathrm{th}kl - kl)}\,[(15 - 2k^4l^4)\,\mathrm{th}kl + 5kl\,(k^2l^2 - 3)],$$

$$r_{55}^{\varphi\varphi} = 2\,\frac{EI_\omega}{l}\,\frac{k^2l^2\mathrm{th}kl}{kl - \mathrm{th}kl} - \frac{mp^2l}{2\,(\mathrm{sh}kl - kl\mathrm{ch}kl)^2}\left\{\frac{r_0l^2}{3k^2l^2}\,[2\,(k^2l^2 + 6)\,\mathrm{ch}2kl - \right.$$

$$\left. - 9\,kl\mathrm{sh}2kl - 8k^2l^2 - 12] + r_\omega^4\,(kl\mathrm{sh}2kl - 2\mathrm{ch}2kl + 2k^2l^2 + 2)\right\}.$$

Ca acestea, determinantul hipermatricei R, din care se elimină liniile și coloanele nule, formează ecuația pulsațiilor sub forma următoare :

$$\begin{vmatrix}
r_1^{uu} & 0 & r_{12}^{u\varphi} & 0 & r_{13}^{u\varphi} & 0 & r_{15}^{u\varphi} \\
0 & r_{22}^{vv} & 0 & 0 & r_{23}^{v\varphi} & r_{24}^{vv} & r_{25}^{v\varphi} \\
r_{21}^{\varphi u} & 0 & r_{22}^{\varphi\varphi} & r_{23}^{\varphi v} & 0 & r_{24}^{\varphi v} & r_{25}^{\varphi\varphi} \\
0 & 0 & r_{32}^{v\varphi} & r_{33}^{vv} & 0 & r_{34}^{vv} & r_{35}^{v\varphi} \\
r_{31}^{\varphi u} & r_{32}^{\varphi v} & 0 & 0 & r_{33}^{\varphi\varphi} & r_{34}^{\varphi v} & r_{35}^{\varphi\varphi} \\
0 & r_{42}^{vv} & r_{42}^{v\varphi} & r_{43}^{vv} & r_{43}^{v\varphi} & r_{44}^{vv} & r_{45}^{v\varphi} \\
r_{51}^{\varphi u} & r_{52}^{\varphi v} & r_{52}^{\varphi\varphi} & r_{53}^{\varphi v} & r_{55}^{\varphi\varphi} & r_{54}^{\varphi v} & r_{55}^{\varphi\varphi}
\end{vmatrix} = 0.$$

Ecuația obținută, algebrică de gradul șapte în p^2, determină cu aproximație primele șapte valori ale pulsațiilor vibrațiilor libere ale cadrului.

Dacă barele au un plan de simetrie, ecuația pulsațiilor se simplifică. Astfel, în cazul în care planul de inerție principal comun este și plan de simetrie, pentru fiecare bară coordonata y_0 a centrelor de încovoiere-răsucire este nulă și în consecință,

$$r_{21}^{\varphi u} = r_{12}^{u\varphi} = r_{31}^{\varphi u} = r_{13}^{u\varphi} = r_{51}^{\varphi u} = r_{15}^{u\varphi} = 0,$$

iar ecuația pulsațiilor devine,

$$\begin{vmatrix}
r_{11}^{uu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & r_{22}^{vv} & 0 & 0 & r_{23}^{v\varphi} & r_{24}^{vv} & r_{25}^{v\varphi} \\
0 & 0 & r_{22}^{\varphi\varphi} & r_{23}^{\varphi v} & 0 & r_{24}^{\varphi v} & r_{25}^{\varphi\varphi} \\
0 & 0 & r_{32}^{v\varphi} & r_{33}^{vv} & 0 & r_{34}^{vv} & r_{35}^{v\varphi} \\
0 & r_{32}^{\varphi v} & 0 & 0 & r_{33}^{\varphi\varphi} & r_{34}^{\varphi v} & r_{35}^{\varphi\varphi} \\
0 & r_{42}^{vv} & r_{42}^{v\varphi} & r_{43}^{vv} & r_{43}^{v\varphi} & r_{44}^{vv} & r_{45}^{v\varphi} \\
0 & r_{52}^{\varphi v} & r_{52}^{\varphi\varphi} & r_{53}^{\varphi v} & r_{53}^{\varphi\varphi} & r_{54}^{\varphi v} & r_{55}^{\varphi\varphi}
\end{vmatrix} = 0.$$

Se obțin de aici două ecuații separate sub formele,

$r_{11}^{uu} = 0,$

$$\begin{vmatrix} r_{22}^{vv} & 0 & 0 & r_{23}^{v\varphi} & r_{24}^{vv} & r_{25}^{v\varphi} \\ 0 & r_{22}^{\varphi\varphi} & r_{23}^{\varphi v} & 0 & r_{24}^{\varphi v} & r_{25}^{\varphi\varphi} \\ 0 & r_{32}^{u\varphi} & r_{33}^{vv} & 0 & r_{34}^{vv} & r_{35}^{v\varphi} \\ r_{32}^{\varphi v} & 0 & 0 & r_{33}^{\varphi\varphi} & r_{34}^{\varphi v} & r_{35}^{\varphi\varphi} \\ r_{42}^{vv} & r_{42}^{v\varphi} & r_{43}^{vv} & r_{43}^{v\varphi} & r_{44}^{vv} & r_{45}^{v\varphi} \\ r_{52}^{\varphi v} & r_{52}^{\varphi\varphi} & r_{53}^{\varphi v} & r_{53}^{\varphi\varphi} & r_{54}^{\varphi v} & r_{55}^{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = 0.$$

Prima ecuație furnizează pulsația aproximativă a vibrațiilor de încovoiere în planul de simetrie al cadrului,

$$p = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{315\,EI_y}{m\,(2l^2 - 21r_x^2)}},$$

iar a doua ecuație va furniza șase valori aproximative ale pulsațiilor vibrațiilor cuplate de încovoiere în plan perpendicular și răsucire simultană.

În cazul în care barele cadrului au două plane de simetrie, $x_0 = y_0 = 0$, și ecuația pulsațiilor devine :

$$\begin{vmatrix} r_{11}^{uu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22}^{vv} & 0 & 0 & 0 & r_{24}^{vv} & 0 \\ 0 & 0 & r_{22}^{\varphi\varphi} & 0 & 0 & 0 & r_{25}^{\varphi\varphi} \\ 0 & 0 & 0 & r_{33}^{vv} & 0 & r_{34}^{vv} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{33}^{\varphi\varphi} & 0 & r_{35}^{\varphi\varphi} \\ 0 & r_{42}^{vv} & 0 & r_{43}^{vv} & 0 & r_{44}^{vv} & 0 \\ 0 & 0 & r_{52}^{\varphi\varphi} & 0 & r_{53}^{\varphi\varphi} & 0 & r_{55}^{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = 0.$$

Vibrațiile libere ale cadrului de acest fel sînt de încovoiere în planul de simetrie cu pulsația dată de ecuația

$$r_{11}^{uu} = 0$$

și de încovoiere în direcția perpendiculară și răsucire cu pulsații date de ecuația,

$$\begin{vmatrix} r_{22}^{vv} & 0 & 0 & 0 & r_{24}^{vv} & 0 \\ 0 & r_{22}^{\varphi\varphi} & 0 & 0 & 0 & r_{25}^{\varphi\varphi} \\ 0 & 0 & r_{33}^{vv} & 0 & r_{34}^{vv} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{33}^{\varphi\varphi} & 0 & r_{35}^{\varphi\varphi} \\ r_{42}^{vv} & 0 & r_{43}^{vv} & 0 & r_{44}^{vv} & 0 \\ 0 & r_{52}^{\varphi\varphi} & 0 & r_{53}^{\varphi\varphi} & 0 & r_{55}^{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = 0.$$

Se constată, după cea de-a doua ecuație, că bara care se încovoaie în plan perpendicular în procesul de vibrație nu se răsucește, iar bara care se răsucește nu se încovoaie.

În cazul cadrului din bare identice având două plane de simetrie și fără rigiditate la răsucire, elementele determinantului din ecuația pulsațiilor vor fi :

$$r_{11}^{uu} = 2\left[\frac{3EI_y}{l} - \frac{mp^2l}{5}\left(\frac{2}{21}l^2 + r_y^2\right)\right],$$

$$r_{22}^{\varphi\varphi} = r_{33}^{\varphi\varphi} = \frac{3EI_\omega}{l^3} - \frac{mp^2}{5}\left(\frac{17}{7}l\,r_0^2 + 6\frac{r_\omega^4}{l}\right),$$

$$r_{22}^{vv} = r_{33}^{vv} = \frac{3EI_x}{l} - \frac{mp^2l}{5}\left(\frac{2}{21}l^2 + r_x^2\right),$$

$$r_{24}^{v\varphi} = r_{42}^{v\varphi} = r_{34}^{v\varphi} = r_{43}^{v\varphi} = \frac{3EI_x}{l^2} - \frac{mp^2}{5}\left(\frac{3}{7}l^2 + r_x^2\right),$$

$$r_{25}^{\varphi\varphi} = r_{52}^{\varphi\varphi} = r_{35}^{\varphi\varphi} = r_{53}^{\varphi\varphi} = \frac{3EI_\omega}{l^2} - \frac{mp^2}{5}(l^2r_0^2 + r_\omega^4),$$

$$r_{44}^{vv} = 2\left[\frac{3EI_x}{l^3} - \frac{mp^2}{5}\left(\frac{17}{7}l + 6\frac{r_x^2}{l}\right)\right],$$

$$r_{55}^{\varphi\varphi} = 2\left[\frac{3EI_\omega}{l} - \frac{mp^2l}{5}\left(\frac{2}{21}l^2r_0^2 + r_\omega^4\right)\right].$$

Se obțin în acest caz următoarele ecuații algebrice independente pentru determinarea pulsațiilor vibrațiilor libere :

$$\frac{3EI_y}{l} - \frac{mp^2l}{5}\left(\frac{2}{21}l^2 + r_y^2\right) = 0,$$

$$\frac{3EI_x}{l} - \frac{mp^2l}{5}\left(\frac{2}{21}l^2 + r_x^2\right) = 0,$$

$$\frac{3EI_\omega}{l^3} - \frac{mp^2}{5}\left(\frac{17}{7}l\,r_0^2 + 6\frac{r_\omega^4}{l}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ml^2}{5}\right)^2 (l^4 + 45l^2r_x^2 + 105\,r_x^4)\,(l^4r_0^4 + 45\,l^2r_0^2r_\omega^4 + 105\,r_\omega^8)\,p^6 -$$

$$- 105\,\frac{ml^2}{5}\,[EI_x\,(l^4r_0^4 + 45l^2r_0^2r_\omega^4 + 105\,r_\omega^8)\,(l^2 + 3r_x^2) +$$

$$+ EI_\omega\,(l^4 + 45l^2r_x^2 + 105r_x^4)\,(l^2r_0^2 + 3r_\omega^4)]\,p^2 + 105\,EI_x\,EI_\omega\,(l^2 +$$

$$+ 3r_x^2)\,(l^2r_0^2 + 3r_\omega^4) - 27\,(EI_\omega)^2\,(2l^2 + 21r_x^2)\,(17l^2 + 42r_x^2) = 0.$$

Cadrul va executa deci vibrații libere de încovoiere simultană a ambelor bare în plan vertical, de încovoiere simultană a ambelor bare în plane perpendiculare pe planul de simetrie al cadrului, cu deplasarea nodului, de răsucire simultană a ambelor bare și de răsucire a unei bare și încovoiere a celeilalte, cu pulsațiile :

$$p_1 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{315EI_y}{m\,(2l^2 + 21r_y^2)}},$$

$$p_2 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{315EI_x}{m(2l^2 + 21r_x^2)}},$$

$$p_3 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{105EI_\omega}{m\,(17l^2 r_0^2 + 6r_\omega^4)}},$$

$$p_4 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{525}{m}}\left\{\frac{EI_x\,(l^2 + 3r_x^2)}{l^4 + 45l^2r_x^2 + 105r_x^4} + \frac{EI_\omega\,(l^2r_0^2 + 3r_\omega^4)}{l^4r_0^2 + 45l^2r_0^2r_\omega^4 + r_\omega^8} + \right.$$

$$+ \left[\frac{EI_x\,(l^2 + 3r_x^2)}{l^4 + 45\,l^2r_x^2 + 105r_x^4} + \frac{EI_\omega(l^2r_0^2 + 3r_\omega^4)}{l^4r_0^4 + 45\,l^2r_0^2r_\omega^4 + r_\omega^8}\right]^2 -$$

$$\left. - 4\,\frac{105^2EI_xEI_\omega(l^2+3r_x^2)(l^2r_0^2+3r_\omega^4) - 27(EI_\omega)^2(2l^2+21r_x^2)(17l^2+42r_x^2)}{105^2\,(l^4 + 45l^2r_x^2 + 105r_x^4)\,(l^4r_0^4 + 45\,l^2r_0^2r_\omega^4 + 105r_\omega^8)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

S-au determinat în acest mod primele patru pulsații ale vibrațiilor libere pentru cadrul din bare cu pereți subțiri considerat în situația particulară arătată mai înainte.

Primită la redacție la 24 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. BOLOTIN, *Pribli jenii metod rasciota ram na colebanii*, Trudî MAI, vîp 17 (Mehanica), Gosenergoizdat, 1955.
2. V. V. BOLOTIN, *Dinamicescaia usloicivosti uprughih sistem*, Moskva, Gostehizdat, 1956.
3. A. DARKOV, V. KOUZNÉTSOV, *Cours de mécanique des constructions*, Editions MIR Moscou, 1968.
4. P. MAZILU, *Statica construcțiilor*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
5. GH. MIHĂIȚĂ, *Stabilitatea dinamică spațială a barelor cu pereți subțiri de secțiuni deschise solicitate prin forțe axiale periodice urmăritoare*, St. cerc. mec. apl., *3*, (1974).
6. GH. MIHĂIȚĂ, *Stabilitatea dinamică spațială a cadrelor din bare cu pereți subțiri de secțiuni deschise, solicitate prin forțe axiale periodice urmăritoare*, St. cerc. mec. apl., *1* (1980).
7. GH. MIHĂIȚĂ, *Contribuții la stabilitatea dinamică a barelor și sistemelor de bare cu pereți subțiri*, Teza de doctorat, Universitatea din Brașov, 1975.
8. A. PETRE, M. ATANASIU, *Bare cu pereți subțiri*, Edit. tehnică, București, 1960.
9. A. PETRE, *Teoria aeroelasticității*, Edit. Academiei, București, 1967.
10. I. V. URBAN, *Teoria rasciota sterjnevih toncostenih construcții*, Transteldorizdat, Moskva, 1955.

APLICAȚII ALE PROGRAMĂRII MATEMATICE LA CALCULUL GRINZILOR PE MEDIU ELASTIC PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE

de F. ROMAN, P. ALEXA

Institutul politehnic Cluj-Napoca

Lucrarea se înscrie în problematica foarte actuală a modernizării și automatizării metodelor de calcul al structurilor. Folosind metoda elementelor finite, se deduc relațiile vectoriale care exprimă echilibrul și compatibilitatea grinzilor continue pe mediu elastic. Pentru determinarea necunoscutelor se utilizează tehnica programării matematice, obținîndu-se un program pătratic, a cărui soluție optimă constituie deplasările generalizate ale nodurilor. În partea finală se prezintă și un exemplu de calcul.

În ultimele decenii ale secolului nostru, în atenția cercetătorilor s-au impus numeroase probleme de optimizare, a căror rezolvare reclamă un aparat matematic foarte dezvoltat. Primele probleme de acest fel au apărut în industrie, în planificarea economiei etc., dar în ultimii ani ele s-au extins și în știință.

O categorie foarte importantă din punct de vedere aplicativ, a problemelor de acest tip, este cea a problemelor de programare matematică.

O problemă de programare matematică se formulează astfel: să se determine valorile variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, astfel ca ele să satisfacă un număr dat de condiții de forma:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\geqslant, =, \leqslant\}0, \tag{1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

și care să minimizeze (maximizeze) funcția

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Relațiile (1) se numesc restricții, iar funcția z se numește funcție-obiectiv sau de eficiență.

Dacă atît restricțiile, cît și funcția obiectiv sînt relații liniare, problema este de programare liniară; dacă restricțiile sau funcția obiectiv, sau amîndouă sînt forme neliniare, problema este de programare neliniară.

Lucrarea de bază, și prima, în domeniul programării neliniare este cea a lui H. W. Kuhn și A. W. Tucker [1], în care autorii stabilesc condițiile necesare și suficiente pentru existența soluției optime $\hat{\mathbf{x}}$, a programului definit de relațiile (1) și (2). Teorema lui Kuhn și Tucker spune că vectorul $\hat{\mathbf{x}}$ este o soluție optimă a programului (1) și (2) dacă și numai dacă există un vector $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ astfel ca

$$\frac{\partial F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \{\geqslant, =, \leqslant\} \mathbf{0}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0, \qquad \hat{\boldsymbol{\lambda}} \geqslant \mathbf{0},$$

unde $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ este lagrangeanul funcției $f(\mathbf{x})$ și are forma

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Vectorul $\boldsymbol{\lambda}$ este multiplicatorul lui Lagrange.

Invers, soluția sistemului (3) este și soluția optimă a programului (1) și (2) cu condiția ca funcțiile $f(\mathbf{x})$ și $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ să fie convexe [2], [4].

Dacă restricțiile (1) sînt liniare, iar funcția obiectiv este de forma $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{Q}^T\mathbf{x}$, unde $\mathbf{k}$ este o matrice pătrată, simetrică, pozitiv semidefinită, iar $\mathbf{Q}$ un vector, problema este de programare pătratică și se înscrie ca un caz particular al programării neliniare. Dacă restricțiile (1) sînt liniare și reprezintă egalități, condițiile (3) se reduc la [4]:

$$\frac{\partial F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Dacă problema de programare pătratică este de forma

$$\text{Min } f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{k}\,\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{E}\mathbf{y} - \mathbf{Q}^T\mathbf{y}, \tag{6}$$

$$\text{supusă la } -\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} = 0,$$

unde **E** este o matrice simetrică pozitiv semi-definită, iar **y** un al doilea tip de variabile [2], [4], condiţiile (3) devin :

$$\frac{\partial F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}.$$

În cele ce urmează se arată cum calculul unei structuri prin metoda elementelor finite, conduce la o problemă de programare neliniară.

II. METODA ELEMENTELOR FINITE ÎN CALCULUL GRINZILOR PE MEDIU ELASTIC

Metoda elementelor finite operează pe un număr finit de mărimi care se tratează matriceal. De aceea este necesar ca structura să fie discretizată într-un număr finit de elemente, numite elemente finite. Acestea se leagă între ele într-un număr finit de puncte, numite noduri.

Interacţiunile dintre elementele finite se introduc sub formă de forţe şi deplasări generalizate la noduri.

În general, nodurile structurii sînt punctele în care se produc discontinuităţi ale eforturilor sau ale caracteristicilor fizice, mecanice sau geometrice ale elementelor structurii, sau orice alt punct în care se doreşte să se determine necunoscutele.

Etapa următoare discretizării structurii în elemente finite este determinarea relaţiilor între forţele generalizate şi deplasările generalizate. Pentru aceasta se precizează gradele de libertate ale unui nod.

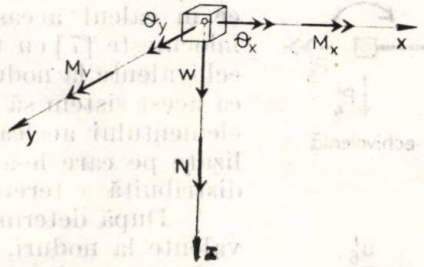


Fig. 1

La o grindă pe mediu elastic, un nod al ei poate suferi trei deplasări generalizate : o deplasare după axa *Oz*, o rotire în jurul axei *Ox* şi altă rotire în jurul axei *Oy* (fig. 1). Se alege sensul pozitiv al acestor deplasări, ce de pe figura 1.

Se consideră că sarcinile exterioare acționează în noduri și pot fi: o forță concentrată N și momente concentrate M_x și M_y. Se consideră sensul lor pozitiv cel de pe figura 1. Se notează cu $\mathbf{q}$ vectorul deplasărilor generalizate și cu $\mathbf{Q}$ cel al sarcinilor exterioare. Deci

$$\mathbf{q}^T = [w\,\theta_x\,\theta_y],$$

$$\mathbf{Q}^T = [N\,M_x\,M_y].$$

Blocînd toate deplasările nodurilor, se obține sistemul de bază din metoda deplasărilor. Urmînd procedura tipică metodei elementelor finite, studiul echilibrului și compatibilității unei structuri încărcată numai în noduri conduce [5], [6] la următoarele relații:

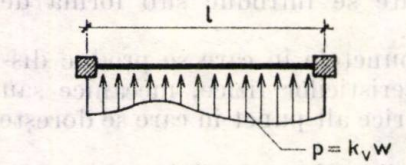
$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T\mathbf{X}, \tag{8}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{k}\,\mathbf{x}, \tag{9}$$

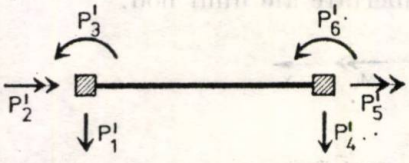
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{q}, \tag{10}$$

unde

$\mathbf{X}$ reprezintă vectorul eforturilor independente de la capetele elementului finit;



Starea reală de solicitare



Starea de solicitare echivalentă

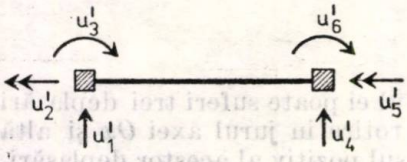


Fig. 2

$\mathbf{x}$ — vectorul deformațiilor de la capetele elementului finit, corespunzătoare vectorului $\mathbf{X}$;

$\mathbf{A}^T$ — matricea nodală statică;

$\mathbf{k}$ — matricea de rigiditate neasamblată a structurii.

Grinzile continue de fundare sînt elemente încărcate și între noduri cu reacțiunea terenului. Pentru a introduce în calcul această reacțiune, ea se înlocuiește [7] cu un sistem de sarcini echivalente la noduri (fig. 2), în așa fel ca acest sistem să producă în nodurile elementului aceleași deplasări generalizate pe care le-ar produce reacțiunea distribuită a terenului.

După determinarea sarcinilor echivalente la noduri, ele sînt considerate ca forțe exterioare și se suprapun peste acestea.

Se notează vectorul sarcinilor echivalente la noduri în sistemul local de axe cu $\mathbf{P}'$ și se alege pentru el sensul pozitiv din figura 2.

Deci

$$\mathbf{P}'^{T} = [P'_1 P'_2 P'_3 P'_4 P'_5 P'_6].$$

Pentru determinarea componentelor vectorului $\mathbf{P}'$, se consideră modelul Winkler de interacţiune grindă-teren, caz în care reacţiunea terenului pe suprafaţa de contact a grinizi se exprimă cu relaţia

$$p(x) = k_v w(x) \tag{11}$$

pentru grinda solicitată la încovoiere, şi cu relaţia

$$t(x) = k_\varphi \varphi(x) \tag{12}$$

pentru grinda solicitată la torsiune, unde

k_v — coeficientul de rigiditate al terenului la deplasare, în F/L^3;
k_φ — idem, la rotire de torsiune;
$\varphi(x)$ — unghiul de rotire la torsiune în secţiunea x;
$w(x)$ — săgeata grinzii în secţiunea x.

Considerînd grinda pe mediu elastic solicitată numai la încovoiere şi încărcată numai la extremităţi cu sarcini concentrate, ecuaţia diferenţială a ei [8] este următoarea:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\alpha^4 w = 0, \tag{13}$$

unde

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_v b}{4EI}};$$

b — lăţimea suprafeţei de contact a grinzii;
EI — rigiditatea grinzii la încovoiere.

Soluţia ecuaţiei (13) este următoarea:

$$\begin{aligned} w(x) = {} & C_1 \mathrm{ch}\alpha x \cos\alpha x + C_2 \mathrm{sh}\alpha x \cos\alpha x + \\ & C_3 \mathrm{ch}\alpha x \sin\alpha x + C_4 \mathrm{sh}\alpha x \sin\alpha x. \end{aligned} \tag{14}$$

Pentru determinarea constantelor de integrare din expresia (14), se introduce vectorul deplasărilor nodale la nivelul elementului în sistemul local de axe, notat cu $\mathbf{u}'$ (fig. 2) şi se pun următoarele condiţii de capăt:

$$\begin{aligned} &\text{la } x = 0, \quad w = u'_1 \text{ şi } \frac{dw}{dx} = u'_3, \\ &\text{la } x = l, \quad w = u'_4 \text{ şi } \frac{dw}{dx} = u'_6. \end{aligned} \tag{15}$$

Odată determinate constantele de integrare, se calculează reacţiunile grinzii dublu încastrată, pe mediu elastic [7], componentele P'_1, P'_3, P'_4 şi P'_6 fiind egale cu aceste reacţiuni cu semn schimbat.

Considerînd acum aceeaşi grindă solicitată la torsiune [9], ecuaţia diferenţială este

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \alpha_t^2 \varphi = 0, \tag{16}$$

unde

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{b^3 k\varphi}{12GI_t}},$$

GI_t reprezintă rigiditatea grinzii la torsiune.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (16) este

$$\varphi_{(x)} = C_1 \operatorname{ch}\alpha_t x + C_2 \operatorname{sh}\alpha_t x. \tag{17}$$

Constantele de integrare se determină din condiţiile

$$\text{la } x = 0, \quad \varphi = u'_2,$$

$$\text{la } x = l, \quad \varphi = u'_5. \tag{18}$$

Cunoscînd constantele de integrare, se calculează reacţiunile grinzii dublu încastrată, pe mediu elastic solicitată la torsiune, care sînt, cu semn schimbat, componentele P'_2 şi P'_5 ale vectorului $\mathbf{P}'$.

Calculul reacţiunilor din cele două extremităţi încastrate a condus la următoarele expresii :

$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \\ P'_5 \\ P'_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{k_v b}{\alpha} F_1 & 0 & -\frac{k_v b}{2\alpha^2} F_2 & -\frac{k_v b}{\alpha} F_3 & 0 & -\frac{k_v b}{2\alpha^2} F_4 \\ 0 & \frac{k_\varphi b^3}{12\alpha_t} F_{10} & 0 & 0 & -\frac{k_\varphi b^3}{12\alpha_t} F_{11} & 0 \\ -\frac{k_v b}{2\alpha^2} F_2 & 0 & \frac{k_v b}{2\alpha^3} F_5 & \frac{k_v b}{2\alpha^2} F_4 & 0 & -\frac{k_v b}{2\alpha^3} F_6 \\ -\frac{k_v b}{\alpha} F_3 & 0 & \frac{k_v b}{2\alpha^2} F_4 & \frac{k_v b}{\alpha} F_1 & 0 & \frac{k_v b}{2\alpha^2} F_2 \\ 0 & -\frac{k_\varphi b^3}{12\alpha_t} F_{11} & 0 & 0 & \frac{k_\varphi b^3}{12\alpha_t} F_{10} & 0 \\ -\frac{k_v b}{2\alpha^2} F_4 & 0 & -\frac{k_v b}{2\alpha^3} F_6 & \frac{k_v b}{2\alpha^2} F_2 & 0 & \frac{k_v b}{2\alpha^3} F_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{bmatrix} \tag{19}$$

sau

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{k}_i'\mathbf{u}', \tag{20}$$

unde

$$F_1 = \frac{\operatorname{sh}\alpha l \operatorname{ch}\alpha l + \sin\alpha l\cos\alpha l}{\operatorname{sh}^2\alpha l - \sin^2\alpha l} - \frac{3}{\alpha^3 l^3},$$

$$F_2 = \frac{\operatorname{sh}^2\alpha l + \sin^2\alpha l}{\operatorname{sh}^2\alpha l - \sin^2\alpha l} - \frac{3}{\alpha^2 l^2},$$

$$F_3 = \frac{\operatorname{ch}\alpha l\sin\alpha l + \operatorname{sh}\alpha l\cos\alpha l}{\operatorname{sh}^2\alpha l - \sin^2\alpha l} - \frac{3}{\alpha^3 l^3},$$

$$F_4 = \frac{2\operatorname{sh}\alpha l\sin\alpha l}{\operatorname{sh}^2\alpha l - \sin^2\alpha l} - \frac{3}{\alpha^2 l^2},$$

$$F_5 = \frac{\operatorname{sh}\alpha l\operatorname{ch}\alpha l - \sin\alpha l\cos\alpha l}{\operatorname{sh}^2\alpha l - \sin^2\alpha l} - \frac{2}{\alpha l},$$

$$F_6 = \frac{\operatorname{sh}\alpha l\cos\alpha l - \operatorname{ch}\alpha l\sin\alpha l}{\operatorname{sh}^2\alpha l - \sin^2\alpha l} + \frac{1}{\alpha l},$$

$$F_{10} = \frac{\operatorname{ch}\alpha_t l}{\operatorname{sh}\alpha_t l} - \frac{1}{\alpha_t l},$$

$$F_{11} = \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_t l} - \frac{1}{\alpha_t l}.$$

Deoarece grinzile continue de fundare prezintă în general la capete console, s-a determinat vectorul $\mathbf{P}'$, în mod analog, și pentru bara pe mediu elastic încastrată numai la o extremitate și s-a obținut:

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = -\left[\begin{array}{c|c|c} \frac{k_v b}{2\alpha} F_7 & 0 & \frac{k_v b}{2\alpha^2} F_8 \\ \hline 0 & \frac{k_\varphi b^3}{12\alpha_t} F_{12} & 0 \\ \hline \frac{k_v b}{2\alpha^2} F_8 & 0 & \frac{k_v b}{2\alpha^3} F_9 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} \tag{21}$$

sau

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{k}_i'\mathbf{u}', \tag{20}$$

unde

$$F_7 = 2\frac{\mathrm{sh}\alpha l\mathrm{ch}\alpha l + \sin\alpha l\cos\alpha l}{\mathrm{ch}^2\alpha l + \cos^2\alpha l},$$

$$F_8 = \frac{\mathrm{sh}^2\alpha l + \sin^2\alpha l}{\mathrm{ch}^2\alpha l + \cos^2\alpha l},$$

$$F_9 = \frac{\mathrm{sh}\alpha l\mathrm{ch}\alpha l - \sin\alpha l\cos\alpha l}{\mathrm{ch}^2\alpha l + \cos^2\alpha l},$$

$$F_{12} = \frac{\mathrm{sh}\alpha_t l}{\mathrm{ch}\alpha_t l}.$$

Scriind relaţia (20) pentru toate elementele finite ale structurii, se obţine

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{k}_t\mathbf{u}', \tag{22}$$

unde matricea $\mathbf{k}_t$ se obţine scriind pe diagonală matricile $\mathbf{k}_t'$ ale tuturor elementelor, într-o ordine ce se alege.

La nivelul structurii şi în sistemul global de axe relaţia (22) devine :

$$\mathbf{P} = -\mathbf{B}^T\mathbf{k}_t\mathbf{B}\mathbf{q}. \tag{23}$$

Suprapunînd vectorul **P** peste vectorul **Q** relaţia (8) devine :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{B}^T\mathbf{k}_t\mathbf{B}\mathbf{q}. \tag{24}$$

Ţinînd seama de relaţiile (9) şi (10) se obţine

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T\mathbf{k}\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}^T\mathbf{k}_t\mathbf{B}\mathbf{q} \tag{25}$$

sau

$$\mathbf{Q} = (\mathscr{K} + \mathscr{K}_t)\mathbf{q}. \tag{26}$$

Notînd $\mathscr{K} + \mathscr{K}_t = \mathbf{R}_{st}$, relaţia (26) se scrie :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_{st}\mathbf{q}, \tag{27}$$

unde $\mathbf{A}^T$ şi $\mathbf{B}^T$ sînt matrice cunoscute ;

$\mathscr{K} = \mathbf{A}^T\,\mathbf{k}\mathbf{A}$ este matricea de rigiditate asamblată a structurii ;

$\mathscr{K}_t = \mathbf{B}^T\mathbf{k}_t\mathbf{B}$ este matricea de rigiditate asamblată a mediului elastic ;

$\mathbf{R}_{st}$ este matricea de rigiditate a ansamblului structură-teren.

Inversînd matricea de rigiditate $\mathbf{R}_{tt}$, se obţin deplasările generalizate $\mathbf{q}$, din care se pot apoi calcula eforturile în barele structurii. Aceasta este calea clasică de calcul al unei structuri prin metoda elementelor finite.

III CALCULUL GRINZILOR PE MEDIU ELASTIC FOLOSIND PROGRAMAREA PĂTRATICĂ

Se reiau relaţiile (24), (9) şi (10) sub forma :

$$\begin{aligned} -\mathbf{Q} + \mathscr{K}_t\mathbf{q} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} &= \mathbf{0}, \\ -\mathbf{X} + \mathbf{k}\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ -\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{q} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{28}$$

Se vede că aceste trei relaţii sînt identice cu relaţiile (7), dacă lagrangeanul F are expresia

$$F(\mathbf{x},\mathbf{q},\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{k}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathscr{K}_t\mathbf{q} - \mathbf{Q}^T\mathbf{q} + \mathbf{X}^T(-\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{q}). \tag{29}$$

În termenii programării matematice se spune [2] că relaţiile (28) reprezintă condiţiile de staţionaritate ale funcţiei (28). Cunoscînd lagrangeanul F, se deduc :

— funcţia obiectiv :

$$f(\mathbf{x},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{k}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathscr{K}_t\mathbf{q} - \mathbf{Q}^T\mathbf{q}, \tag{30}$$

— restricţia

$$\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{31}$$

— multiplicatorul lui Lagrange : $\mathbf{X}$.

Avînd în vedere că matricele de rigiditate $\mathbf{k}$ şi $\mathscr{K}_t$ sînt pozitiv (semi) definite pentru structuri în echilibru formele pătratice $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{k}\mathbf{x}$ şi $\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathscr{K}_t\mathbf{q}$ sînt funcţii convexe [4], şi prin urmare $f(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ este o funcţie convexă [2]. Această proprietate a funcţiei $f(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ face ca soluţia sistemului de ecuaţii (28) să fie soluţia optimă [4] a programului :

$$\text{Min } f(\mathbf{x},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{k}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathscr{K}_t\mathbf{q} - \mathbf{Q}^T\mathbf{q} \tag{32}$$

supusă la $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{q}$.

Programarea pe calculatorul electronic a problemei (32) conduce la determinarea soluțiilor optime $\mathbf{x}$ și $\mathbf{q}$, fără inversarea matricei de rigiditate a structurii, cum se procedează în rezolvarea clasică.

Cu $\mathbf{x}$ și $\mathbf{q}$ cunoscute, se determină eforturile $\mathbf{X}$ și $\mathbf{P}$ de la capetele elementelor.

IV. PROGRAME DUALE

Programul (32) se numește program primal, iar variabilele $\mathbf{x}$ și $\mathbf{q}$ se numesc variabile primale ; $\mathbf{X}$ este multiplicatorul lui Lagrange.

În programarea matematică se arată că unui program primal îi corespunde totdeauna un alt program numit dual [2], [4], care se poate scrie astfel :

$$\text{Max } F(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{X})$$

$$\text{supusă la } \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}. \tag{33}$$

Printr-o înlocuire convenabilă a restricțiilor în funcția obiectiv, programul dual (33) devine :

$$\text{Min } \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{k}^{-1}\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{k}_t\mathbf{q}$$

$$\text{supusă la } \mathbf{Q} = \mathbf{\mathscr{K}}_t\mathbf{q} + \mathbf{A}^T\mathbf{X}. \tag{34}$$

În programarea matematică se arată că cele două programe, primal și dual, au aceeași soluție optimă [2], [4]. Acest lucru poate aduce simplificări la calculul unei structuri.

Interpretarea variațională a celor două programe este următoarea :

Programul (32) :

Dintre toate deplasările cinematic admisibile, deplasările reale sînt cele care minimizează funcția obiectiv $f(\mathbf{x}, \mathbf{q})$. Se observă că aceasta reprezintă energia potențială totală a sistemului, regăsindu-se astfel principiul minimului energiei potențiale totale.

Programul (34) :

Dintre toate stările static admisibile, starea reală este cea căreia îi corespunde o energie de deformație minimă. Într-adevăr, funcția obiectiv $f(\mathbf{X}, \mathbf{q})$ reprezintă energia de deformație a ansamblului grindă-teren [10], iar restricțiile exprimă condițiile de echilibru.

V. EXEMPLU

Pentru aplicarea metodei descrisă anterior, s-a calculat grinda continuă de fundare din figura 3, preluată din lucrarea [11], unde a fost calculată printr-o metodă iterativă.

Caracteristicile de calcul ale grinzii și terenului sînt :

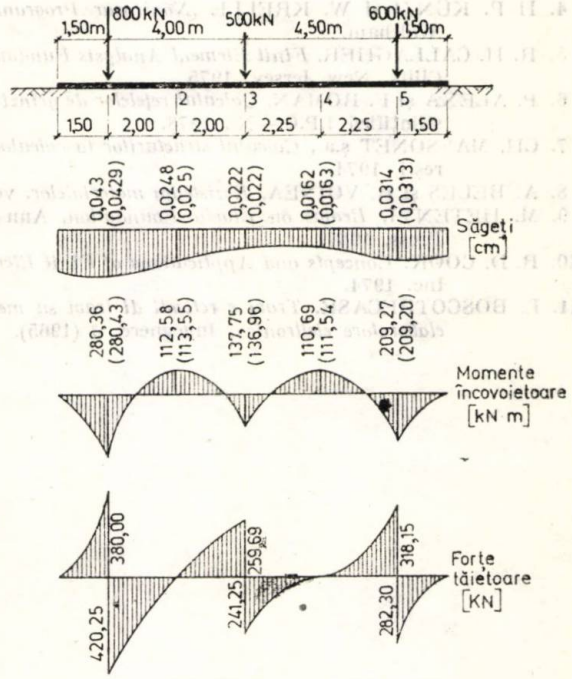
$b = 2{,}0$ m,

$K_r = 3 \cdot 10^5$ KN/m^3,

$EI = 16{,}524246 \cdot 10^5$ KN $\cdot$ m^2.

Pentru calcul s-a împărțit grinda în șase elemente finite.

Adaptarea unui program din literatură pe calculatorul Felix C 256 a făcut posibilă rezolvarea programului primal (32) pentru exemplul din figura 3, unde se dau și rezultatele obținute. Pentru comparație s-au trecut pe figură și rezultatele din [11].



Valorile din paranteză sînt cele obținute în lucrarea [11]

Fig. 3

V. CONCLUZII

Metoda de calcul expusă oferă rezultate aproape identice (fig. 3) cu cele obținute prin alte metode, în care efortul proiectantului este mult mai mare. Ea dă posibilitatea automatizării complete a calculelor. Are marele avantaj că nu necesită asamblarea și inversarea matricei de rigiditate, operații care solicită calculatorului timp și memorie. Funcția obiectiv, fiind un scalar, se scrie foarte ușor.

Funcțiile $F_i(\alpha l)$ care intervin în matricea de rigiditate a terenului se pot ușor programa la calculator, pentru o gamă cît mai largă a argumentului αl.

Aceste avantaje devin mai importante la structurile mari, cum sînt rețelele de grinzi pe mediu elastic, unde calculul prin metodele existente, deși numai aproximativ, este extrem de laborios și nu ține seama de torsiunea care apare în barele rețelei. Procedeul prezentat ia în considerare și solicitarea de torsiune, fără dificultăți de calcul prea însemnate.

Formularea în programare matematică oferă mari avantaje la calculul structurilor în domeniul elasto-plastic, unde o parte din restricții sînt inegalități. O astfel de analiză, pentru fundațiile pe rețele de grinzi, face parte din preocupările autorilor, rezultatele deja obținute fiind încurajatoare.

Primită la redacție la 18 iulie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. H. W. KUHN şi A. W. TUCKER, *Nonlinear Programming*, Proceedings Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1951.
2. G. HADLEY, *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley Publ. Comp., Inc., 1964.
3. GH. MIHOC, A. ŞTEFĂNESCU, *Programarea matematică*, E.D.P., Bucureşti, 1973.
4. H. P. KÜNZI şi W. KRELLE ,*Nonlinear Programming Blaisdell*, Publishing Company Waltham.
5. R. H. CALLAGHER, *Finit Element Analysis Fundamentals*, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
6. P. ALEXA şi F. ROMAN, *Calculul reţelelor de grinzi prin programare matematică*, sesiunea ştiinţifică I.P.C.—N., 1978.
7. CH. MASSONET ş.a., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1974.
8. A. BELEŞ şi R. VOINEA, *Rezistenţa materialelor*, vol. II, Edit. tehnică, Bucureşti, 1958.
9. M. HETENYI, *Beams on Elastic Foundation*, Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1967.
10. R. D. COOK, *Concepts and Applications of Finit Element Analysis*, John Wiley and Sons, Inc. 1974.
11. L. BOSCOTRECASE, *Travi e reticoli di travi su mezzo elastico risolte con l'ausilio di un elaboratore elettronico*, Ingegnere, *3* (1965).

STUDIU PRIVIND PULSAȚIILE PROPRII ȘI TRANSMISIBILITATEA VIBRAȚIILOR FUNCȚIE DE VARIAȚIA RIGIDITĂȚII ELEMENTELOR ANTIVIBRATILE DIN CAUCIUC LA COMPACTOARELE VIBRATOARE AUTOPROPULSATE

de POLIDOR BRATU
Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (I.N.C.E.R.C.)

În lucrare se tratează influența variației coeficientului de rigiditate echivalent al primei și celei de-a doua trepte elastice asupra pulsațiilor proprii și transmisibilității mișcării la vibrații forțate pentru mașinile de compactat prin vibrare. Variația coeficientului de rigiditate echivalent în cazul primei trepte elastice se realizează pe două căi și anume : prin variația unghiului de așezare α format de axa de compresiune a elementului antivibratil cu direcția verticală și prin modificarea mărcii cauciucului. Variația coeficientului de rigiditate echivalent al treptei a doua elastice se realizează numai prin schimbarea mărcii de cauciuc păstrînd forma constructivă și dimensională a elementelor antivibratile. Curbele de variație atît pentru pulsațiile proprii, cît și pentru transmisibilitatea mișcării sînt determinate pentru modelele funcționale și constructive ale compactoarelor vibratoare autopropulsate CVA 4—5 și CVA 10, în condițiile utilizării unor elemente antivibratile executate după o tehnologie omologată, caracteristicile cauciucului fiind ușor reproductibile.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Necesitățile producției din ramurile economiei naționale au făcut ca industria constructoare de mașini să realizeze noi mașini cu performanțe superioare și cu tehnicitate ridicată. În acest context se înscriu și mașinile cu acțiune vibrantă utilizate în cele mai diverse domenii. Acestea prezintă particularitatea că în structura lor anumite elemente produc vibrații, la organul de lucru, necesare procesului tehnologic, iar altele trebuie izolate contra vibrațiilor pentru a-și putea îndeplini misiunea funcțională în mod corespunzător. Prin urmare, în cadrul aceleași mașini se urmărește atingerea unui aspect dublu și anume acela al producerii și menținerii vibrațiilor de lucru necesare procesului tehnologic, precum și al izolării vibrațiilor transmise la subansamblele componente. În această categorie de mașini se află și compactoarele vibratoare autopropulsate ale căror vibrații de lucru generate la unul sau ambele rulouri conduc la compactarea dinamică a materialelor, în timp ce vibrațiile transmise șasiului trebuie să aibe valori mici astfel încît să se încadreze în limitele admisibile sau recomandate pentru echipamente mecanice.

Compactoarele vibratoare autopropulsate conțin în structura lor elemente antivibratile din cauciuc, care realizează legătura elastică între

diferitele subansamble, permiţînd generarea şi menţinerea vibraţiilor la organul de compactare şi în acelaşi timp avînd rolul de izolare şi amortizare a vibraţiilor nedorite la alte subansamble ale maşinii cum sînt : postul de comandă al mecanicului, grupul de acţionare motor-pompă hidraulică, instalaţii auxiliare etc.

În cadrul INCERC au fost realizate proiectele unor astfel de maşini în care se utilizează sisteme elastice şi de amortizare avînd în componenţa lor numai elemente antivibratile din cauciuc românesc, elaborat special în acest scop, după o tehnologie omologată. Ca o particularitate se subliniază prezenţa a două trepte elastice şi de amortizare în structura maşinii, în timp ce la modelele străine se utilizează numai o singură treaptă, de izolare şi amortizare. Acest mod de a concepe structura maşinii a condus la îmbunătăţirea parametrilor de izolare a vibraţiilor şi ai parametrilor de tracţiune.

Deoarece atît în etapa de proiectare, cît şi la exploatare este necesar a se cunoaşte legităţile care modifică zonele de rezonanţă şi efectul izolării în funcţie de modificarea caracteristicii rigidităţii elementelor din cauciuc, rezultă necesitatea studierii influenţei variaţiei rigidităţii asupra pulsaţiilor proprii şi asupra transmisibilităţii vibraţiilor în regim forţat (de lucru).

Pentru aceasta s-a avut în vedere utilizarea a patru reţete distincte de cauciuc, elaborate de ICPCMP Bucureşti, pe baza cărora s-au proiectat, executat şi experimentat la INCERC, mai multe tipuri constructive de elemente antivibratile. Astfel, în etapa de proiectare este posibilă alegerea soluţiei tehnice de rezemare, stabilirea tipului de cauciuc şi elementele geometrice ale elementului antivibratil, iar în etapa de exploatare se pot estima implicaţiile directe, de funcţionare şi izolare, ca urmare a modificării caracteristicii de rigiditate a sistemului. Caracteristica de rigiditate a sistemului se poate modifica din cauza îmbătrînirii cauciucului, variaţiilor de temperatură, fenomenului de oboseală la solicitări ciclice etc.

În prezentul articol se prezintă atît variaţia pulsaţiilor proprii, care influenţează regimul de funcţionare, cît şi variaţia coeficienţelor de transmisibilitate ca urmare a modificării coeficienţelor de rigiditate ai elementelor antivibratile din cauciuc, în cazul compactoarelor vibratoare autopropulsate de concepţie românească, tip CVA 4—5 şi CVA 10.

2. MODELUL DINAMIC

Deoarece ambele tipuri de maşini compactoare CVA 4—5 şi CVA 10 au aceeaşi structură, dinamică, deosebindu-se numai prin mărimea parametrilor masici şi de rigiditate, se va prezenta un model constructiv de compactoare (fig. 1) pe baza căruia să poată fi stabilită schema dinamică.

O astfel de maşină este compusă din următoarele elemente : *1* — ruloul vibrator, *2* — şasiul anterior, *3* — prima treaptă elastică de izolare şi amortizare a vibraţiilor, *4* — a doua treaptă elastică de izolare şi amortizare a vibraţiilor, *5* — şasiul posterior, *6* — ruloul posterior nevibrator destinat autodeplasării.

Avînd în vedere gradul ridicat de simetrie geometrică şi masică a maşinii faţă de planul longitudinal median, construcţia simetrică a şasiului

anterior față de axa ruloului vibrator și echivalența cît mai mare a caracteristicilor fizico-mecanice, a elementelor de cauciuc, mașina poate fi modelată în mod simplificat ca în figura 2. Cele două trepte de izolare și amortizare a vibrațiilor au fost modelate numai prin elemente elastice (HOOKE), deoarece valorile pulsațiilor proprii, în acest caz, sînt afectate într-o proporție mică, de maximum $\pm 5\%$, față de modelarea cu elemente vîscoelastice (VOIGT-KELVIN).

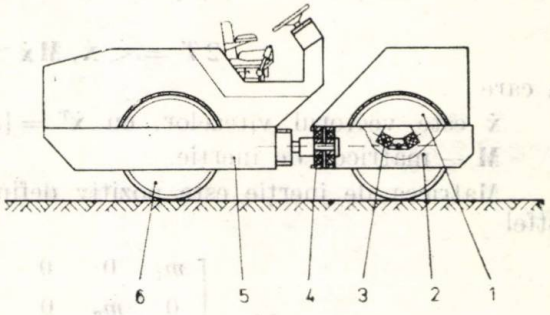


Fig. 1. — Schema constructivă a unui compactor vibrator autopropulsat cu un singur rulou vibrator și două trepte de izolare a vibrațiilor.

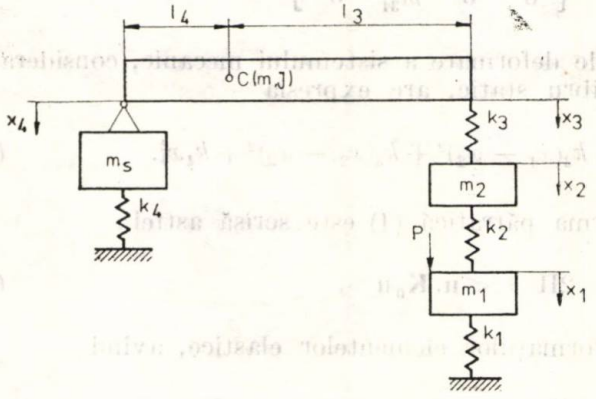


Fig. 2. — Modelul dinamic al unui compactor vibrator cu un singur rulou vibrator și două trepte de izolare a vibrațiilor.

3. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE MIȘCARE

Pentru modelul dinamic din figura 2 se poate scrie energia cinetică sub forma

$$2T = m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2 + 2m_{34}\dot{x}_3 \cdot \dot{x}_4, \qquad (1)$$

unde m_1 reprezintă masa ruloului vibrator;

m_2 — masa șasiului anterior;

$m_3 = \dfrac{ml_4^2 + J}{l^2}$ — masa redusă a șasiului posterior față de punctul de rezemare 3;

$m_4 = \dfrac{ml_3^2 + J}{l^2} + m_s$ — masa redusă a şasiului posterior faţă de punctul de rezemare 4 însumată cu masa m_s a ruloului posterior;

$m_{34} = \dfrac{ml_3l_4 - J}{l^2}$ — masa redusă a şasiului posterior.

Prin utilizarea notaţiei matriceale şi a produsului scalar în spaţii Hilbert, forma pătratică (1) poate fi scrisă astfel:

$$2T = < \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} >. \tag{2}$$

în care

$\dot{\mathbf{x}}$ este vectorul vitezelor, cu $\dot{\mathbf{x}}^T = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4]$,

$\mathbf{M}$ — matricea de inerţie.

Matricea de inerţie este pozitiv definită, simetrică şi nesingulară, astfel

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Energia potenţială de deformare a sistemului mecanic, considerată faţă de poziţia de echilibru static, are expresia

$$2\Pi = k_1x_1^2 + k_2(x_1 - x_2)^2 + k_3(x_2 - x_3)^2 + k_4x_4^2. \tag{4}$$

În notaţia matriceală forma pătratică (4) este scrisă astfel:

$$2\Pi = < \mathbf{u}, \mathbf{K}_0\mathbf{u} >, \tag{5}$$

unde $\mathbf{u}$ este vectorul deformaţiilor elementelor elastice, avînd

$$\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, u_3, u_4];$$

$\mathbf{K}_0 = \text{DIAG}\ \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ — matricea coeficienţilor de rigiditate.

Componentele vectorului $\mathbf{u}$ sînt determinate de deplasările x_j, $j = 1, 4$, ale sistemului mecanic, astfel:

$$u_1 = x_1; \quad u_2 = x_1 - x_2; \quad u_3 = x_2 - x_3; \quad u_4 = x_4.$$

Relaţia de legătură dintre deplasări şi deformaţii se poate scrie astfel:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{6}$$

unde

$\mathbf{A}$ — matricea de influenţă a deplasărilor asupra deformaţiilor;

$\mathbf{x}$ — vectorul deplasărilor, cu $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Matricea de influență **A**, pentru sistemul mecanic reprezentat prin modelul din figura 2, este de forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Cu ajutorul relației (6), forma pătratică (5) poate fi exprimată în coordonatele vectorului deplasare **x**, astfel:

$$2\Pi = <\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{K}_0\mathbf{A}\mathbf{x}>, \tag{8}$$

Considerînd matricea $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots 4$, ca un operator liniar continuu în spațiul Hilbert, atunci operatorul adjunct poate fi definit de matricea $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$, cu $i, j = 1 \ldots 4$, în acest caz relația (8) se poate scrie:

$$2\Pi = <\mathbf{x}, \mathbf{A}^T\mathbf{K}_0\mathbf{A}\mathbf{x}> \tag{9}$$

sau

$$2\Pi = <\mathbf{x}, \mathbf{K}\mathbf{x}>. \tag{10}$$

unde

$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T\mathbf{K}_0\mathbf{A}$ — matricea de rigiditate ce caracterizează ambele trepte elastice ale mașinii.

3.1. VIBRAȚIILE LIBERE

Prin utilizarea ecuațiilor lui Lagrange de speța a doua pentru vibrațiile libere, în absența forțelor disipative vom avea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_j}, \tag{11}$$

unde

$x_j, \dot{x}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ — coordonata generalizată și, respectiv, viteza generalizată corespunzătoare gradului de libertate j.

Cu ajutorul relațiilor (2), (10) și (11) se obține sistemul de ecuații diferențiale pentru vibrațiile libere sub formă

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Matricea de inerție **M** și matricea de rigiditate **K**, din relația (12), sînt pozitiv definite, nesingulare și simetrice (coordonatele x reprezintă deplasările sistemului față de o poziție fixă).

Pentru ecuația diferențială (12) se caută o soluție de forma

$$\mathbf{x} = Re\{\mathbf{a}\, e^{ipt}\}, \tag{13}$$

echivalentă cu relația

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}\cos pt, \tag{14}$$

unde

a reprezintă vectorul (coloană) al amplitudinilor, pentru care $\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, a_3, a_4]$,

p — pulsația proprie.

Înlocuind soluția (14) în (12), rezultă sistemul de ecuații algebrice sub forma

$$(\mathbf{K} - p^2\mathbf{M})\,\mathbf{a} = \mathbf{0}. \tag{15}$$

Pentru ca relația (15) să fie satisfăcută de **a** și p, trebuie rezolvată problema de valori proprii și vectori proprii asupra matricelor pătratice **M** și **K**.

Sistemul (15) are și soluții nebanale numai dacă

$$\det(\mathbf{K} - p^2\mathbf{M}) = 0, \tag{16}$$

de unde rezultă o ecuație algebrică de gradul 4 în p^2, numită ecuația pulsațiilor, care are rădăcinile p_1^2, p_2^2, p_3^2 și p_4^2 reale, pozitive și distincte numite valori proprii.

Prin utilizarea unui program de calcul automat în limbaj FORTRAN s-au determinat pulsațiile proprii p_1, p_2, p_3, p_4 și vectorii proprii sau modurile proprii de vibrație pentru mai multe variante ale unghiului de așezare.

3.2. VIBRAȚIILE FORȚATE

Pentru vibrațiile forțate se introduce lucrul mecanic elementar al forțelor perturbatoare (exterioare), astfel:

$$dL = <\mathbf{f}, d\mathbf{x}>, \tag{17}$$

în care

f este vectorul forțelor exterioare perturbatoare generalizate, avînd $\mathbf{f}^T = [P_1, 0, \ldots 0]$.

Componenta $P_1 = P_0 \sin \omega t$ a vectorului **f** este corespunzătoare coordonatei generalizate x_1.

În acest caz ecuațiile lui Lagrange de speța a doua se pot scrie sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_j} + \frac{\partial L}{\partial x_j}. \tag{18}$$

Utilizînd relațiile (2), (10) și (18) ecuația de mișcare sub forma matriceală va putea fi scrisă astfel:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \tag{19}$$

sau sub formă analitică :

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = P_0 \sin \omega t, \\ &m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = 0, \\ &m_3\ddot{x}_3 + m_{34}\ddot{x}_4 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0, \\ &m_4\ddot{x}_4 + m_{34}\ddot{x}_3 + k_3 x_4 = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Forţa perturbatoare unidirecţională P_1, generată de un vibroexcitator inerţial, are expresia

$$P_1 = P_0 \sin \omega t, \tag{21}$$

cu amplitudinea de forma

$$P_0 = m_0 r \omega^2,$$

în care

$m_0 r$ reprezintă momentul static pentru dezechilibrare al sistemului ;
ω — pulsaţia (viteza unghiulară) a sistemului de excitare.

Prin alegerea unei soluţii de forma membrului drept, adică

$$x_j = A_j \sin \omega t \quad (j = 1, \ldots 4), \tag{22}$$

ecuaţia diferenţială matriceală (19) sau sistemul de ecuaţii diferenţiale (20) se vor transforma într-un sistem algebric de ecuaţii cu soluţii pentru cazul vibraţiilor staţionare.

În acest fel, pentru amplitudinile vibraţiilor se obţin expresiile :

$$A_1 = \left| \frac{1}{D} m_0 r \omega^2 \{(k_2 + k_3 - m_2\omega^2)[(k_3 - m_3\omega^2)(k_4 - m_4\omega^2) - m_{34}^2\omega^4] - (k_4 - m_4\omega^2)k_3^2\} \right|, \tag{23}$$

$$A_2 = \left| \frac{1}{D} m_0 r \omega^2 [(k_3 - m_3\omega^2)(k_4 - m_4\omega^2) - m_{34}^2\omega^4] \right|, \tag{24}$$

$$A_3 = \left| \frac{1}{D} m_0 r \omega^2 (k_4 - m_4\omega^2) k_2 k_3 \right|, \tag{25}$$

$$A_4 = \left| \frac{1}{D} m_0 r \omega^2 k_2 k_3 m_{34}\omega^2 \right|, \tag{26}$$

în care D este funcţia pulsaţiilor proprii.

Expresia lui D este dată sub forma analitică astfel :

$$D = d_8\omega^8 + d_6\omega^6 + d_4\omega^4 + d_2\omega^2 + d_0, \tag{27}$$

în care coeficienţii au expresiile :

$$d_8 = m_1 m_2 (m_3 m_4 - m_{34}^2),$$

$$d_6 = (k_1 + k_2) m_2 m_{34}^2 + (k_2 + k_3) m_1 m_{34}^2 - (k_2 + k_4) m_1 m_2 m_3 -$$

$$- (k_1 + k_2 + k_3) m_1 m_3 m_4 + k_3 m_1 m_2 m_4,$$

$$d_4 = (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)(m_3 m_4 - m_{34}^2) + k_4 (k_1 + k_2) m_2 m_3 +$$

$$+ k_3 (k_3 + k_4) m_1 m_3 + k_3 (k_2 m_4 + k_4 m_2) m_1,$$

$$d_2 = - k_2 k_3 k_4 (m_1 + m_2 + m_3) + k_3 (k_1 + k_2) m_2 m_4 - k_1 k_3 k_4 (m_2 + m_3) -$$

$$- k_1 k_2 (m_3 k_4 + m_4 k_3),$$

$$d_0 = k_1 k_3 k_4 (k_2 + k_3).$$

4. PULSAŢIILE PROPRII ALE MAŞINII

Avînd în vedere că sistemul de izolare şi amortizare a vibraţiilor este alcătuit din mai multe elemente de cauciuc legate în paralel, astfel încît să satisfacă cerinţele capacităţii de rezistenţă, cît şi pe acelea impuse de dinamica vibraţiilor, în acest capitol se va trata, pe rînd, influenţa modificării caracteristicilor de rigiditate acelor două trepte elastice.

4.1. VARIAŢIA PULSAŢIILOR PROPRII FUNCŢIE DE MODIFICAREA RIGIDITĂŢII PRIMEI TREPTE ELASTICE

Pentru prima treaptă elastică au fost modificaţi doi factori şi anume :

a) unghiul α de aşezare format de axă la compresiune a elementelor antivibratile şi direcţia de vibrare. Acest aspect priveşte posibilităţile de montare a elementelor antivibratile în cadrul sistemului de izolare şi amortizare a vibraţiilor ;

b) reţeta amestecului de cauciuc, pentru aceeaşi formă constructivă de element, obţinîndu-se caracteristici fizico-mecanice distincte de la o reţetă la alta.

Pentru a evalua influenţa variaţiei unghiului de aşezare şi a tipului de cauciuc au fost trasate diagramele pulsaţie proprie-unghi pentru patru amestecuri distincte de cauciuc simbolizate astfel AB 9, AB 4a, AB 22 şi $AB-31$. Acest cauciuc a fost testat la INCERC atît din punct de vedere al determinării caracteristicilor de elasticitate şi amortizare, cît şi din punct de vedere al durabilităţii. Unghiul a fost modificat între limitele de montaj (0 ... 90) grade cu pasul 15°, astfel încît să rezulte treptele intermediare de montaj utilizate pentru aceste tipuri de rezemări.

Coeficientul de rigiditate echivalent k_2 al primei trepte elastice şi de amortizare variază în raport cu unghiul α după legea :

$$k_2 = k_c \cos^2 \alpha + k_f \sin^2 \alpha, \tag{28}$$

unde

$k_2 = k_{2\alpha}$ reprezintă coeficientul de rigiditate echivalent corespunzător unghiului de așezare;

k_c — coeficientul de rigiditate echivalent la compresiune, $\alpha = 0$;

k_f — coeficientul de rigiditate echivalent la forfecare, $\alpha = 90$.

Legea de variație a lui k_2 funcție de unghiul de așezare a fost stabilită teoretic și verificată experimental, cu ajutorul determinărilor efectuate în regim dinamic pe modelul real al primei trepte elastice.

Rezultatele experimentale obținute pentru prima treaptă elastică la compactoarele vibratoare CVA 4—5 și CVA 10, proiectate în concepție proprie, au permis trasarea curbelor de variație ale lui k_2 funcție de unghiul α. În figura 3 se prezintă familia de curbe ale variației coeficientului de rigiditate k_2 funcție de unghiul α și de amestecul de cauciuc, pentru compactorul vibrator CVA 4—5.

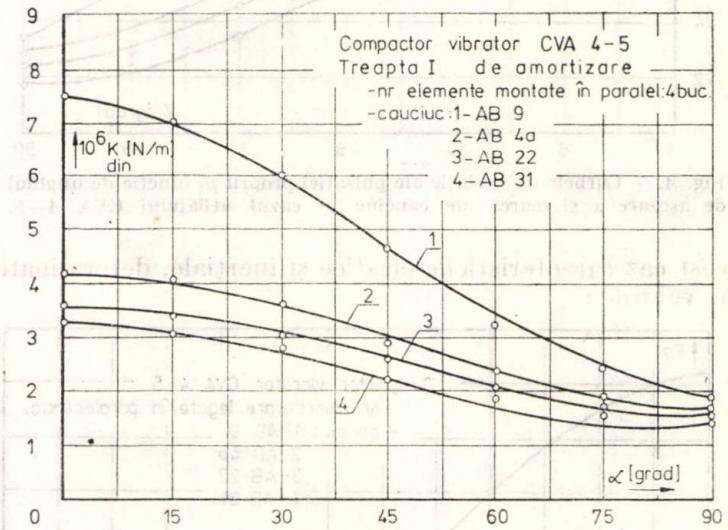


Fig. 3. — Curbele de variație ale coeficientului de rigiditate echivalent k_2 funcție de unghiul de așezare α și marca de cauciuc în cazul utilajului CVA 4—5.

Prin utilizarea unui program de calcul, în limbaj FORTRAN, denumit „PULSAP", pentru pulsații proprii și moduri proprii de vibrație, s-au determinat pulsațiile proprii și variația acestora funcție de unghiul de așezare α și de calitatea cauciucului (fig. 4, 5, 6, 7). Pentru aceasta au fost folosite și alte mărimi mecanice determinate experimental pe prototipul și „seria zero" ale compactorului vibrator autopropulsat CVA 4—5, astfel:

$$k_1 = k_4 = 4 \cdot 10^6 \text{N/m}; \quad k_3 = 2 \cdot 10^6 \text{N/m},$$

$$m_1 = 850 \text{ kg}; \quad m_2 = 1360 \text{ kg}; \quad m_3 = 1235 \text{ kg},$$

$$m_4 = 1250 \text{ kg}; \quad m_{34} = 358 \text{ kg}.$$

Pentru compactorul vibrator autopropulsat CVA 10, în figura 8, se reprezintă variația lui k_2 în funcție de unghiul α și amestecul de cauciuc.

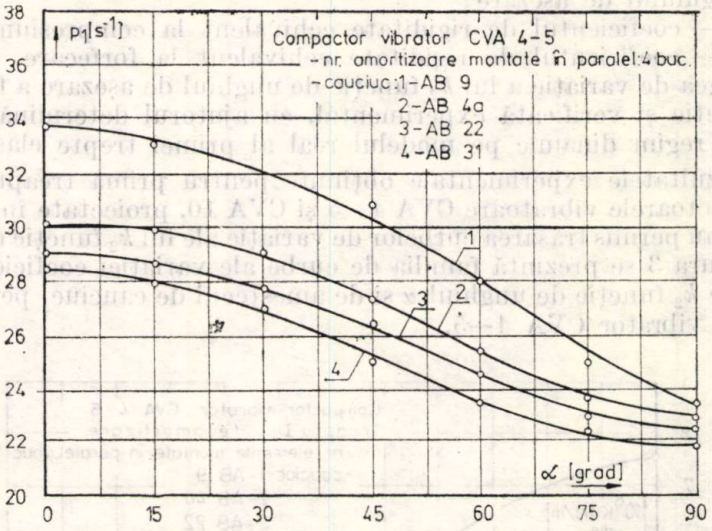


Fig. 4. — Curbele de variație ale pulsației proprii p_1 funcție de unghiul de așezare α și marca de cauciuc în cazul utilajului CVA 4—5.

În acest caz caracteristicile elastice și inerțiale, determinate experimental, au valorile :

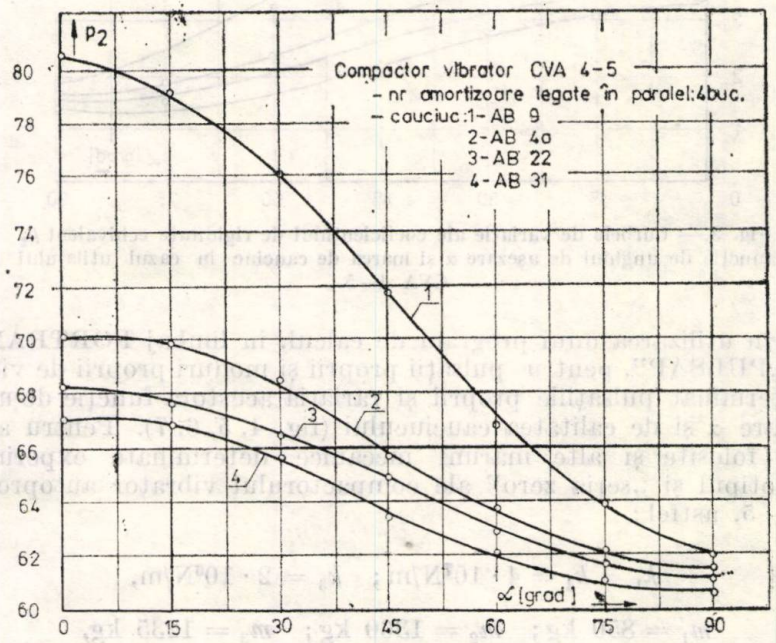


Fig. 5. — Curbele de variație ale pulsației proprii p_2 funcție de unghiul de așezare α și marca de cauciuc în cazul utilajului CVA 4—5.

$$k_1 = k_4 = 9 \cdot 10^7 \text{ N/m}; \quad k_3 = 3.04 \cdot 10^6 \text{ N/m},$$

$$m_1 = 1700 \text{ kg}; \quad m_2 = 736 \text{ kg};$$

$$m_3 = 7198 \text{ kg}, \quad m_4 = 5154 \text{ kg}; \quad m_{34} = 3174 \text{ kg}.$$

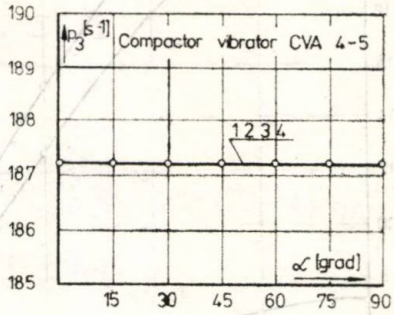


Fig. 6. — Pulsația proprie p_3 funcție de unghiul de așezare α și marca de cauciuc în cazul utilajului CVA 4—5.

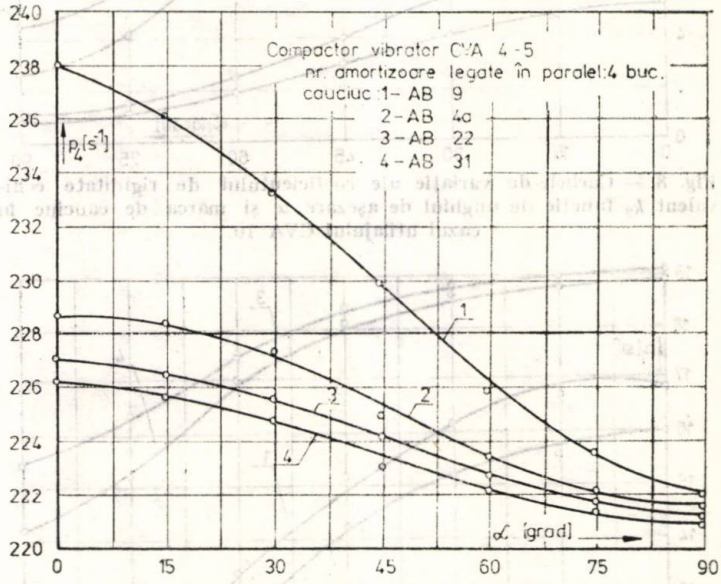


Fig. 7. — Curbele de variație ale pulsației proprii p_4 funcție de unghiul de așezare α și marca de cauciuc în cazul utilajului CVA 4—5.

Curbele de variație ale pulsațiilor proprii pentru compactorul vibrator CVA 10 ca urmare a modificării unghiului α și în condițiile a patru rețete de cauciuc, sînt prezentate în figurile 9, 10, 11 și 12.

Pentru compactorul vibrator CVA 4—5 caracteristicile inerțiale și elastice determinate experimental, au următoarele valori:

$$k_1 = k_4 = 4 \cdot 10^7 \text{ N/m}, \quad k_3 = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m},$$

$$m_1 = 850 \text{ kg}, \quad m_2 = 1360 \text{ kg}, \quad m_3 = 1235 \text{ kg},$$

$$m_4 = 1250 \text{ kg}, \quad m_{34} = 358 \text{ kg}.$$

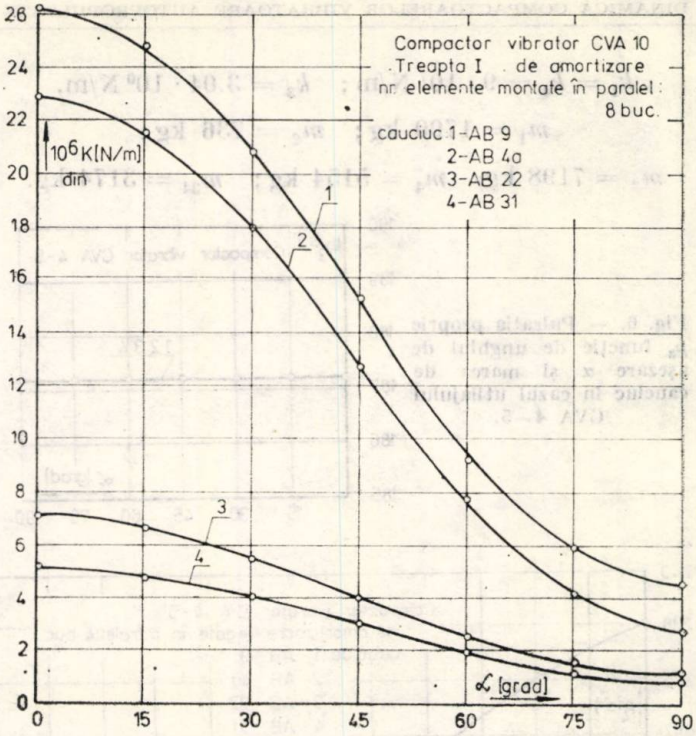


Fig. 8. — Curbele de variaţie ale coeficientului de rigiditate echivalent k_2 funcţie de unghiul de aşezare α şi marca de cauciuc în cazul utilajului CVA 10.

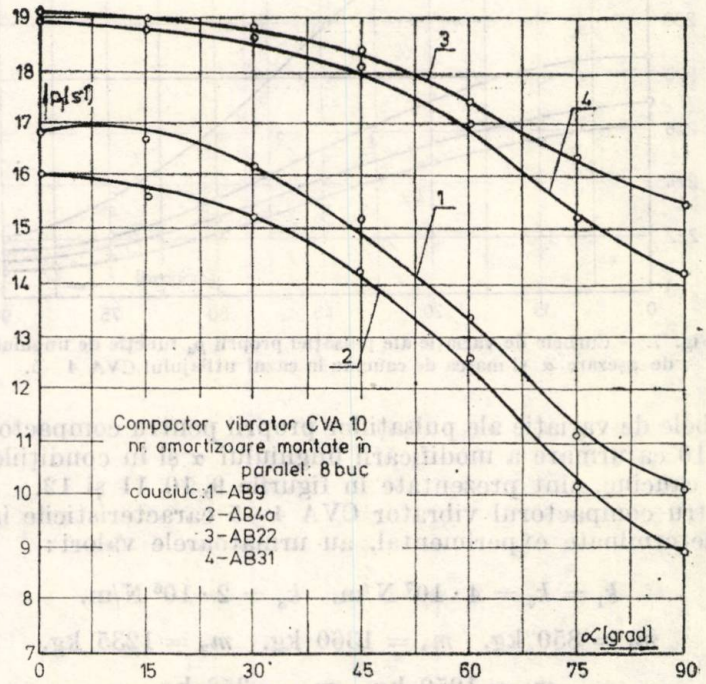


Fig. 9. — Curbele de variaţie a pulsaţiei proprii p_1 funcţie de unghiul de aşezare α şi marca de cauciuc în cazul utilajului CVA 10.

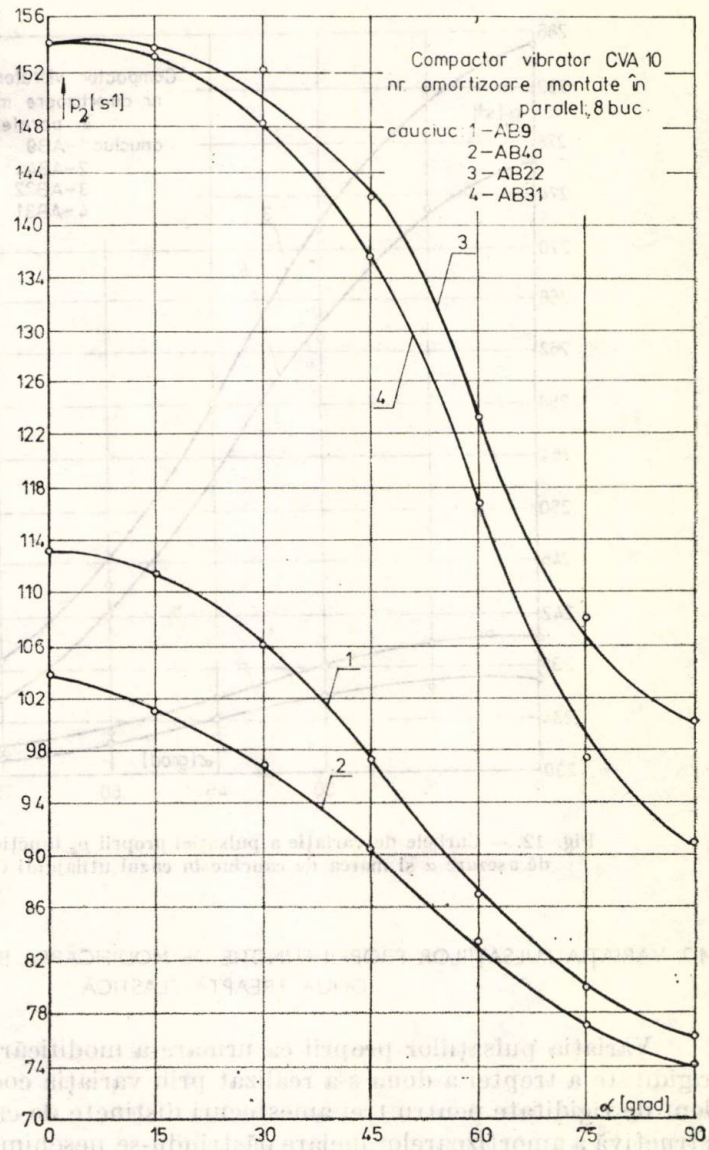


Fig. 10. — Curbele de variaţie a pulsaţiei proprii p_2 funcţie de unghiul de aşezare α şi marca de cauciuc în cazul utilajului CVA 10.

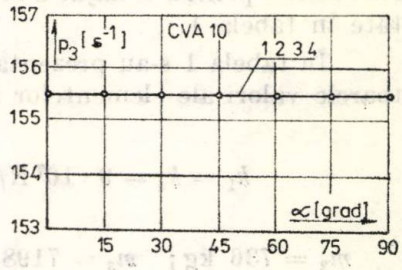


Fig. 11. — Pulsaţia proprie p_3 funcţie de unghiul α şi marca de cauciuc în cazul utilajului CVA 10.

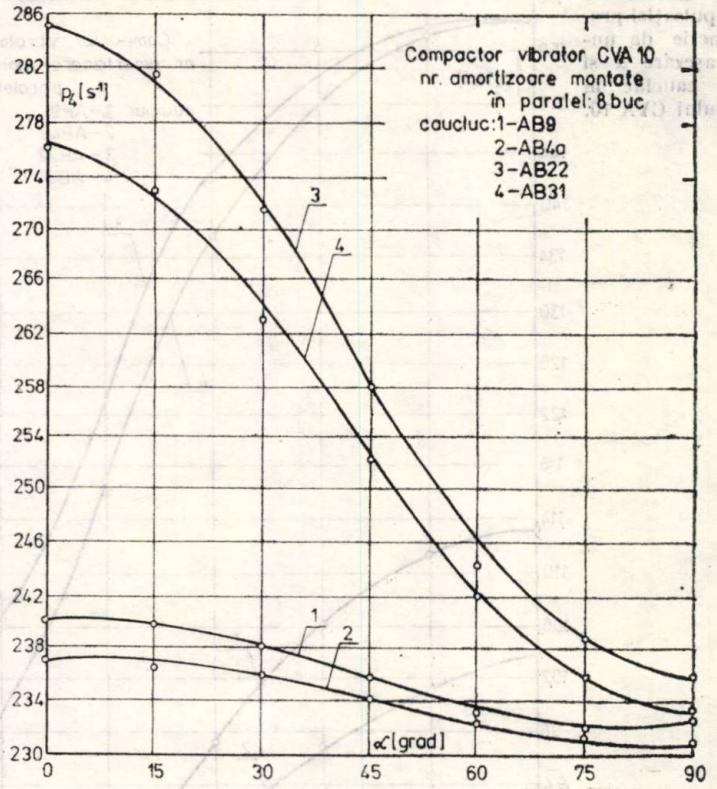


Fig. 12. — Curbele de variaţie a pulsaţiei proprii p_4 funcţie de unghiul de aşezare α şi marca de cauciuc în cazul utilajului CVA 10.

4.2. VARIAŢIA PULSAŢIILOR PROPRII FUNCŢIE DE MODIFICAREA RIGIDITĂŢII CELEI DE-A DOUA TREAPTĂ ELASTICĂ

Variaţia pulsaţiilor proprii ca urmare a modificării caracteristicii de rigiditate a treptei a doua s-a realizat prin variaţia coeficientului echivalent de rigiditate pentru trei amestecuri distincte de cauciuc, forma constructivă a amortizoarelor inelare păstrîndu-se neschimbate în toate cazurile. Astfel pentru utilajul CVA 10 s-au obţinut pulsaţiile proprii prezentate în tabela 1.

În tabela 1 s-au prezentat valorile pulsaţiilor proprii pentru următoarele valori ale elementelor masice şi de rigiditate:

$$k_1 = k_4 = 9 \cdot 10^7 \text{ N/m}; \quad \alpha = 60^\circ; \quad m_1 = 1700 \text{ kg},$$

$$m_2 = 736 \text{ kg}; \quad m_3 = 7198 \text{ kg}; \quad m_4 = 5154 \text{ kg}, \quad m_{34} = 3174 \text{ kg}.$$

Tabela 1

Pulsațiile proprii ale compactorului vibrator auto-propulsat CVA 10 funcție de variația rigidității treptei a doua.

Coeficientul echivalent de rigiditate, [N/m]		Pulsațiile proprii, [rad/s]			
Treapta I $10^4 \cdot k_2$	Treapta II $10^4 \cdot k_3$	p_1	p_1	p_3	p_4
197	304	12,54	83,45	155,50	232,73
	870	14,29	121,71	158,21	232,76
	102	14,50	125,50	159,40	232,70
242	304	13,34	86,72	154,4	233,37
	870	15,52	123,75	158,31	233,42
	102	15,80	127,20	159,40	233,40
773	304	17,08	116,60	155,54	242,02
	870	22,86	142,50	160,56	242,50
	102	23,60	143,40	162,30	242,30
920	304	17,48	122,91	155,50	244,98
	870	23,88	145,95	161,78	245,07
	102	24,70	146,20	163,70	245,02

Coeficientul de rigiditate al terenului $k_1 = k_4 = 9 \cdot 10^7$ N/m
Unghiul de așezare pentru elementele antivibratile de cauciuc, $\alpha = 60°$.

5. TRANSMISIBILITATEA MIȘCĂRII

În vederea aprecierii efectului de izolare al celor două trepte elastice s-au definit coeficienții de transmisibilitate astfel încît aceștia să poată exprima capacitatea de diminuare a mișcării vibratorii a subansamblelor care necesită nivel redus de vibrații. Coeficienții de transmisibilitate ai mișcării sînt definiți astfel :

$$T_1 = \left| \frac{A_2}{A_1} \right| \quad \text{— corespunzător primei trepte elastice,}$$

$$T_2 = \left| \frac{A_3}{A_2} \right| \quad \text{— corespunzător treptei a doua elastică ;}$$

$$T_{12} = \left| \frac{A_3}{A_1} \right| \quad \text{— corespunzător ambelor trepte elastice,}$$

în care A_1, A_2, A_3 sînt amplitudinile deplasărilor x_1, x_2, x_3 definite anterior.

Expresiile analitice ale coeficienților de transmisibilitate sînt date de relațiile :

$$T_1 = \left| \frac{A\omega^4 + B\omega^2 + C}{-Am_2\omega^6 + [A(k_2+k_3) - Bm_2]\omega^4 + [Bk_2 - C(m_2+m_3)]\omega^2 + k_2 + C} \right|, \tag{29}$$

$$T_2 = \left| \frac{k_3(k_4 - m_4\omega^2)}{A\omega^4 + B\omega^2 + C} \right|, \tag{30}$$

$$T_{12} = \left| \frac{k_2 + k_3(k_4 - m_4\omega^2)}{-Am_2\omega^6 + [A(k_2+k_3) - Bm_2]\omega^4 + [Bk_2 - C(m_2+m_3)]\omega^2 + k_2 + C} \right|, \tag{31}$$

în care

$$A = m_3 \cdot m_4 - m_{34}^2,$$

$$B = -(k_3 m_4 + k_4 m_3),$$

$$C = k_3 k_4.$$

Reprezentarea grafică a coeficienților de transmisibilitate funcție de pulsația forței perturbatoare și de variația rigidității treptei elastice corespunzătoare este dată în figurile : 13, 14 și 15.

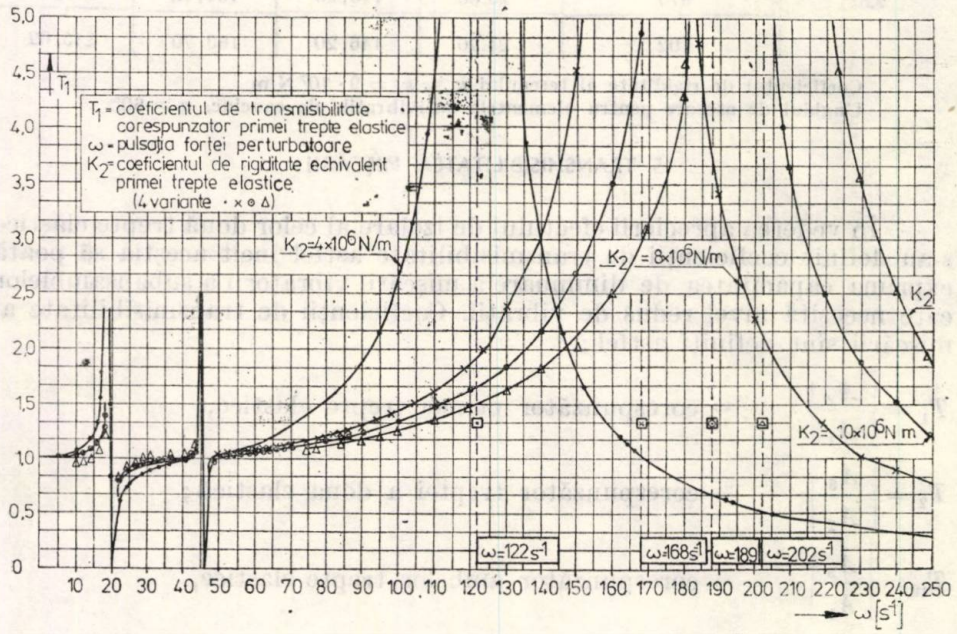


Fig. 13. — Curbele de variație ale coeficientului de transmisibilitate T_1 funcție de pulsația ω și variația coeficientului de rigiditate echivalent k_2 (prima treaptă elastică).

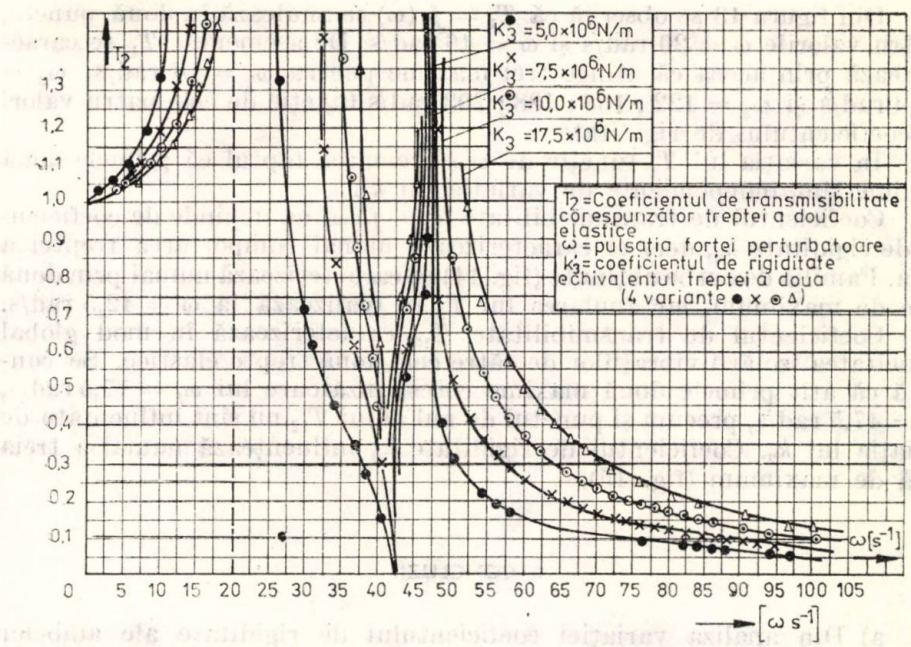


Fig. 14. — Curbele de variație ale coeficientului de transmisibilitate T_2 funcție de pulsația ω și variația coeficientului de rigiditate k_3 (a doua treaptă elastică).

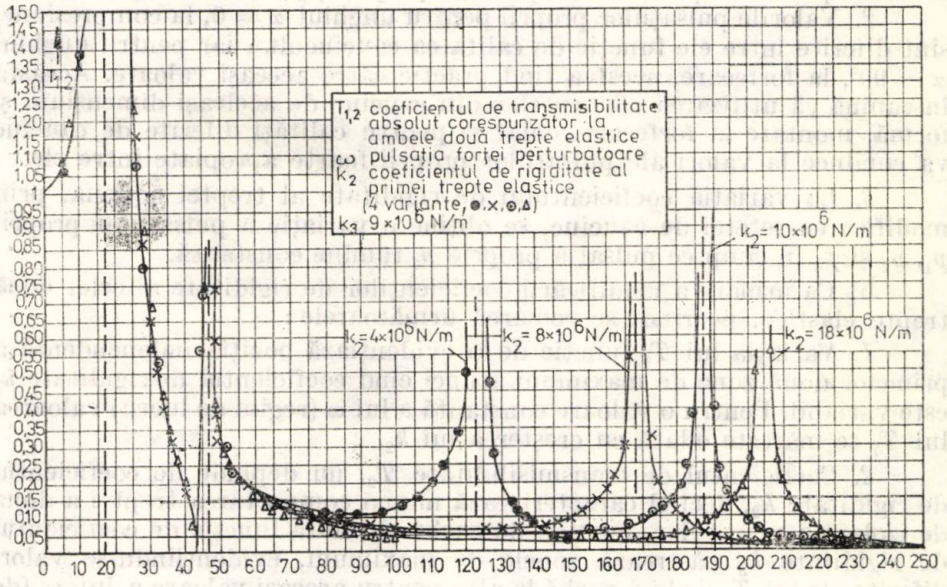


Fig. 15. — Curbele de variație ale coeficientului de transmisibilitate T_{12} funcție de pulsația ω și variația coeficientului de rigiditate k_2.

Din figura 13 se observă că $T_1 = f_1(\omega)$ se anulează în două puncte, pentru valorile $\omega = 20$ rad/s și $\omega = 46$ rad/s. De asemenea, T_1 se caracterizează prin aceea că atinge trei maxime pentru $\omega_1 = 18$ rad/s, $\omega_2 = 44$ rad/s și $\omega_3 = 122$; 168 ; 188 ; 202 rad/s funcție de cele patru valori ale coeficientului de rigiditate.

În variația lui T_1 funcție de ω se remarcă faptul că primele două maxime sînt independente de variația lui k_2.

Coeficientul de transmisibilitate $T_2 = f_2(\omega)$ nu depinde de coeficientul de rigiditate k_2, deci el caracterizează numai comportarea treptei a doua. Familia de curbe obținute (fig. 14) se caracterizează numai prin două zone de maximum, iar anularea lui T_2 se realizează la $\omega = 42{,}5$ rad/s.

Coeficientul de transmibilitate T_{12} caracterizează în mod global eficacitatea izolării vibrațiilor de către cele două trepte elastice. Se constată că atît primele două maxime corespunzătoare lui $\omega_1 = 17{,}5$ rad/s, $\omega_2 = 47{,}5$ rad/s, precum și punctul de nul al lui T_{12} nu sînt influențate de variația lui k_2. Coeficientul de rigiditate k_2 influențează numai a treia zonă de maximum (fig. 15).

6. CONCLUZII

a) Din analiza variației coeficientului de rigiditate ale ambelor trepte de amortizare, prin modificarea unghiului de așezare sau a rețetei de cauciuc rezultă următoarele :

1. Variația pulsațiilor proprii p_1, p_2 și p_4 funcție de unghiul de așezare are loc după o legitate asemănătoare variației coeficientului de rigiditate al primei trepte elastice, pulsația proprie p_3 rămînînd neschimbată.

2. Valorile pulsațiilor proprii pentru unghiul $\alpha = 0$, la compresiune, sînt diferite între ele funcție de calitatea cauciucului, iar pentru unghiul $\alpha = 90°$, la forfecare, acestea tind practic către aceeași valoare. Aceasta înseamnă că utilizarea elementelor din cauciuc de aceleași dimensiuni și formă, montate la forfecare, chiar și pentru calități diferite de cauciuc va conduce la valori ale pulsațiilor proprii foarte apropiate între ele.

3. La variația coeficientului de rigiditate al treptei a doua, prin modificarea rețetei de cauciuc, se obține o variație a pulsațiilor proprii p_1, p_2 și p_3 în timp ce pulsația proprie p_4 rămîne constantă.

b) Ca urmare a modificării coeficienților de rigiditate ai celor două trepte elastice, pe rînd, se remarcă următoarele :

1. Variația lui T_1 funcție de ω evidențiază poziția independentă a primelor două zone de maximum atunci cînd coeficientul de rigiditate k_2 este variabil. Pentru o valoare constantă a lui ω (regim de lucru) valoarea lui T_1 se mărește odată cu creșterea lui k_2.

2. Coeficientul de transmisibilitate T_2, nu depinde de coeficientul de rigiditate k_2, deci el caracterizează numai comportarea treptei a doua de izolare a vibrațiilor. Familia de curbe obținută funcție de coeficientul de rigiditate k_3 păstrează zonele de maximum, evidențiindu-se valori diferite ale lui T_2 de la o curbă la alta pentru aceeași valoare a lui ω (de exemplu, la pulsația în regim de lucru). Punctul de nul este unic cu condiția ca m_4 și k_4 să fie constante.

3. Coeficientul de transmisibilitate T_{12} caracterizează, în mod global, eficacitatea izolării vibraţiilor de către cele două trepte elastice. Se constată că atît primele două zone de maximum, punctul de nul, precum şi valorile lui T_{12}, nu sint influenţate de modificarea coeficientului de rigiditate k_2. A treia zonă de maximum îşi schimbă poziţia, iar valorile lui T_{12} după această zonă devin variabile determinînd o familie de curbe în raport cu variaţia lui k_2.

Primită la redacţie la 1 august 1980

BIBLIOGRAFIE

1. R., BELLMAN, *Introducere în analiza matriceală* (trad. din lb. engleză), Bucureşti, Edit. tehnică, 1969.
2. P., BRATU, *Stabilirea regimului dinamic de funcţionare la cilindrii compactori vibratori cu două trepte de amortizare.* Studii şi cercetări INCERC, *5* (1974).
3. P., BRATU, *Aspecte privind regimul dinamic de funcţionare la cilindrii compactori vibratori cu două trepte de amortizare.* Revista Construcţiilor, *4* (1975).
4. P., BRATU, *Cercetări privind dinamica cilindrilor compactori vibratori,* St. cerc. mec. apl., *3*, **35** (1976).
5. P., BRATU, *Influienţa variaţiei unghiului de aşezare a elementelor din cauciuc asupra rigidităţii dinamice a acestora,* Revista Construcţii, *4* (1977).
6 P., BRATU, *Cercetări experimentale asupra elementelor amortizoare din cauciuc,* Lucrările Conferinţei, Vibraţii în construcţii de maşini", Timişoara, 1978.
7. GH., BUZDUGAN, L., FETCU, M., RADEŞ, *Vibraţiile sistemelor mecanice,* Bucureşti, Edit. Academiei, 1975.
8. R., CRISTESCU, *Analiză funcţională,* Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1979.
9. N., GHEORGHIU, *Analiză funcţională,* Iaşi, Litografia Universităţii „Al. I. Cuza", 1970.
10. M., GRUMĂZESCU, A., STAN, N., WEGENER, V., MARINESCU, *Combaterea zgomotului şi vibraţiilor.* Bucureşti, Edit. tehnică, 1964.
11. M. C., HARRIS, E. C., CREDE, *Şocuri şi vibraţii, vol. 2 (trad. din lb. engleză),* Bucureşti, Edit. tehnică, 1968.
12. D., MANGERON, N., IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicaţii în inginerie, vol. I* — Bucureşti, Edit. tehnică, 1978.
13. M., RADEŞ, *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice,* Bucureşti, Edit. Academiei, 1979.
14. GH., SILAŞ, *Mecanica. Vibraţii mecanice,* Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1968.
15. C., STANCIU, L., WELTER, P., BRATU, *Studiul parametrilor dinamici ai cilindrilor compactori vibratori autopropulsaţi,* Lucrările Conferinţei „Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.
16. C., STANCIU, *Vibraţii şi dinamica maşinilor, fasc. I, II,* Bucureşti, Litografia Institutului de Construcţii, 1974, 1975.
17. R., VOINEA, D., VOICULESCU, V., CEAUŞU, *Mecanica,* Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1975.
18. * * * *Experimentarea în probe de laborator a compactorului vibrator autopropulsat CVA — 10.* Buletin de încercări — INCERC, Bucureşti, 1978.

ASUPRA IDENTIFICĂRII STATISTICE A FUNCȚIEI DE RĂSPUNS LA FRECVENȚĂ A UNUI STRUNG

de GEORGE BĂLAN

Universitatea Galați

În lucrare se prezintă programele de calculator care realizează o identificare statistică neparametrică a strungului, privit ca un sistem cu o intrare și o ieșire; această etapă furnizează funcția pondere a sistemului.
Aplicînd transformata Fourier directă funcției pondere se obține funcția de răspuns la frecvență, utilizată în studiul comportării dinamice a mașinii unelte; această etapă se realizează cu două algoritme, ultimul fiind un algoritm rapid de calcul.
Pentru testare, programele se aplică unui sistem cu un grad de libertate, pentru care se cunosc și expresiile analitice ale funcțiilor calculate numeric.

1. INTRODUCERE

Identificarea (conf. Zadeh — [9]) unui sistem înseamnă determinarea, pe baza analizei semnalelor de intrare-ieșire ale sistemului dat, a unui astfel de sistem, dintr-o clasă dată, încît sistemul identificat și cel determinat (modelul) să fie echivalente.

O informație echivalentă asupra relației dinamice intrare-ieșire a unui sistem liniar se poate obține cu metode care din punct de vedere mecanic sînt destul de diferite; relația dinamică poate fi reprezentată prin tipuri de expresii care nu seamănă de loc [23]:

a) ecuația diferențială;

b) funcția pondere;

c) funcția de răspuns la frecvență.

Un sistem liniar este definit în domeniul frecvențelor prin funcția de răspuns la frecvență $H(i\omega)$, iar în domeniul timpului prin funcția pondere $h(t)$.

Funcția de răspuns la frecvență se obține prin măsurarea semnalului la ieșire ca funcție a unui semnal la intrare pur sinusoidal, pentru care se variază frecvența. Semnalul la ieșire — în regim permanent — va fi și el sinusoidal (pentru sisteme liniare), iar răspunsul la frecvență se determină prin compararea amplitudinilor și a fazelor relative ale celor două semnale, pentru fiecare frecvență de intrare. $H(i\omega)$ este o funcție complexă, al cărei model reprezintă raportul între amplitudinile mărimilor de ieșire și de intrare, iar argumentul funcției este diferența de fază dintre cele două semnale.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 1, 1981, P. 121—143

Funcţia pondere reprezintă funcţia de răspuns la excitaţia impuls unitate.

Funcţia pondere şi funcţia de răspuns la frecvenţă formează o pereche de transformate Fourier :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} h(t) \cdot e^{-i\omega t} dt. \tag{2}$$

Figura 1 ilustrează problema sistemului de identificat, considerat liniar şi invariant în timp ; $f(t)$ este semnalul de la intrarea sistemului, $z(t)$ — semnalul la ieşirea sistemului, $n(t)$ este zgomotul aleator, $y(t)$ — semnalul măsurabil la ieşirea sistemului.

Strungul poate fi privit ca un sistem la care intrarea este forţa de aşchiere, iar ieşirea reprezintă deplasarea relativă sculă-piesă [14, 8, 5]. Forţa de aşchiere are trei componente (fig. 2), dintre care F_y provoacă deformaţia Δy, care influenţează direct precizia dimensională şi de formă cilindrică ; forţa F_z nu este semnificativă pentru că deformaţia Δz se transmite numai în mică măsură şi este invers proporţională cu diametrul piesei [7] ; forţa F_x (perpendiculară pe planul fig. 2) depinde în principal de viteza de avans longitudinal şi, dacă se lucrează cu avansuri mici, se poate neglija influenţa acestei forţe.

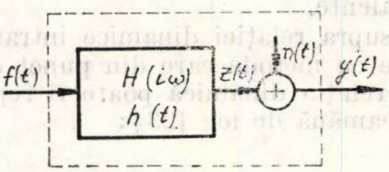


Fig. 1

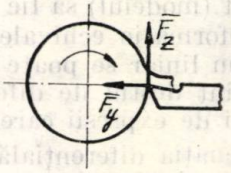


Fig. 2

Deci, în figura 1 $f(t)$ reprezintă variaţia forţei de aşchiere F_y, $y(t)$ este deplasarea relativă măsurată între cuţit şi piesă, iar $n(t)$ este deplasarea relativă datorită unor cauze diferite de forţa $f(t)$, cauze care nu se pot prevedea (de exemplu : vibraţia maşinii, rotaţia axului, vibraţii transmise prin fundaţie), rezultînd un proces aleator, numit, în general, zgomot. O realizare a acestui proces : $n(t)$ intervine în timpul experimentului.

Din figura 1 rezultă $y(t) = z(t) + n(t)$. (3)

Legătura între intrarea şi ieşirea din sistem este dată de integrala de convoluţie

$$z(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot h(t - \tau)\, d\tau = \int_0^t f(t - s) \cdot h(s) \cdot ds, \quad s = t - \tau. \tag{4}$$

Se remarcă în (4) că funcția $h(t-\tau)$ ponderează efectul unei funcții de intrare din trecut, la momentul τ, asupra funcției de ieșire la momentul t. Conform (4) o funcție pondere poate fi determinată prin măsurarea oricăror funcții de intrare și de ieșire, corelate între ele.

În (4), originea timpului se poate considera la $-\infty$ întrucît $h(\tau)=0$ pentru $\tau < 0$:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) \cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\int_{\infty}^{0} f(t-s)\,h(s)\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{\infty} f(t-s)\cdot h(s)\,\mathrm{d}s. \tag{5}$$

Pentru sisteme stabile, $h(t)$ este o funcție descrescătoare, adică

$$h(t) = 0, \text{ pentru } t > T_s. \tag{6}$$

Integrala (5) devine, în absența zgomotului :

$$y(t) = \int_{0}^{T_s} f(t-\tau)\,h(\tau)\cdot \mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

Metodele de identificare pot fi :

a) deterministe — cînd se neglijează efectele perturbațiilor nemăsurabile (zgomotul de măsurare),

b) statistice — care țin cont de zgomotul de măsurare.

Modelul poate avea o reprezentare :

1) neparametrică — de exemplu cînd se identifică funcția pondere,

2) parametrică — de exemplu cînd modelul este descris de ecuații de stare.

În prezenta lucrare se face o estimare statistică neparametrică a strungului, privit ca un sistem cu o intrare (componenta F_y a forței de așchiere) și o ieșire (deplasarea relativă sculă-piesă).

2. STADIUL CERCETĂRILOR

Semnalele de probă folosite în diferitele lucrări se pot clasifica [21] în :

1) deterministe,

2) aleatoare.

Semnalele de probă deterministe se împart la rîndul lor în :

1a) periodice (sinusoidale sau nesinusoidale),

1b) neperiodice (de tip impuls, funcție treaptă).

Semnale de probă sinusoidale, împreună cu un analizor automat de funcții de transfer s-au folosit în [6, 15, 22], metoda numindu-se „testul răspunsului la frecvență". Se folosesc excitatori de diferite tipuri (mecanic, electrodinamic, electromagnetic, electrohidraulic [6]), care produc o forță de forma $F = F_0 \sin \omega t$.

Dezavantajul acestei metode îl reprezintă consumul ridicat de timp. Acest dezavantaj este contracarat prin aplicarea tehnicilor de excitare cu impuls sau funcție treaptă [5, 6, 11].

Inconvenientul general al semnalelor de probă deterministe este alterarea acestora cu perturbații cu caracter aleator (zgomote), care există în mod real în timpul funcționării mașinilor unelte.

De aceea, în ultimii ani se preferă semnale aleatoare, care :

— reduc sau elimină influența perturbațiilor ;

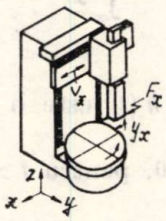


Fig. 3

— se pot aplica prin suprapunere peste mărimile curente de la intrare, funcționarea normală a mașinii netrebuind să fie întreruptă ;

— nu se pune problema distorsionării (frecventă la semnalele sinusoidale).

În [25] structura mașinii este excitată cu un generator electrohidraulic, comandat de un generator de zgomot, semnalele la intrare și ieșire avînd, în timp, o configurație stochastică.

În [18] un strung carusel este excitat (la înălțimea sculei) cu forța aleatoare F_x, iar deplasarea y_x a portcuțitului se măsoară cu un traductor (fig. 3). Cele două semnale aleatoare $f(t)$ și $y(t)$ sînt prelucrate cu un analizator Fourier care, pe baza mărimilor :

— funcția de autocorelație

$$R_{ff}(u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot f(t+u)\, \mathrm{d}t \tag{8}$$

și analog pentru $R_{yy}(u)$,

— funcția de intercorelație

$$R_{fy}(u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot y(t+u)\, \mathrm{d}t, \tag{9}$$

— densitatea spectrală a mediei pătratice $S_{ff}(i\omega) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \cdot \mathrm{d}\tau \text{ și analog pentru } S_{yy}(\mathrm{i}\omega), \tag{10}$$

— densitatea interspectrală a mediei pătratice

$$S_{fy}(\mathrm{i}\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{fy}(\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\, \mathrm{d}\tau, \tag{11}$$

calculează :

— funcția de răspuns la frecvență $H(i\omega) = \dfrac{S_{fy}(i\omega)}{S_{ff}(i\omega)}$, (12)

— funcția de coerență $\gamma^2_{fy}(\omega) = \dfrac{|S_{fy}(i\omega)^2|}{S_{ff}(\omega)\, S_{yy}(\omega)}$. (13)

O lipsă generală a lucrărilor prezentate mai sus este că dinamica mașinii nu se determină în condiții concrete de așchiere. Omisiunea este importantă, întrucît dinamica mașinii unelte este influențată de rotația axului, dimensiunea piesei, partea piesei care se așchiază.

În [2, 19] se studiază dinamica structurii mașinii-unelte în timpul așchierii, aplicînd o forță de excitație aleatoare, sau prin așchierea unei piese a cărei suprafață a fost striată aleator, sau prelucrată anterior așchierii, pentru a produce o forță de excitație aleatoare.

În [17] se face o identificare a dinamicii structurii mașinii unelte la cîteva secunde de la începerea așchierii, în condițiile unei așchieri stabile (fără vibrații), cu variații aleatoare mici ale forței de așchiere și deplasări relative sculă-piesă mici, utilizînd tehnica analizei seriilor de timp [20].

Componenta F_y a forței de așchiere se măsoară tensometric folosindu-se pentru selectarea numai a acestei componente, montajul din figura 4.

În [14] se utilizează un calculator analogic pentru a simula structura mașinii. S-au simulat structuri cu unu și două grade de libertate, excitate cu semnale aleatoare date de un generator ; se calculează funcția pondere

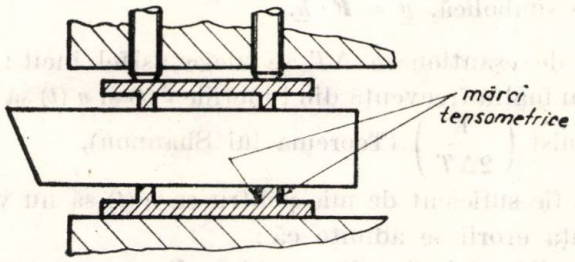


Fig. 4

și funcția de răspuns la frecvență. Pentru testele reale (pe mașini-unelte) se preconizează folosirea unui vibrator, măsurarea forței și a deplasării relative făcîndu-se cu traductori corespunzători.

3. MODELUL MATEMATIC

Modelul matematic al identificării statistice neparametrice a unui sistem cu o intrare și o ieșire înseamnă determinarea funcției pondere $h(t)$ din relația (7), cunoscînd înregistrările funcțiilor aleatoare de la intrare $f(t)$ și ieșire $y(t)$.

Pentru a obține o soluție numerică a relației (7), se eșantionează funcțiile $f(t)$ și $y(t)$ la intervale egale ΔT:

$$T = N \cdot \Delta T, \tag{14}$$

unde T este timpul total de observație.

Notăm $m = T_S/\Delta T$. (15)

Evident, $m << N$. (16)

Dacă notăm $y_n = y(n \cdot \Delta T)$, $f_n = f(n \cdot \Delta T)$, $h_n = h(n \cdot \Delta T)$, (17)

relația (7) se scrie: $y_n = \sum_{k=0}^{m-1} f_{n-k} \cdot h_k$, cu $m < n < M$. (18)

Relația (18) se scrie matriceal:

$$\begin{bmatrix} y_m \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m & f_{m-1} & \cdots & f_1 \\ f_{m+1} & f_m & \cdots & f_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_N & f_{N-1} & \cdots & f_{N-m+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{m-1} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

sau, în notație simbolică, $\underline{y} = \boldsymbol{F} \cdot \underline{h}$. (20)

Perioada de eșantionare ΔT se alege astfel încît:

— cea mai înaltă frecvență din funcțiile $f(t)$ și $y(t)$ să nu depășească frecvența Nyquist $\left(\frac{1}{2\Delta T}\right)$ (Teorema lui Shannon),

— ΔT să fie suficient de mic pentru ca $h(t)$ să nu varieze abrupt.

În privința erorii se admite că:

— măsurările mărimilor din matricea $\boldsymbol{F}$ nu au eroare;

— măsurările mărimilor din vectorul $\underline{y}$ au o eroare aleatoare, cu distribuția normală. Dispersia este aceeași pentru toate observațiile, iar erorile diferiților y sînt statistic independente.

Dificultățile contaminării cu zgomot a semnalului de ieșire (3) pot fi depășite aplicînd tehnica corelației [14]:

$$R_{fy}(u) = \int_0^\infty h(\tau) \cdot R_{ff}(u - \tau)\, \mathrm{d}\tau + R_{fn}(u), \tag{21}$$

unde R_{fy} și R_{ff} sînt date de relațiile (9) și (8), iar funcție de intercorelație intrare-zgomot se definește analog cu (9).

Cum, în general, la mașini unelte și în particular la strung, mecanismul generării zgomotului este independent de excitație, rezultă că intrarea $f(t)$ și zgomotul $n(t)$ nu sînt corelate (sînt independente), deci

$$R_{fn} = 0. \tag{22}$$

În aceste condiții, din (21) rezultă [14] estimarea funcției pondere :

$$\hat{\underline{h}} = (\boldsymbol{F}^t \cdot \boldsymbol{F})^{-1} \cdot \boldsymbol{F}^t \cdot \underline{y}, \tag{23}$$

unde cu $\boldsymbol{F}^t$ s-a notat transpusa matricei $\boldsymbol{F}$ din rel. (19) și (20).

Altă demonstrație a relației (23) [16] :

Se definește eroarea : $\underline{e} = \underline{y}_{calculat} - \underline{y}_{real} = \boldsymbol{F} \cdot \hat{\underline{h}} - \underline{y}$. (24)

Se caută estimarea lui $\hat{\underline{h}}$ care minimizează suma pătratelor erorilor (criteriul celor mai mici pătrate) :

$$V(\underline{h}) = \|\underline{e}\|^2. \tag{25}$$

Condiția pentru minim : $\nabla_h V(\underline{h}) = 2\underline{e}\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{F}^t \cdot \underline{e} = 2\boldsymbol{F}^t(\boldsymbol{F}\hat{\underline{h}} - \underline{y}) = 0.$ (26)

Din (26) rezultă (23).

Concluzia firească : metoda celor mai mici pătrate pentru identificarea neparametrică a sistemului și metoda corelațională reprezintă, de fapt una și aceeași procedură.

În [23] se dă o interpretare geometrică a relației (23).

Funcția de răspuns la frecvență se determină aplicînd transformata Fourier directă (2) funcției pondere estimată în (23).

O schemă foarte generală de calcul a relației (23) este dată în figura 5.

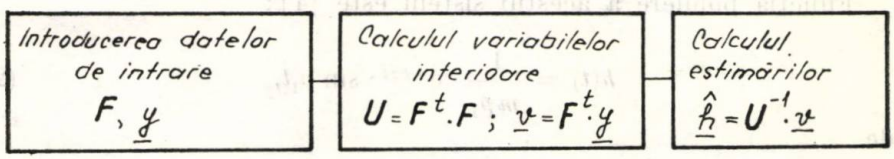


Fig. 5

După calculul variabilelor interioare, rezolvarea sistemului

$$\boldsymbol{U}\hat{\underline{h}} = \underline{v}$$

se poate face prin metoda clasică Gauss-Jordan sau cu metoda Cholesky.

Pentru a evita amplificarea erorilor de rotunjire, avînd în vedere că valoarea determinantului folosit la inversarea matricii $\boldsymbol{U}$ este foarte mică, se recomandă să se transforme toate variabilele prin scăderea

mediei lor şi împărţirea ulterioară a fiecărei valori observate cu rădăcina pătrată a sumei pătratelor variaţiilor, care este :

$$S(f_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_{ij} - \bar{f}_j)^2}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Transformarea completă este :

$$y' = (y - \bar{y})/S(y); \quad f'_j = (f_j - \bar{f}_j)/S(f_j). \tag{27}$$

După aceasta, elementele matricei $\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{F}$ devin coeficienţi de corelaţie dintre variabilele , iar vectorul $\boldsymbol{F}^t\underline{y}$ este vectorul coeficienţilor de corelaţie dintre mărimile $\underline{f}$ şi mărimea y. Elementele de pe diagonala principală sînt egale cu unitatea, iar toate celelalte elemente sînt cuprinse în intervalul $(-1, +1)$.

Procedînd astfel, se obţin mai multe avantaje :

— rezultă coeficienţii de corelaţie, care prin ei înşişi sînt utili în analiza statistică ;

— elementele c_{ii} (de pe diagonala principală) ale matricei inverse $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{F}^t \cdot \boldsymbol{F})^{-1}$ măsoară corelaţia dintre variabilele $\underline{f}$.

După terminarea calculului, transformările inverse :

$$h_i = h'_i \cdot S(y)/S(f_i) \tag{28}$$

vor converti coeficienţii normalizaţi h'_i înapoi în coeficienţii h_i.

4. IDENTIFICAREA UNUI SISTEM SIMULAT PE CALCULATOR

Pentru verificarea metodelor propuse pentru identificare, înainte de a le aplica la o structură reală, vom efectua estimarea funcţiei pondere a unui sistem oscilant, cu un grad de libertate, (fig. 6), simulat pe calculatorul electronic.

Funcţia pondere a acestui sistem este [4] :

$$h(t) = \frac{1}{mp_1} \cdot e^{-p\varphi t} \cdot \sin p_1 t, \tag{29}$$

unde

$$p_1 = p\sqrt{1 - \varphi^2}, \quad p^2 = \frac{k}{m}, \quad \varphi = \frac{c}{c_{cr}},$$

$$c_{cr} = 2mp. \tag{30}$$

Datele numerice : $p = 20\ s^{-1}$, $\varphi = 0{,}5$, $m = 1$ kg. (31)

La intrarea sistemului se aplică un semnal aleator $f(t)$, iar ieşirea se calculează cu relaţia (18).

Timpul de eşantionare : $\Delta T = \pi/90$. (32)

Semnalul de intrare cel mai indicat pentru identificare este de tipul „zgomotului alb ideal" — semnal cu densitatea spectrală*) constantă într-o bandă infinită de frecvențe [4].

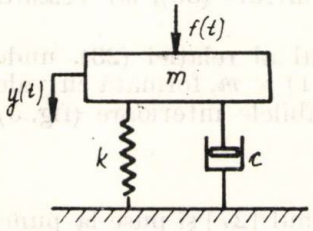


Fig. 6

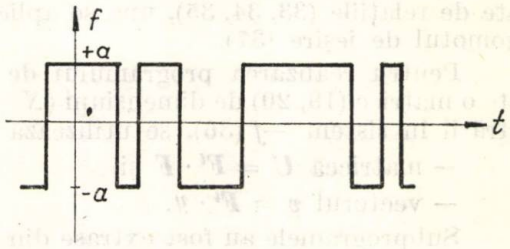


Fig. 7

Datorită caracteristicilor de filtru trece-jos al mașinilor unelte, se pot utiliza semnale aleatoare având funcția de densitate spectrală constantă într-o bandă de frecvențe limitată — „zgomot alb real".

Realizarea practică a semnalelor de tip „zgomot alb" este imposibilă, de aceea se recurge la semnale cu proprietăți similare cu cele ale zgomotului alb real, de tipul „semnale aleatoare binare", de forma semnalului telegrafic din figura 7.

Aceste semnale pot lua numai două valori în amplitudine : $\pm a$, trecerea de la o valoare la alta având un caracter aleator.

Dezavantajul esențial al tipurilor de semnale descrise mai sus este că necesită durate de realizare foarte lungi, pentru a fi utile în identificare.

Acest inconvenient este înlăturat de „semnalele pseudoaleatoare binare" care se prezintă sub forma unor succesiuni de valori binare, care se repetă după o anumită perioadă. Aceste semnale sînt, în fond, deterministe, dar au funcțiile de corelație și de densitate spectrală analoage cu cele ale zgomotului alb real [21].

La intrarea sistemului din figura 6 se vor utiliza semnale pseudoaleatoare binare, cu distribuția uniformă în domeniul $[-1, +1]$, care se obțin utilizînd relațiile iterative :

$$z_n = s/2^{14} - 1, \tag{33}$$

unde $s = (8789 \cdot z_{n-1} - 1)$ modulo 2^{15}, (34)

cu valoarea inițială : $z_0 = 2^{15} - 1$. (35)

Folosind relația : $f = \text{sign}\ (z_n)$, (36)

se obține un semnal binar pseudoaleator, cu intervale discrete.

*) Densitatea spectrală reprezintă transformata Fourier a funcției de corelație :

$$S(\omega) = \frac{}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

La ieşirea sistemului se consideră un zgomot aleator $-n\,(t)$ de 5%, adică $n = 0{,}05 \cdot z_n$, (37)

unde z_n este generat de (33), astfel încît din două valori consecutive generate de relaţiile (33, 34, 35), una se aplică la intrare (36), iar cealaltă la zgomotul de ieşire (37).

Pentru realizarea programului de calcul al relaţiei (23), unde $\boldsymbol{F}$ este o matrice (19, 20) de dimensiuni $(N-m+1) \times m$, formată cu valorile intrării în sistem $-f$ (36), se utilizează variabilele interioare (fig. 5):

— matricea $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}^t \cdot \boldsymbol{F}$ şi

— vectorul $\underline{v} = \boldsymbol{F}^t \cdot \underline{y}$.

Subprogramele au fost extrase din volumul [27] şi puse la punct în cadrul Centrului de calcul al Universităţii din Galaţi.

În cazul relaţiilor (18, 19, 20 şi 23) avem de efectuat o regresie liniară multiplă, pentru care trebuie să se cheme, în ordinea indicată mai jos, următoarele subrutine:

I) Subrutina CØRRE.

Această subrutină calculează, pentru datele de intrare x_{ij} (unde $i = 1, 2, \ldots, n$ sînt observaţiile, iar $j = 1, 2, \ldots, m$ sînt variabilele):

— valorile medii: $\bar{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}/n$, pentru $j = 1, 2, \ldots, m$,

— sumele produselor încrucişate ale deviaţiilor:

$$S_{jk} = \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - T_j)(x_{ik} - T_k) - \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - T_j) \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - T_k)}{n},$$

$$j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m,$$

unde $T_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}/m$,

— coeficienţii de corelaţie: $r_{jk} = \dfrac{S_{ik}}{\sqrt{S_{jj}} \cdot \sqrt{S_{kk}}}$, $j = 1, 2, \ldots, m$

$k = 1, 2, \ldots, m$

— deviaţiile standard; $s_j = \dfrac{S_{jj}}{\sqrt{n-1}}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Subrutina CØRRE primeşte vectorii:

$$\underline{v}^*[n] = \begin{bmatrix} f[n] \\ \ldots \\ y[n] \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots, N_{ob}.$$

Variabilele de intrare sînt :

a) NØB = numărul de observații,

b) MIR = dimensiunea vectorului $\underline{v}^*$ [n], unde :

MIR = NIR + 1, iar NIR este dimensiunea vectorului $\underline{f}$, deci și a vectorului parametrilor estimați.

Vectorii $\underline{v}^*$ [n], $n = 1, 2, \ldots, N_{0b}$, sînt furnizați subrutinei CØRRE, de o subrutină DATA, care dă la fiecare chemare a sa vectorul curent $\underline{v}^*$ [n].

Variabila de intrare în subrutina DATA este MIR (dimensiunea vectorului $\underline{v}^*$, iar ieșirea este vectorul D, care conține componentele vectorului $\underline{v}^*$).

Mărimi de ieșire din CØRRE :

XBAR — vectorul conținînd valorile medii ale componentelor,

STD — vectorul conținînd deviațiile standard ale componentelor,

R — partea superior triunghiulară a matricei conținînd sumele produselor încrucișate ale deviațiilor (coeficienții de corelație).

II) Subrutina ØRDER

Această subrutină construiește dintr-o matrice mai mare, a coeficienților de corelație ($\boldsymbol{R}$) — determinată în CØRRE, o submatrice a intercorelațiilor între variabilele independente ($\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}^t \cdot \boldsymbol{F}$) și un vector al intercorelațiilor între variabila dependentă și variabilele independente ($\underline{v} = \boldsymbol{F}^t \cdot \underline{y}$).

Intrări în această subrutină :

— matricea $\boldsymbol{R}$, determinată în CØRRE,

— dimensiunile vectorilor $\underline{v}^*$ (MIR) și $\underline{f}$ (NIR).

Ieșirile sînt :

$\boldsymbol{RX}$ — matrice NIR*NIR, reprezentînd variabila interioară $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}^t \cdot \boldsymbol{F}$,

RY — vector de dimensiune NIR, reprezentînd variabila interioară $\underline{v} = \boldsymbol{F}^t \underline{y}$.

III) Subrutina MINV

Această subrutină inversează matricea $\boldsymbol{RX} = \boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}^t \cdot \boldsymbol{F}$.

Intrări : NIR, $\boldsymbol{RX}$

Ieșiri : — matricea $\boldsymbol{U}^{-1} = (\boldsymbol{F}^t \cdot \boldsymbol{F})^{-1}$, obținută în tabloul $\boldsymbol{RX}$, în care inițial era matricea $\boldsymbol{U}$,

— determinantul matricei $\boldsymbol{U}$: DET

IV) Subrutina MULTR

Această subrutină efectuează regresia liniară multiplă a unei variabile dependente cu un set de variabile independente, calculînd :

1. estimările (coeficienții de regresie) $\underline{\hat{h}} = (\boldsymbol{F}^t \cdot \boldsymbol{F})^{-1} \cdot \boldsymbol{F}^t \underline{y} = \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \underline{v}$,

2. indicatorii de calitate ai estimărilor :
— abaterile standard ale estimărilor,
— rapoartele între estimări şi abaterile standard respective,
— coeficientul de corelaţie multiplă,
— termenul liber al regresiei :

$h_0 = \bar{f} - \sum_{j=1}^{NIR} \hat{h}_j \cdot \bar{f}_j$, în care prin semnul (—) s-a notat valoarea medie.

Este de dorit ca termenul h_0 să fie cît mai mic posibil.

Intrări : NØB, NIR, XBAR, STD, RX, RY — definite mai sus.

Ieşiri :

B — vectorul conţinînd estimările,

SB — vectorul conţinînd deviaţiile standard ale estimărilor,

T — vectorul conţinînd rapoartele între estimări şi abaterile standard respective ;

ANS — un vector, la care interesează :

ANS (1) — conţine termenul h_0,

ANS (2) — conţine coeficientul de corelaţie multiplă, reprezentînd cosinusul unghiului dintre vectorii $\underline{h}$ (real) şi $\underline{\hat{h}}$ (estimat) (fig. 8).

Schema logică a programului (numit PØND) de estimare a funcţiei pondere pentru sistemul oscilant cu un grad de libertate din figura 6 se dă în figura 9.

Datele principale ale programului PØND sînt :
— numărul de variabile independente (intrări) : NIR = 15
— numărul de observaţii :

$$NØB = N - NIR + 1 = 500 - 15 + 1 = 486.$$

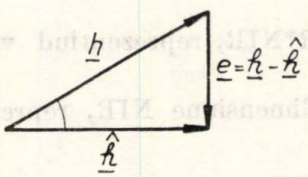


Fig. 8

Programul PØND a fost rulat pe calculatorul Felix C 32 al Universităţii din Galaţi, timpul de rulare fiind de 75 minute, utilizîndu-se varianta de rulare : 4—3.

Datele tipărire se reproduc în tabelul 1.

Din compararea coloanelor 2 şi 3 din tabelul 1 se poate observa că identificarea a reuşit.

Funcţiile pondere exactă şi identificată sînt reprezentate grafic în figura 10, respectiv cu linie continuă şi cu linie întreruptă.

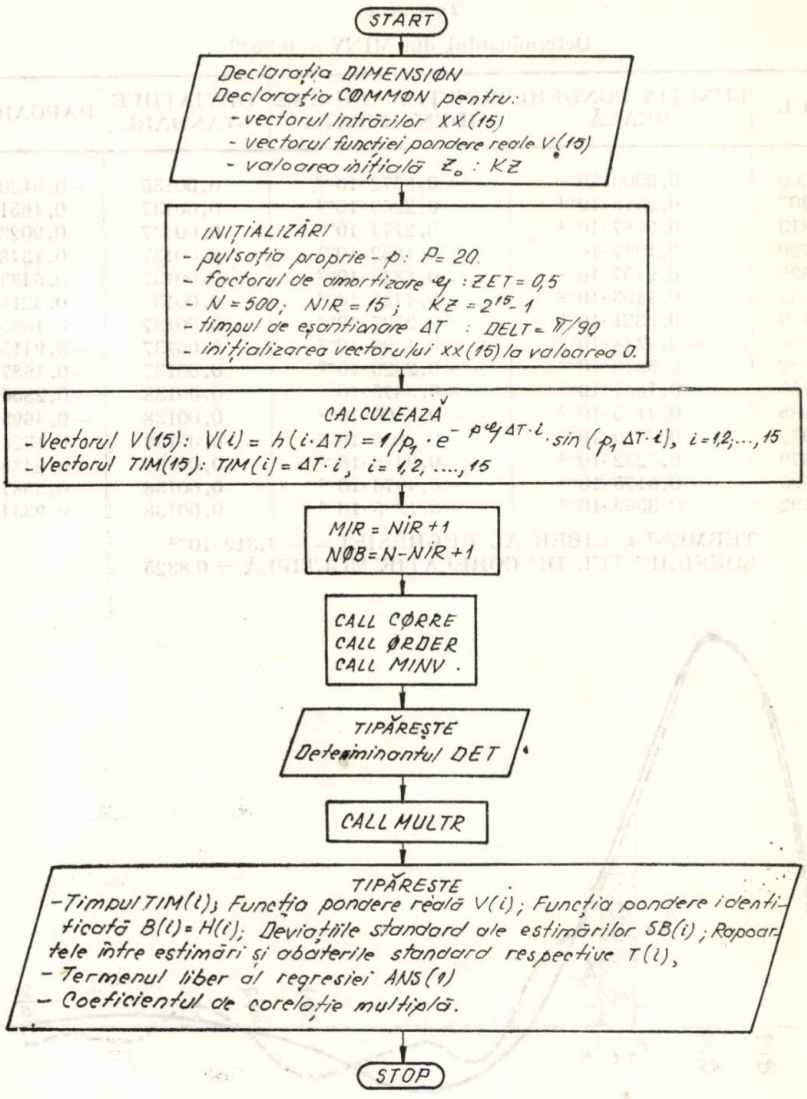


Fig. 9

Aprecierea reușitei estimării este dată de următorii indicatori:

a) Valoarea termenului liber al regresiei ANS (1) (din subrutina MULTR) trebuie să fie cît mai mică posibil. Acest indicator este util în special cînd determinantul matricei U are valori de $10^{-5} - 10^{-7}$.

b) Coeficientul de corelație multiplă ANS (2) nu este un indicator de bază; este însă cert că pentru ANS (2) = 1, estimarea este corectă, iar la valori absurde ANS (2) > 1, estimarea este eșuată.

c) Cu cît rapoartele între estimări și abaterile standard sînt mai mari, cu atît estimarea este mai bună.

Tabelul 1

Determinantul din MINV = 0,8539

TIMPUL	FUNCŢIA PONDERE REALĂ	FUNCŢIA PONDERE IDENTIFICATĂ	DEVIAŢIILE STANDARD	RAPOARTELE
0,000000	$0,0000 \cdot 10^{0}$	$-0,8372 \cdot 10^{-3}$	0,00136	$-0,6120 \cdot 10^{0}$
0,034907	$0,2315 \cdot 10^{-1}$	$0,2263 \cdot 10^{-1}$	0,00137	$0,1651 \cdot 10^{2}$
0,069813	$0,2687 \cdot 10^{-1}$	$0,2774 \cdot 10^{-1}$	0,00137	$0,2023 \cdot 10^{2}$
0,104720	$0,1967 \cdot 10^{-1}$	$0,1852 \cdot 10^{-1}$	0,00137	$0,1348 \cdot 10^{2}$
0,139626	$0,9457 \cdot 10^{-2}$	$0,8846 \cdot 10^{-2}$	0,00137	$0,6433 \cdot 10^{1}$
0,174533	$0,1193 \cdot 10^{-2}$	$0,4425 \cdot 10^{-2}$	0,00137	$0,3216 \cdot 10^{1}$
0,209439	$-0,3321 \cdot 10^{-2}$	$-0,2527 \cdot 10^{-2}$	0,00137	$-0,1835 \cdot 10^{1}$
0,244346	$-0,4448 \cdot 10^{-2}$	$-0,1298 \cdot 10^{-2}$	0,00137	$-0,9415 \cdot 10^{0}$
0,279252	$-0,3510 \cdot 10^{-2}$	$-0,2326 \cdot 10^{-2}$	0,00137	$-0,1687 \cdot 10^{1}$
0,314159	$-0,1861 \cdot 10^{-2}$	$-0,3875 \cdot 10^{-2}$	0,00138	$-0,2806 \cdot 10^{1}$
0,349065	$-0,4135 \cdot 10^{-3}$	$-0,6500 \cdot 10^{-3}$	0,00138	$-0,4699 \cdot 10^{0}$
0,383972	$0,4459 \cdot 10^{-3}$	$0,1835 \cdot 10^{-2}$	0,00138	$0,1326 \cdot 10^{1}$
0,418879	$0,7232 \cdot 10^{-3}$	$0,9486 \cdot 10^{-3}$	0,00138	$-0,6489 \cdot 10^{0}$
0,453795	$0,6175 \cdot 10^{-3}$	$-0,4976 \cdot 10^{-3}$	0,00138	$-0,3587 \cdot 10^{0}$
0,488692	$0,3569 \cdot 10^{-3}$	$-0,1295 \cdot 10^{-2}$	0,00138	$-0,9334 \cdot 10^{0}$

TERMENUL LIBER AL REGRESIEI = $-1,819 \cdot 10^{-3}$
COEFICIENTUL DE CORELAŢIE MULTIPLĂ = 0,8325

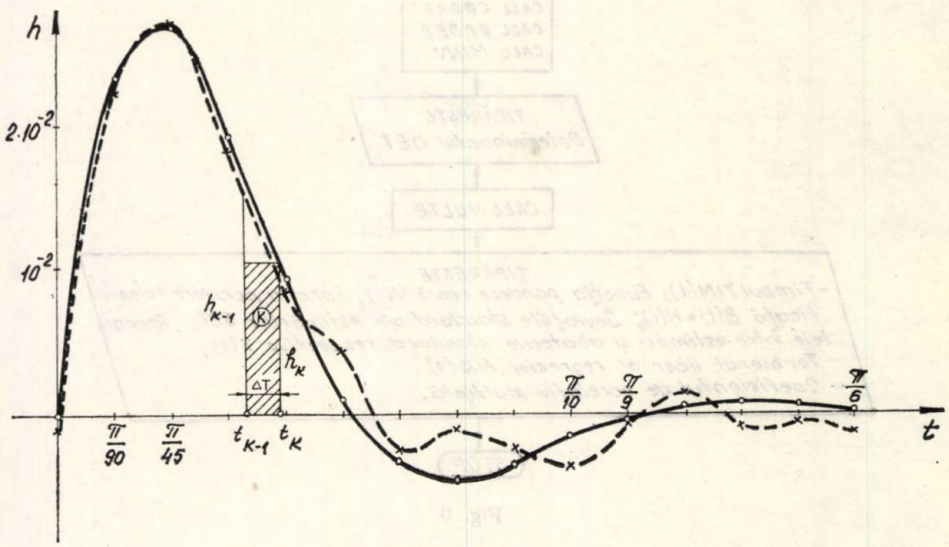


Fig. 10

5. DETERMINAREA FUNCŢIEI DE RĂSPUNS LA FRECVENŢĂ A SISTEMULUI IDENTIFICAT

A) Pentru sistemul din figura 6, avînd funcţia pondere reprezentată în figura 10, funcţia de răspuns la frecvenţă se determină cu relaţia (2), care se prelucrează pentru calcul numeric [12]:

Se eşantionează graficul $h(t)$ în L intervale egale de timp ΔT şi se notează ordonata la abscisa $t_{k-1} = (k-1)\Delta T$ cu h_{k-1}, iar la abscisa $t_k = k \cdot \Delta T$ cu h_k şi se aproximează aria de sub curbă cu un dreptunghi de di-

mensiuni ΔT și h_k (fig. 10). Spectrul Fourier al dreptunghiului de ordin k este:

$$H_k(i\omega) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} h_k \cdot e^{-i\omega t}\,dt = \frac{2h_k}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot \Delta T}{2}\right) \cdot e^{-i(2k-1)\cdot\frac{\omega\cdot\Delta T}{2}}. \quad (38)$$

Cu notația $\psi = \omega \cdot \Delta T/2,$ (39)

relația (38) devine:

$$H_k(i\omega) = \frac{2h_k}{\omega} \cdot \sin\psi \cdot e^{-i(2k-1)\psi}, \quad (40)$$

de unde

$$\begin{cases} \text{Real } [H_k(i\omega)] = \dfrac{2h_k}{\omega} \cdot \sin\psi \cos(2k-1)\psi, \\ \text{Imag } [H_k(i\omega)] = -\dfrac{2h_k}{\omega} \sin\psi \sin(2k-1)\psi \end{cases} \quad (41)$$

și

$$\begin{cases} \text{Real}[H(i\omega)] = \sum_{k=1}^{L} \text{Real}[H_k(i\omega)] = \dfrac{2\sin\psi}{\omega} \sum_{k=1}^{L} h_k \cdot \cos(2k-1)\psi, \\ \text{Imag}[H(i\omega)] = \sum_{k=1}^{L} \text{Imag}\,[H_k(i\omega)] = -\dfrac{2\sin\psi}{\omega} \sum_{k=1}^{L} h_k \cdot \sin(2k-1)\psi. \end{cases} \quad (42)$$

Se observă din relația (42) că funcția Real $[H(i\omega)]$ este o funcție pară, iar Imag $[H(i\omega)]$ este impară:

$$\begin{aligned} \text{Real } [H(-i\omega)] &= \text{Real } [H(i\omega)], \\ \text{Imag } [H(-i\omega)] &= -\text{Imag } [H(i\omega)], \end{aligned} \quad (43)$$

deci este suficient să se calculeze valorile funcțiilor (42) numai pentru $\omega > 0$

$$\omega = i \cdot \Delta\omega \quad (i = 1, 2, \ldots, N_1), \quad (44)$$

$$\omega_0 = N_1 \cdot \Delta\omega. \quad (45)$$

Transformata Fourier (2) a funcției pondere $h(t)$ dată de relația (29) se poate calcula și analitic, rezultînd [4]:

$$\begin{cases} \text{Real}[H(i\omega)] = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{p^2 - \omega^2}{(p^2-\omega^2)^2 + 4\varphi^2\omega^2p^2}, \\ \text{Imag}[H(i\omega)] = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{-2\varphi\omega p}{(p^2-\omega^2)^2 + 4\varphi^2\omega^2p^2}. \end{cases} \quad (46)$$

Pentru verificarea algoritmului propus, se vor calcula funcţiile date de (42) şi (46) într-un program numit TFD, a cărui schemă logică se dă în figura 11.

Întrucît programul PØND dă funcţia pondere $h(t)$ eşantionată numai în 15 puncte (estimarea într-un număr mai mare de puncte depăşind

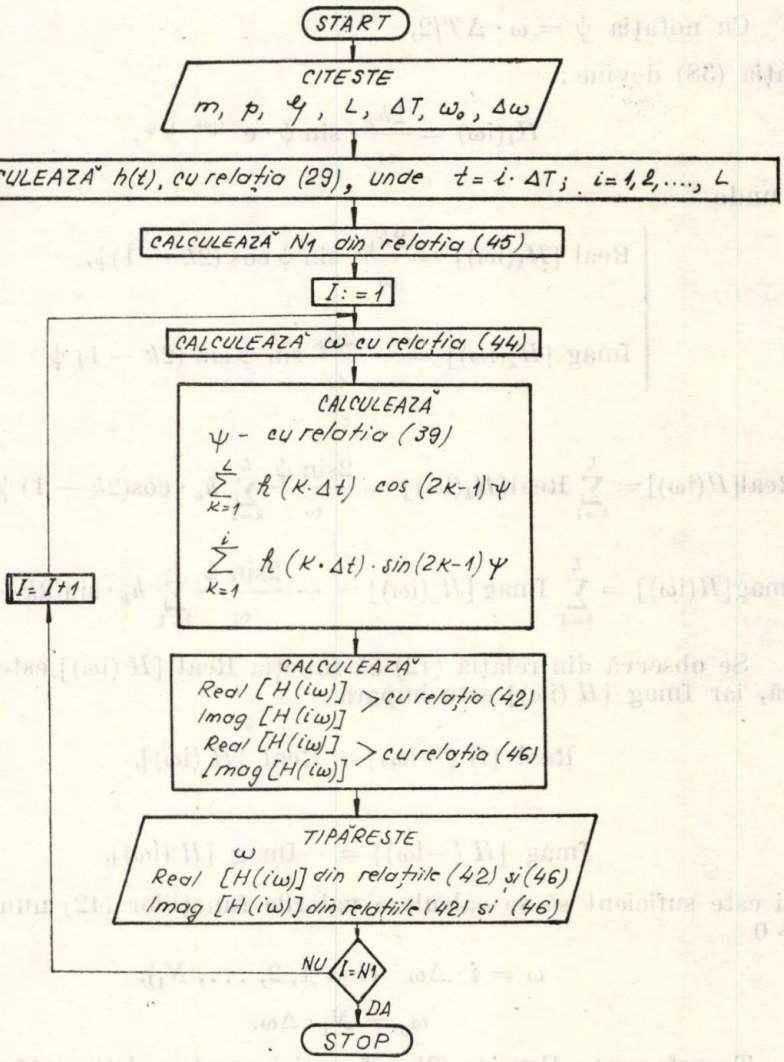


Fig. 11

memoria calculatorului Felix C 32), în programul TFD se va utiliza — pentru verificarea algoritmului — eşantionarea funcţiei analitice $h(t)$, dată de relaţia (29) în $L = 160$ puncte, cu intervalul de eşantionare egal cu un sfert din intervalul corespunzător în PØND:

$$\Delta T = \pi/360, \text{ iar } \Delta\omega = 2. \tag{47}$$

Programul TFD are timpul de rulare egal cu 16 minute.

În tabelul 2 se redă o parte din rezultatele tipărite.

Din compararea coloanelor 2 cu 3 şi 4 cu 5 din tabelul 2, se observă precizia bună a metodei numerice utilizate.

B) O altă posibilitate, mai eficientă, de calcul numeric al relaţiei (2) este utilizarea transformatei Fourier rapide.

Tabelul 2

ω	Real$[H(i\omega)]$ din (42)		Real$[H(i\omega)]$ din (46)		Imag$[H(i\omega)]$ din (42)		Imag$[H(i\omega)]$ din (46)	
2	2,49		2,50		−0,23		−0,25	
6	2,49		2,48		−0,75		−0,82	
10	2,37		2,31		−1,44		−1,54	
14	1,83		1,70		−2,22		−2,33	
18	0,76		0,56		−2,61		−2,66	
22	−0,21		−0,43		−2,22		−2,19	
26	−0,63	10^{-3}	−0,80	10^{-3}	−1,58	10^{-3}	−1,50	10^{-3}
30	−0,69		−0,82		−1,08		−0,98	
34	−0,63		−0,73		−0,76		−0,66	
38	−0,55		−0,63		−0,55		−0,46	
42	−0,47		−0,53		−0,42		−0,33	
46	−0,40		−0,45		−0,33		−0,24	
50	−0,34		−0,39		−0,26		−0,18	
54	−0,30		−0,33		−0,22		−0,14	

Elaborarea metodelor rapide de calcul pentru transformata Fourier, a făcut posibilă producerea analizatorului digital Fourier utilizat, printre altele, în studiul comportării dinamice a maşinilor unelte [18].

Un program analog cu cel ce urmează se prezintă în [26], citat în [6], p. 63.

Relaţia (2) se poate scrie :

$$H(i\omega) = \int_0^T h(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt, \tag{48}$$

unde T este timpul în care funcţia înregistrată $h(t)$ ia valori neneglijabile.

Transformata Fourier inversă este

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega)\cdot e^{it\omega}\, d\omega. \tag{49}$$

Cu metoda de integrare numerică a dreptunghiurilor, din (49) rezultă

$$h(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(i\cdot k\cdot\Delta\omega)\cdot e^{i\cdot t\cdot k\cdot\Delta\omega}, \tag{50}$$

care seamănă cu seria Fourier complexă :

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot \Delta\omega \cdot t} \tag{51}$$

pentru funcţia $h(t)$ considerată periodică, de perioadă $T' = 2\pi/\Delta\omega$, (52) $\Delta\omega$ alegîndu-se astfel ca $T' > T$, iar pentru $t > T$ se ia $h(t) = 0$.

Avînd în vedere formula coeficienţilor complecşi ai seriei Fourier şi identificînd relaţiile (50) şi (51), rezultă

$$c_k = \frac{1}{T'} \int_0^{T'} h(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \Delta\omega \cdot t} \, dt = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot H(i \cdot k \cdot \Delta\omega). \tag{53}$$

Dacă intervalul $(0, T')$ se discreditează cu pasul $t' = T'/N$ (54) integrala din (53) se calculează numeric :

$$c_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot H(i \cdot k \cdot \Delta\omega) = \frac{\Delta t'}{T'} \sum_{j=0}^{N-1} h(j \cdot \Delta t') \cdot e^{-2\pi i \frac{j \cdot k \cdot \Delta t'}{T'}}. \tag{55}$$

Rezultă pentru transformata Fourier directă şi discretă formula :

$$H(i \cdot k \cdot \Delta\omega) = \frac{T'}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(j \cdot \Delta t') \cdot e^{-2\pi i \frac{jk}{N}}, \tag{56}$$

cu $f(j \cdot \Delta t') = 0$ pentru $j > \dfrac{T}{T'} \cdot N$. (57)

În relaţia (56) trebuie să se calculeze o sumă de forma

$$R(k) = \sum_{j=0}^{N-1} S(j) \cdot W^{j \cdot k}, \tag{58}$$

cu $W = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$; $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $N = 2^n$; n întreg. (59)

Pentru calculul relaţiei (58) se va utiliza algoritmul lui Forman [1, 10], pe care îl vom exemplifica pentru $n = 3$.

Se exprimă j şi k în baza 2 :

$$\begin{aligned} j &= j_2 \cdot 2^2 + j_1 \cdot 2^1 + j_0 \cdot 2^0, \\ k &= k_2 \cdot 2^2 + k_1 \cdot 2^1 + k_0 \cdot 2^0. \end{aligned} \tag{60}$$

Atunci, $W^{j\cdot k} = W^{k\cdot j_0\cdot 2^0} \cdot W^{kj_1\cdot 2^1} \cdot W^{k\cdot j_2\cdot 2^2}$, (61)

în care, de exemplu,

$$W^{k\cdot j_1\cdot 2^1} = W^{k_2\cdot j_1\cdot 2^3+(k_1\cdot 2^2+k_0\cdot 2^1+0,2^0)\cdot j_1} = e^{-\frac{2i}{8}\cdot[8k_2\cdot j_1+(k_1\cdot 2^2+k_0\cdot 2^1+0\cdot 2^0)j_1]} =$$

$$= W^{(k_1\cdot 2^2+k_0\cdot 2^1+0\cdot 2^0)\cdot j_1}. \quad (62)$$

Ținînd cont de această periodicitate și folosind notația

$$(a, b, c) = a\cdot 2^2 + b\cdot 2^1 + c\cdot 2^0, \quad (63)$$

relația (61) se scrie :

$$W^{f\cdot k} = W^{(k_2, k_1, k_0)j_0} \cdot W^{(k_1, k_1, 0)} W^{(k_0, 0, 0)\cdot j_2}, \quad (64)$$

unde

$$j_0, j_1, j_2, k_0, k_1, k_2 = 0 \text{ sau } 1 \quad (65)$$

Relația (58) devine :

$$R(k) = R(k_2, k_1, k_0) = \sum_{j_2=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{j_0=0}^{1}(j_2, j_1, j_0)\cdot W^{(k_0, 0, 0)j_2}\cdot W^{(k_1, k_0, 0)j_1}\cdot$$

$$\cdot W^{(k_0, 0, 0)j_0} \quad (66)$$

Cu notațiile

$$\sum_{j_2=0}^{1} S(j_2, j_1, j_0)\cdot W^{(k_0, 0, 0)j_2} = S_0(k_0, j_1, j_0), \quad (67$$

$$\sum_{j_1=0}^{1} S_0(k_0, j_1, j_0)\cdot W^{(k_1, k_0, 0)j_1} = S_1(k_1, k_0, j_0), \quad (68)$$

relația (66) se scrie :

$$R(k_2, k_1, k_0) = \sum_{j_0=0}^{1} S_1(k_1, k_0, j_0)\cdot W^{(k_2, k_1, k_0)\cdot j_0}. \quad (69)$$

Se formează astfel o recurență, scrisă pentru un n oarecare :

$$S_m(k_m, \ldots, k_0, j_{n-m-2}, \ldots, j_0) = \sum_{j_{n-m-1}=0}^{1} S_{m-1}(k_{m-1}, \ldots, k_0, j_{n-m-1}, \ldots j_0)\cdot$$

$$\cdot W^{(k_m, \ldots k_0, \underbrace{0, 0, \ldots 0}_{n-m-1})\, j_{n-m-1}}$$

pentru $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (70)

şi

$$R(k) = R(k_{n-1}, \ldots, k_0) = S_{n-1}(k_{n-1}, \ldots, k_0). \quad (71)$$

Se calculează funcţia de răspuns la frecvenţă, în paralel cu relaţiile (56) şi (46), cu datele numerice (31) şi:

$$T = 1{,}81 \text{ s, pentru care } h(T) = -0{,}22 \cdot 10^{-8};$$

$$T' > T \to T' = 2 \text{ s}; \quad N = 12{,}8; \quad t' = \frac{T'}{N} = \frac{1}{64} \text{ s}; \quad (72)$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T'} = 3{,}14159 \text{ s}^{-1}.$$

Programul, numit FRFP a fost rulat pe calculatorul Felix C 32, în timp de 3 minute şi 37 secunde. În tabelul 3 se redă o parte din rezultatele tipărite.

Tabelul 3

ω	Real[$H(i\omega)$] din (56)		Real[$H(i\omega)$] din (46)		Imag[$H(i\omega)$] din (56)		Imag[$H(i\omega)$] din (46)	
0,00	2,48		2,50		0,00		0,00	
3,14	2,47		2,49		−0,40		−0,40	
6,28	2,45		2,47		−0,86		−0,86	
9,42	2,33		2,35		−1,42		−1,42	
12,56	1,96		1,98		−2,06		−2,06	
15,70	1,23		1,25		−2,57		−2,57	
18,85	0,28		0,31		−2,61		−2,61	
21,99	0,43	$.10^{-3}$	0,41	$.10^{-3}$	−2,19	$.10^{-3}$	−2,19	$.10^{-3}$
25,13	−0,88		−0,75		−1,64		−1,64	
28,27	−0,85		−0,83		−1,18		−1,18	
31,41	−0,81		−0,79		−0,85		−0,85	
34,55	−0,73		−0,79		−0,62		−0,62	
56,54	−0,33		−0,31		−0,12		−0,12	
94,24	−0,13		−0,11		−0,02		−0,02	
131,95	−0,08		−0,06		−0,00		−0,00	
165,65	−0,06		−0,03		−0,00		−0,00	
197,92	−0,06		−0,02		−0,00		−0,00	

În figura 12 se reprezintă sub forma diagramei Nyquist funcţiile de răspuns la frecvenţă, calculate respectiv cu relaţiile (56) şi (46); cele două curbe practic coincid.

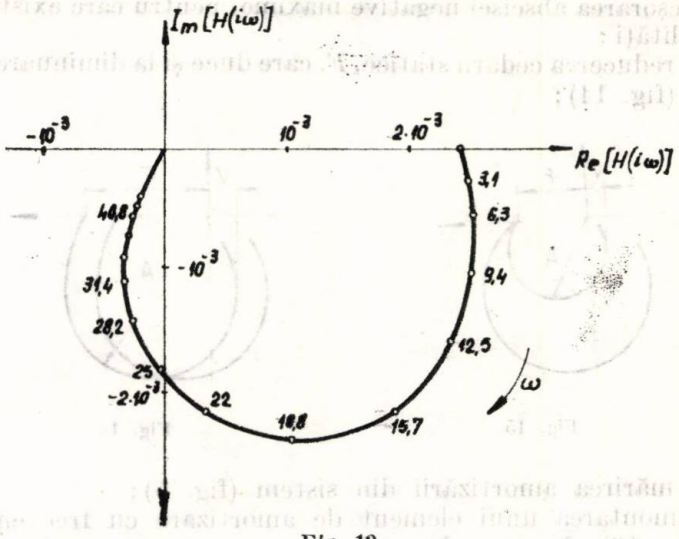


Fig. 12

Din tabelul 3 și din figura 12 se observă precizia foarte bună a metodei numerice folosite.

6. CONCLUZII

În cazul real, discordanța dintre numărul de 15 puncte în care programul PØND dă funcția pondere eșantionată și numărul de puncte necesar în programele TFD și FRFP (160, respectiv 128) se înlătură utilizînd în PØND un calculator de memorie mai mare sau, mai eficient, aplicînd interpolarea funcției furnizată de programul PØND.

Forma și poziția curbei răspunsului la frecvență (fig. 12) dă indicații privind comportarea dinamică și stabilitatea unei mașini unelte [13]:

Abscisa negativă cea mai mare (V) a punctelor de pe grafic (fig. 13) este o măsură a tendinței spre vibrare. Deci, pentru a îmbunătăți comportarea dinamică a mașinii unelte sînt necesare măsuri care să con-

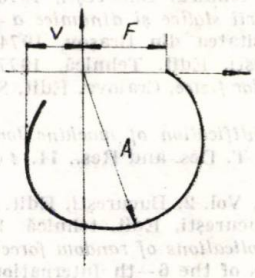


Fig. 13

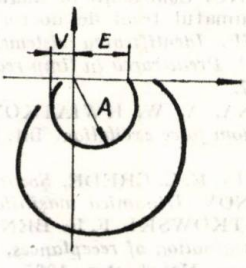


Fig. 14

ducă la micşorarea abscisei negative maxime, pentru care există următoarele posibilităţi :

a) — reducerea cedării statice, F, care duce şi la diminuarea cedării la rezonanţă (fig. 14);

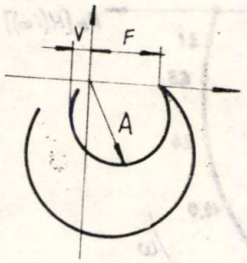


Fig. 15

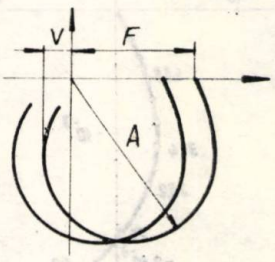


Fig. 16

b) — mărirea amortizării din sistem (fig. 5);

c) — montarea unui element de amortizare cu frecvenţă proprie ridicată (fig. 16), de exemplu prelucrarea cu un cuţit „gît de lebădă".

Programele de calcul necesare identificării statistice a funcţiei pondere şi de obţinere a funcţiei de răspuns la frecvenţă a unui sistem fiind testate, autorul are în vedere de a le aplica mai întîi la identificarea unui strung, ulterior şi altor maşini unelte.

Primită la redacţie la 25 aprilie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. M. BÉLLANGER, P. BONNAVAL, *Quelques applications de la transformation de Fourier rapide*, L'onde électrique, **48**, 1968, p. 962—972.
2. S. BRAUN, *Fast dynamic test for on-line measurements of machine tools*, Annals of CIRP, **22**, *1* (1973), p. 113—114.
3. S. BUMBARU, E. CEANGA, *Identification of linear processes by learning models*, Lucrări ştiinţifice, vol. V, Institutul Politehnic Galaţi, 1972.
4. GH. BUZDUGAN, L. FETCU, M. RADEŞ, *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1975.
5. E. CONSTANTIN, *Contribuţii la studiul unei maşini unelte speciale*, Teză de doctorat, Universtatea din Braşov, 1974.
6. L. DEACU, GH. PAVEL, *Vibraţii la maşini unelte*, Cluj-Napoca, Edit. Dacia, 1977.
7. P. DODOC, *Strunjirea de înaltă precizie*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1970.
8. A. EPUREANU, *Contribuţii la studiul comportării statice şi dinamice a maşinilor unelte*, Rezumatul tezei de doctorat, Universitatea din Braşov, 1974.
9. P. EYKHOFF, *Identificarea sistemelor*, Bucureşti, Edit. Tehnică, 1977.
10. S. GARLAŞU, *Prelucrarea în timp real a semnalelor fizice*, Craiova, Edit. Scrisul românesc, 1977.
11. N. H. HANNA, A. W. KWIATKOWSKI, *Identification of machine tool receptances by random force excitation*, Int. Jour. of M.-T. Des. and Res., **11**, *4* (1971), p. 309—329.
12. M. C. HARRIS, E. C. CREDE, *Şocuri şi vibraţii*, Vol. 2, Bucureşti, Edit. tehnică, 1968.
13. V. A. KUDINOV, *Dinamica maşinilor unelte*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1970.
14. A. W. KWIATKOWSKI, F. E. BENNETT, *Applications of random force excitation to the determination of receptances*, Proceedings of the 6—th International MTDR Conference, Manchester, 1665, p. 173—196.

15. G. W. LANG, J. R. LEMON, *Structural dynamics in machine-tool chatter*, Trans. ASME, Series B, **87**, *4* (1965), p. 455—463.
16. S. LARIONESCU, P. SVASTA, *Folosirea secvențelor pseudoaleatoare binare la identificarea sistemelor mecanice*, Lucrările Conferinței „Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1975, p. 269.
17. T. MORIWAKI, K. IWATA, *In-process analysis of machine tool structure*, Trans. ASME, Series B, **98**, *1* (1976), p. 301.
18. W. MÜLLER, *Dynamische Untersuchungen an Werkzeugmaschinen mit digitaler Fourier analysation*", Industrie Anzeiger, **94**, *33* (1972), 704—744.
19. H. OPITZ, W. WECK, *Determination of the transfer function by means of spectral density measurement*, Proceedings of the 10-th International MTDR Conference, 1969, p. 349—378.
20. S. M. PANDIT, T. L. SUBRAMANIAN, S. M. WU, *Modeling machine tool chatter by time series*, Trans. ASME, Series B, **97**, *1* (1975), p. 211—215.
21. C. PENESCU, G. IONESCU, M. TERTISCO, E. CEANGA, *Identificarea experimentală a proceselor automatizate*, București, Edit. tehnică, 1971.
22. M. M. SADEK, W. A. KNIGHT, *Dynamic acceptance tests*, Trans. ASME, Series B, **97**, *1* (1975), p. 203—210.
23. E. SAVAS, *Conducerea cu calculatoare a proceselor industriale*, Edit. tehnică, 1969.
24. M. TIRON, *Prelucrarea statistică și informațională a datelor de măsurare*, București, Edit. tehnică, 1976.
25. M. WECK, *Analyse linearer Systeme mi Hilfe der Spectraldichtemessung*, Teză de doctorat, Aachen, 1969.
26. M. WECK, H. OPITZ, *Anwendung aperiodischer Testsignale zur Bestimmung des dynamischen Nachgiebkeitsverhaltens von Werkzeugmaschinen*, Aachen, 1971.
27. * * * *System /360 scientific subroutine package — version III.*
28. G. BĂLAN, *Asupra identificării funcției pondere a unui strung*, Lucrările Conferinței „Creația tehnică și fiabilitatea", Secția „Mașini unelte, scule și dispozitive", Institutul Politehnic Iași, 1978, p. 262—265.
29. G. BĂLAN, *Studiul dinamicii mașinilor unelte utilizînd transformata Fourier numerică*, Lucrările simpozionului „Proiectarea asistată de calculator", Universitatea din Brașov, vol. II, 1978, p. 189—193.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL TEHNOLOGIILOR DE PRELUCRARE A FILIERELOR PENTRU TREFILARE PRIN MIJLOACE NECONVENŢIONALE

de I. SPULBER*
Institutul politehnic Bucureşti
şi C. SPULBER**
Întreprinderea Optică Română — IOR Bucureşti

După ce se face o scurtă analiză a unor rezultate obţinute pînă în prezent în realizarea filierelor pentru trefilare, se prezintă unele consideraţii asupra prelucrării prin electroeroziune a filierelor cu ajutorul electrodului sîrmă cu profil care permite un regim de lucru hidrodinamic corespunzător. În cadrul acestora se caută să se stabilească factorii ce favorizează gradul de prelucrabilitate al filierelor din carburi foarte dure.
În continuare se prezintă soluţiile de optimizare în sensul obţinerii unui grad de prelucrabilitate cît mai mare, respectiv a unei prelucrări cît mai precise şi a suprafeţelor cît mai netede.

1. INTRODUCERE

Se ştie că trefilarea este o metodă care asigură o productivitate înaltă în procesul de fabricare a sîrmelor de diferite diametre. Aceasta se oglindeşte, sintetic, în cantitatea de produs finit realizată în unitatea de timp.

După afirmaţiile din [8] se pot obţine 40 m sîrmă de oţel într-o secundă, însă datorită acestui randament ridicat, îndeosebi la trefilarea sîrmelor de diametre mici (9 mm ... 1, 2 mm), datorită pe de o parte durităţii deosebit de mari a materialului ecruisat, iar pe de altă parte creşterii relative a ariei suprafeţei orificiului filierei faţă de secţiunea sîrmei, uzura filierei este foarte mare şi în consecinţă durabilitatea ei scade foarte mult. În aceste condiţii se impune folosirea unor materiale foarte dure pentru filiere cu un coeficient mic de frecare pe metale, ca, de exemplu, oţel de scule sau carburi metalice.

În ultima vreme, pentru executarea filierelor se utilizează pulberile sinterizate şi diamantul. Introducerea materialelor dure şi extradure pentru executarea filierelor a mărit durabilitatea acestora, dar în acelaşi timp a complicat tehnologiile lor de prelucrare după metode clasice. La aceasta s-a mai adăugat şi gama mare de diametre care urmau să fie realizate prin trefilare. Folosirea tehnologiilor neconvenţionale la prelucrarea filierelor a scos întrucîtva din impas obţinerea acestora, realizîndu-se pe această cale adevărate performanţe.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 1, 1981, P. 145—151

Astfel, s-au realizat după afirmațiile [3] filiere din carbură de tungsten în diametru de 0,018 mm și toleranțe de $\pm$ 0,0013 mm, iar după afirmațiile [5] s-au realizat filiere cu diametru și mai mic, de 0,005 mm, obținînd de asemenea rezultate deosebite.

2. CERCETARE PRELIMINARĂ

Analizînd lucrările de specialitate despre filiere se constată că cercetările efectuate se referă în special la materialele de execuție, la dimensiunile lor, la calitatea prelucrării, precum și la performanțele la care s-a ajuns dar fără a avea un suport științific.

În continuare, vom prezenta unele rezultate experimentale folosite în tehnică. Astfel, după afirmațiile din [10] rezultă că precizia de execuție a filierelor prin ultrasunete este mai bună decît cea rezultată prin prelucrarea electroerozivă. În [9] se afirmă că rectificarea pur mecanică realizează o suprafață mai bine finisată decît rectificarea electrolitică. Din [1], rezultă că pentru filiere cu diametre mici (0,2 0,07 mm) se folosește diamant, justificînd că cele din carburi metalice se uzează mult prea repede.

Folosirea laserului în tehnică [2] a făcut să se obțină găuri în oțel cu diametre de 0,01 mm, cu adîncime de 4 mm, iar prin electroeroziune [4] se pot obține găuri cu diametru de 0,03 mm cu adîncime de 0,07 mm dacă se folosește un electrod rotitor.

Cu ajutorul ultrasunetelor [7], se prelucrează piesele ceramice cu o precizie de 0,05 mm, iar materialele dure se prelucrează cu o precizie de 0,01 ... 0,02 mm.

3. CONSIDERAȚII GENERALE

O problemă deocamdată greu de rezolvat este obținerea unei concentricități perfecte între axele de simetrie ale conului de lucru, conului de ungere, orificiului de lucru și conului invers. Realizarea coaxialității suprafețelor cilindrice și conice susmenționate, se poate face fie prin metoda generatoarei cinematice, fie prin metoda generatoarei materializate [6]. Tehnologiile clasice utilizează metoda generatoarei cinematice pe zone (zona conului de lucru, zona conului invers etc.), iar la tehnologiile neconvenționale se utilizează tot procedee de zonare și anume metoda generatoarei materializate.

Trecerea de la o zonă la alta în procesul prelucrării presupune schimbarea poziției de așezare a sculei sau a filierei de prelucrat, ceea ce implică apariția unor erori de coaxialitate.

În cele ce urmează, pe baza metodei generatoarei materializate, propunem o metodă care elimină prelucrarea succesivă a zonelor de lucru și anume prelucrarea prin electroeroziune cu electrod de sîrmă cu memorie.

4. PRINCIPIU TEHNOLOGIC

Presupunem că într-o bucată de metal sau material, bun conducător de electricitate, de formă paralelipipedică, cu fețele bine prelucrate, se execută cu una din metodele cunoscute un orificiu foarte fin. Prin acest

orificiu se introduce o sîrmă de oţel cu caracteristici de elasticitate ridicate. Sîrma este suficient de lungă încît să poată fi prelucrată la capete, în aşa fel încît ea să poată materializa generatoarele tuturor zonelor, figura 1. Precizăm că generatoarea g a electrodului de lucru este mai lungă decît lungimea generatoarei cilindrice a orificiului de prelucrat.

Prinsă la capete într-un mod oarecare, prin mişcări combinate de rotaţie şi translaţie se realizează profilul părţii de aşchiere a filierei, cu menţiunea că sîrma electrod este făcută dintr-un metal cu memorie (sîrmă de arc care a fost abătută de la forma iniţială sub acţiunea unor forţe exterioare şi care revine la forma iniţială imediat după ce au fost îndepărtate forţele exterioare).

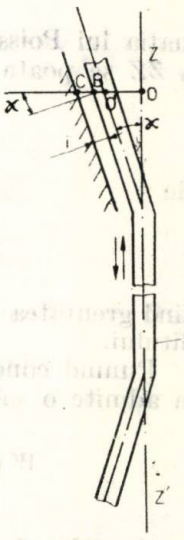


Fig. 1

5. CALCULUL REGIMULUI DE LUCRU

În cele ce urmează vom căuta să demonstrăm posibilitatea prelucrării prin electroeroziune cu electrod sîrmă a profilului părţii de aşchiere a filierei. Calculul va cuprinde doar parametrii de lucru hidrodinamici, deoarece în cazul de faţă acestea determină procesul tehnologic.

În figura 2 vom reprezenta o secţiune a electrodului sîrmă din figura 1 făcută de un plan perpendicular pe axa ZZ pe care am împărţit-o în două zone de lucru, zona I $BCMDE$ şi zona a II-a $BCC'D'DE$ în care am notat cu

$$OO' = \rho,\ BC = ED = \frac{i}{\cos\varkappa} \text{ şi } O'B = \frac{1}{2}d \cdot \frac{1}{\cos\varkappa}.$$

În conformitate cu [5], se recomandă pentru unghiul $\varkappa$ o valoare de 9°. În acest caz se poate considera, cu o aproximaţie destul de mică secţiunea eliptică a electrodului sîrmă cu o secţiune circulară.

Ecuaţiile celor două cercuri scrise în coordonate polare sînt, pentru cercul BAE

$$r = \frac{d}{2\cos\varkappa}, \qquad (1)$$

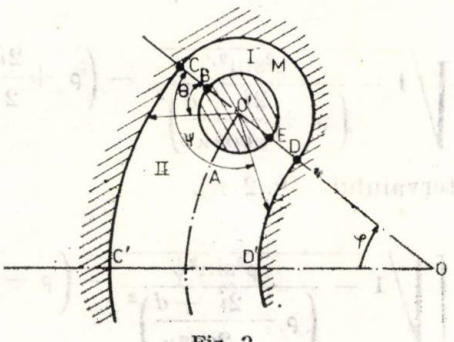


Fig. 2

iar pentru cercul CMD

$$r = \frac{d}{2\cos\varkappa} + \frac{i}{\cos\varkappa}. \tag{2}$$

Ecuaţia lui Poisson, în care am admis numai componenta vitezei după axa ZZ se poate scrie

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} = -k, \tag{3}$$

unde

$$k = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} + \sin\frac{\pi - \varkappa}{2}, \tag{4}$$

γ fiind greutatea specifică a electrolitului, iar p reprezintă presiunea electrolitului.

Punînd condiţia ca viteza pe contur să fie egală cu zero ($W = 0$), vom admite o soluţie a ecuaţiei (3) de forma

$$W(r) = C_0 k \left(r - \frac{d}{2\cos\varkappa}\right)\left(r - \frac{d + 2i}{2\cos\varkappa}\right), \tag{5}$$

care se anulează pe cercul BAE şi pe cercul CMD. Din această condiţie se determină constanta C_0, care este

$$C_0 = \frac{r}{\dfrac{d + i}{\cos\varkappa} - 4r}, \tag{6}$$

de aici rezultă

$$W(r)_I = \frac{r\left(\dfrac{g}{\nu\gamma}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \sin\dfrac{\pi - \varkappa}{2}\right)\left(r - \dfrac{d + 2i}{2\cos\varkappa}\right)\left(r - \dfrac{d}{2\cos\varkappa}\right)}{\dfrac{d + i}{\cos\varkappa} - 4r}, \tag{7}$$

unde ν este vîscozitatea cinematică a electrolitului.

În continuare vom studia repartiţia vitezei în interstiţiul zonei II, pe conturul CC'

$$r = \left(\rho + \frac{2i + d}{2\cos\varkappa}\right)\left[\sqrt{1 - \frac{\rho^2\sin^2\psi}{\left(\rho + \dfrac{2i + d}{\cos\varkappa}\right)^2}} - \left(\rho + \frac{2i + d}{2\cos\varkappa}\right)\cos\theta\right], \tag{8}$$

unde θ aparţine intervalului $[0, 2\pi]$,
pe conturul $D'D$

$$r = \left(\rho - \frac{2i + d}{2\cos\varkappa}\right)\left[\sqrt{1 - \frac{\rho^2\sin^2\psi}{\left(\rho - \dfrac{2i + d}{2\cos\varkappa}\right)^2}} - \left(\rho - \frac{2i + d}{2\cos\varkappa}\right)\cos\psi\right], \tag{9}$$

unde ψ aparţine intervalului $\left[\pi - \operatorname{arctg} \frac{\rho - \frac{2i+d}{2\cos\varkappa}}{\rho}, \pi + \operatorname{arctg} \frac{\rho - \frac{2i+d}{2\cos\varkappa}}{\rho}\right]$,

iar pe conturul ABE

$$r = \frac{d}{2\cos\varkappa}. \tag{10}$$

Deoarece ne interesează repartiţia vitezei în domeniul $C'C$ şi BA, ca şi în cazul anterior, vom considera soluţia de forma

$$W(r, \theta) = C_0' k \left(r - \frac{d}{2\cos\varkappa}\right)\left\{r - \left(\rho + \frac{2i+d}{2\cos\varkappa}\right)\left[\sqrt{1 - \frac{\rho^2\sin^2\theta}{\left(\rho + \frac{2i+d}{2\cos\varkappa}\right)^2}} - \left(\rho + \frac{2i+d}{2\cos\varkappa}\right)\cos\theta\right]\right\}, \tag{11}$$

constanta C_0' putînd fi determinată făcînd o aproximaţie legată de dubla inegalitate $\rho \gg \frac{d}{2\cos\varkappa} \gg \frac{i}{\cos\varkappa}$,

$$C_0' \simeq \frac{1}{2\left(\frac{\rho}{r}\cos\theta - 2 - \frac{\rho^2}{r^2} \cdot \frac{1 + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}, \tag{12}$$

de unde rezultă

$$W(r, \theta) = \frac{r^2\cos^2\theta\left(\frac{1}{\nu\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \sin\frac{\pi - \varkappa}{2}\right)\left(r - \frac{d}{2\cos\varkappa}\right)}{2[\rho r\cos^3\theta - 2r^2\cos^2\theta - \rho^2(1 + \sin^2\theta)]} \times \tag{13}$$

$$\times\left\{r - \left(\rho + \frac{2i+d}{2\cos\varkappa}\right)\left[\sqrt{1 - \frac{\rho^2\sin^2\theta}{\left(\rho + \frac{2i+d}{2\cos\varkappa}\right)^2}} - \left(\rho + \frac{2i+d}{2\cos\varkappa}\right)\cos\theta\right]\right\}.$$

Debitul este dat de relaţia

$$Q = \iint_D W(r, \theta)\,dr\,d\theta \tag{14}$$

pentru zona I, cînd $r = \dfrac{d + 2i}{2\cos}$ vom obține viteza maximă

$$W_{I max} = \frac{i^2}{4}\left(\frac{1}{\nu\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \sin\frac{\pi - \varkappa}{2}\right). \tag{15}$$

Avînd în vedere că $\sin\dfrac{\pi - \varkappa}{2} < 1$, atunci

$$W_{I max} = \frac{i^2}{4\nu\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{16}$$

Dacă considerăm pentru prelucrările de finisare valorile $i = 0{,}01$ mm; $\gamma = 0{,}9\dfrac{g}{cm^3}$; $\nu = 0{,}9 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$ vom obține $W_{I\ max} = 2{,}8$ m/s și dacă vom face calcule pentru $W_{II max}$ (în zona a doua), luînd ca valori ale lui $\varkappa = 9°$; $d = 0{,}02$ (mm); $z = \text{const.}$, $\varphi = 60°$ și $\psi = 54°$ vom constata că valoarea raportului vitezelor $\dfrac{W_{I max}}{W_{II max}} = 142$, deci foarte mare.

Natura curgerii în interstițiul BC este dată de formula $R_e = \dfrac{W dx}{\nu}$, unde $dx = BC = \dfrac{i}{\cos\varkappa}$; din calcule rezultă $R_e = 46\,465$, deci curgere turbulentă.

6. CONCLUZII

Utilizarea unui electrod sîrmă cu profil memorie în scopul prelucrării prin electroeroziune a filierelor permite obținerea unui regim de lucru hidrodinamic corespunzător, deci o astfel de lucrare este posibilă.

Viteza de lucru a dielectricului și implicit a particulelor erodate este mai mare în zona de lucru decît în vecinătate, ceea ce asigură un transport al acestor particule în afara zonei de lucru ușurînd astfel prelucrarea.

Primită la redacție la 28 mai 1980

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Filiere cu diamant pentru trefilarea sîrmei fine de platină folosite în producția acidului azotic*, Industrial Diamond Review, 344, iulie, 1969, D.O.S. 166, p. 286.
2. * * * *Mașină de tăiat cu laser*, Construcții de Mașini, 03.027, București, 1978.
3. * * * *Organizația specializată în fabricarea sculelor miniaturale*, Industrial Diamond Review, sept., 1967, p. 398–399.

4. * * * *Prelucrarea materialelor prin electroeroziune. Metodele matriţelor*, Uzina electromagnetica, Bucureşti I.D.T. 32/375, Bucureşti, 1965, p. 38—39.
5. * * * *Prospect SODIF* (Société Diamantaire de France).
6. E. BOTEZ, *Maşini unelte*, vol. 1, Editura tehnică, Bucureşti, 1977, p. 454—460.
7. C. COLCEA, D. DUMITRESCU, *Prelucrări electrodinamice cu plasmă şi cu ultrasunete*, Studiul de sinteză IDT, Bucureşti, 1971.
8. I. GAVRILAŞ, ş.a., *Tehnologii de prelucrare cu scule din materiale dure şi extradure*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1977.
9. V. PALEA, I. BAKEŞ, *Calitatea şi durata de funcţionare a tăişului sculelor din carburi sinterizate P 20 după rectificare electrolitică şi mecanică a diamantului*, Industrial Diamond Review, **29**, *346* (1969), p. 361—366.
10. C. TUZU, *Procese tehnologice moderne şi utilaje în construcţia de maşini*, I.D.T., vol. III, Bucureşti, 1969, p. 578.

NOTĂ

CALCULUL ARIEI FLANCURILOR ACTIVE LA ANGRENAJELE CILINDRICE CU DINȚI ÎNCLINAȚI ÎN EVOLVENTĂ

de GEORGE DOBRE, CONSTANTIN TÂRCOLEA, MIHAIL RAȘEEV

Institutul politehnic, București

Lucrarea dezvoltă calculul ariei flancurilor active ale roților unui angrenaj cilindric cu dinți înclinați în evolventă. Aria flancurilor active intervine în cercetările experimentale ale rezistenței la pitting.

1. INTRODUCERE

Stabilirea pe cale experimentală a limitei la pitting pe baza ariei ocupate de acesta impune cunoașterea ariei flancurilor active la fiecare roată — gradul de distrugere prin pitting fiind exprimat ca raportul procentual al mărimilor celor două arii [1].

În [2] s-a dedus expresia ariei flancurilor active la angrenajele cilindrice cu dinți drepți în evolventă. În prezenta lucrare demonstrația se face în cazul flancurilor în elicoidă evolventică ale roților cilindrice cu dinți înclinați, metoda utilizată fiind aplicabilă și altor tipuri de suprafețe.

2. BAZELE DE CALCUL

Fie un angrenaj paralel cilindric; profilul frontal activ este limitat de raza de cap $r_{a1(2)}$ și de raza punctului de intrare în angrenare r_{A1} (la roata conducătoare) sau de ieșire din angrenare r_{E2} (la roata condusă)[1)] vezi fig. 1. Deoarece în continuare se fac referiri la o roată în general, razele de început și de sfîrșit ale flancului și profilului activ se vor nota cu r_{fa} (corespondenta lui r_{A1} sau r_{E2}) și r_a (corespondenta lui $r_{a1(2)}$), (vezi fig. 2).

Fie (S) porțiunea elicoidei care reprezintă flancul dintelui și fie o reprezentare vectorială a sa,

$$\vec{r}_z = \vec{r}_z(\alpha, Z),\ (D) = \{(\alpha, Z)|,\ \alpha_{fa} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_a,\ 0 \leqslant Z \leqslant b\}, \tag{1}$$

în care unghiurile de presiune α_{fa} (corespondentul lui α_{A1} sau α_{E2}) și α_a (corespondentul lui $\alpha_{a1(2)}$) sînt

$$\alpha_{fa} = \arccos\frac{r_b}{r_{fa}},\quad \alpha_a = \arccos\frac{r_b}{r_a}. \tag{2}$$

1) Expresiile acestor raze nu se explicitează în prezenta lucrare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 1, 1981, P. 153–157

Unghiul de presiune α defineşte punctul curent K_I în planul frontal marginal I—I, iar Z este coordonata în direcţie axială a punctului curent $K_z(X, Y, Z)$ de vector de poziţie $\vec{r}_z$ al elicei (Γ) — intersecţia elicoidei cu cilindrul de rază r.

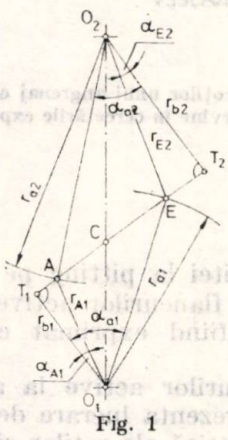


Fig. 1

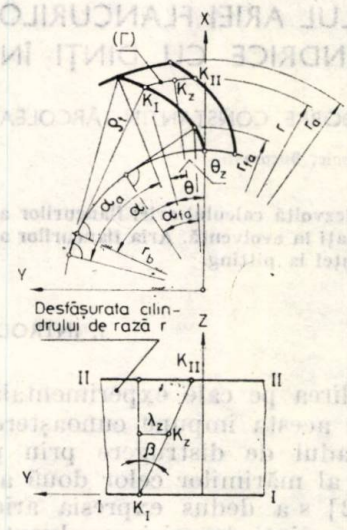


Fig. 2

Deoarece (S) este o porţiune de suprafaţă regulată, aria acestei porţiuni este dată de integrala de suprafaţă [3]

$$\sigma = \iint_{(S)} d\sigma = \iint_{(D)} \sqrt{EG - F^2}\, d\alpha\, dZ, \tag{3}$$

în care E, F şi G sînt coeficienţii

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}_z}{\partial \alpha}\right)^2, \qquad F = \frac{\partial \vec{r}_z}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \vec{r}_z}{\partial Z}, \qquad G = \left(\frac{\partial \vec{r}_z}{\partial Z}\right)^2. \tag{4}$$

Pentru calculul expresiilor (3) şi (4) se consideră sensul de înclinare indiferent al danturii. Dacă β_b şi β sînt unghiurile de înclinare ale dintelui pe cilindrul de bază şi, respectiv, pe cilindrul de rază r, rezultă arcul de cerc λ_z şi unghiul θ_z

$$\lambda_z = Z\,\mathrm{tb}\,\beta = Z\,\frac{\mathrm{tg}\beta_b}{\cos\alpha},$$

$$\theta_z = \theta \pm \frac{\lambda_z}{r} = \mathrm{tg}\alpha - \alpha \pm Z\,\frac{\mathrm{tg}\beta_b}{r_b}. \tag{5}$$

Deoarece coordonatele punctului curent K_z al elicei (Γ) sînt

$$X = r\cos\theta_z = r_b \frac{1}{\cos\alpha}\cos\left(\operatorname{tg}\alpha - \alpha \pm Z\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{r_b}\right),$$

$$Y = r\sin\theta_z = r_b \frac{1}{\cos\alpha}\sin\left(\operatorname{tg}\alpha - \alpha \pm Z\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{r_b}\right), \tag{6}$$

$$Z = Z,$$

rezultă

$$\frac{\partial X}{\partial\alpha} = r_b\left[\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\cos\left(\operatorname{tg}\alpha - \alpha \pm Z\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{\cos\alpha}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos\alpha}\sin\left(\operatorname{tg}\alpha - \alpha \pm Z\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{r_b}\right),\right.$$

$$\frac{\partial Y}{\partial\alpha} = r_b\left[\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\sin\left(\operatorname{tg}\alpha - \alpha \pm Z\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{r_b}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos\alpha}\cos\left(\operatorname{tg}\alpha - \alpha \pm Z\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{r_b}\right)\right],$$

$$\frac{\partial Z}{\partial\alpha} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial Z} = \mp\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{\cos\alpha}\sin\left(\operatorname{tg}\alpha - \alpha \pm Z\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{\cos\alpha}\right),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial Z} = \pm\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{\cos\alpha}\cos\left(\operatorname{tg}\alpha - \alpha \pm Z\frac{\operatorname{tg}\beta_b}{\cos\alpha}\right),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Z} = 1.$$

Cu aceste rezultate, coeficienţii (4) sînt

$$E = r_b^2\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^4\alpha},$$

$$F = \pm r_b\operatorname{tg}\beta_b\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}, \tag{8}$$

$$G = \operatorname{tg}^2\beta_b\frac{1}{\cos^2\alpha} + 1.$$

Utilizînd expresiile (7), elementul de arie (3) este

$$d\sigma = \sqrt{r_b^2\left[\frac{tg^2\alpha}{\cos^4\alpha}\left(tg^2\beta_b\frac{1}{\cos^2\alpha}+1\right)-tg^2\beta_b\frac{tg^4\alpha}{\cos^4\alpha}\right]}\,d\alpha\,dZ =$$

$$= \pm r_b\frac{1}{\cos\beta_b}\frac{tg\alpha}{\cos^2\alpha}\,d\alpha\,dZ = \pm r_b\frac{1}{\cos\beta_b}tg\alpha\,d(tg\alpha)\,dZ; \tag{9}$$

în mod logic, se va accepta pentru elementul de arie semnul plus.

Observaţia 1. Ţinînd seama că razele de curbură normală şi frontală într-un punct curent al elicoidei sînt legate prin egalitatea

$$\rho_n = \rho_t\frac{1}{\cos\beta_b}, \tag{10}$$

elementul de arc ds_n în planul normal pe linia generatoare a elicoidei şi elementul de arc ds_t al evolventei sînt dependente în mod analog

$$ds_n = ds_t\frac{1}{\cos\beta_b} \tag{11}$$

rezultă prin înlocuiri şi transformări

$$ds_n = \frac{1}{\cos\beta_b}\rho_t\,d(\theta+\alpha) = r_b\frac{1}{\cos\beta_b}tg\alpha d(tg\alpha). \tag{12}$$

Cu această expresie, elementul de arie al elicoidei se obţine şi astfel

$$d\sigma = ds_n\,dZ = r_b\frac{1}{\cos\beta_b}tg\alpha\,d(tg\alpha), \tag{13}$$

expresia de mai sus fiind identică cu (9).

Prin integrarea expresiei (3) rezultă

$$\sigma = r_b\frac{1}{\cos\beta_b}\int_0^b dZ\int_{\alpha_{fa}}^{\alpha_a} tg\alpha\,d(tg\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}r_b\frac{b}{\cos\beta_b}(tg^2\alpha_a - tg^2\alpha_{fa}). \tag{14}$$

Utilizînd (2), se obţine o altă formă a ariei flancului activ

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{b}{\cos\beta_b}\frac{r_a^2 - r_{fa}^2}{r_b}. \tag{15}$$

Particularizate la angrenajul cu dinţi drepţi, expresiile (14) şi (15) capătă forma

$$\sigma = \frac{1}{2} r_b b (\mathrm{tg}^2 \alpha_a - \mathrm{tg}^2 \alpha_{fa}) = \frac{1}{2} b \frac{r_a^2 - r_{fa}^2}{r_b}. \tag{16}$$

Observaţia 2. Analiza comparativă a expresiilor (14) şi (15) cu (16) arată că, dacă la roata cu dinţi drepţi un factor al ariei este lăţimea b a coroanei dinţate, la roata cu dinţi înclinaţi factorul similar este lungimea segmentului $b/\cos\beta_b$ de pe dreapta generatoare a elicoidei.

Suma ariilor flancurilor active ale unei roţi dinţate cu numărul de dinţi z este

$$\sigma_s = \sigma z = \frac{1}{2} z r_b \frac{b}{\cos \beta_b} (\mathrm{tg}^2 \alpha_a - \mathrm{tg}^2 \alpha_{fa}) = \frac{1}{2} z \frac{b}{\cos \beta_b} \frac{r_a^2 - r_{fa}^2}{r_b}. \tag{17}$$

Primită la redacţie la 18 iunie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. G. NIEMANN, W. RICHTER, *Versucherergebnisse zur Zahnflanken—Tragfähigkeit*, Konstruktion, *9*, p. 360—364 şi *10*, p. 397—402 (1960).
2. M. RAŞEEV, *Relaţie de calcul al suprafeţei active a flancurilor dinţilor evolventici ai uneiroţi dintate cilindrice*, Buletinul Institutului politehnic din Bucureşti, seria Mecanică, **XL**, *4*, p. 55—59 (1978).
3. E. MURGULESCU, S. FLEXI, O. KREINDLER, O. SACTER, M. TÂRNOVEANU, *Geometrie analitică şi diferenţială*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.

RECENZII

SIMILITUDE AND MODELLING (SIMILITUDINE ŞI MODELARE).

EDITATĂ DE : E. Szücs,
profesor la Universitatea L Eötvös, Budapesta
şef al grupului de cercetare tehnică,
Akadémia Kiadó, Budapest, 1980.

Revoluţia ştiinţifico-tehnică a produs dezvoltărea vertiginoasă a informaţiilor, ramurile ştiinţei tinzînd în acest sens să devină din ce în ce mai specializate. Proiectarea tehnologică, ramură ştiinţifică importantă, se realizează prin modelare, modelarea tehnologică avînd drept scop prezicerea celor mai importanţi parametrii şi proprietăţi ale sistemelor care urmează a fi realizate.

Lucrarea prezintă într-o formă accesibilă cunoştinţe teoretice asupra teoriei similitudinii. Aşa cum rezultă chiar din titlu, cartea se adresează unui public în parte avizat, care posedă baza matematică necesară.

Textul este foarte concis şi clar, fiind ilustrat cu numeroase figuri şi aplicaţii care ajută la înţelegerea problemelor tratate.

Scopul pe care şi l-a propus autorul volumului de faţă este de-a prezenta şi unifica metoda similitudinii, folosind aparatul matematic simplu, în vederea aplicării în diferite domenii tehnice.

Prima parte a lucrării prezintă bazele teoretice ale metodei similitudinii, tipurile de probleme (directe, indirecte şi inductive) şi modul de rezolvare (prin soluţii analitice, numerice sau experimentale), analiza dimensională şi modelarea, definind noţiunile de bază : model matematic, model de calcul şi model fizic.

Partea a doua a lucrării prezintă aplicaţii ale metodei similitudinii în cîteva domenii tehnice : conductivitate termică, dinamica fluidelor, deformare elastică, procese şi reacţii chimice.

Faţă de literatura vastă şi foarte diferenţiată privind similitudinea, lucrarea de faţă prezintă o metodă unică, aplicabilă în diverse domenii tehnice.

Volumul conţine 335 pagini, 82 figuri şi 12 tabele, avînd următoarea structură : prefaţa, partea I — teorie, partea a II-a — aplicaţii, postfaţă, bibliografie comentată, index alfabetic de autori şi simboluri.

Graziella Mateescu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 40, nr. 2 martie—aprilie 1981

SUMAR

STUDII

I. SETEANU, M. ERHAN, A. MARINOV, Transportul aluviunilor în regim nepermanent. III. Evoluţia procesului de pavare 163

ALECSANDRU D. STAN, SORIN OANĂ, Pierderea prin neetanşeitate la spaţiul inelar cu un perete mobil 171

T. OROVEANU, Determinarea căderii de presiune în curgerea neizotermică a unui lichid printr-o conductă 185

GHEORGHE PANAIT, Contribuţii la studiul dinamicii corpurilor cu masă variabilă . 199

ŞTEFAN STAICU, Asupra dinamicii solidului în mişcarea plan-paralelă 207

GABRIEL D. POPA, Metodă de calcul, utilizînd seriile duble trigonometrice, pentru placa rigidizată cu nervuri excentrice dispuse pe două direcţii 223

ZAHARIA GHEORGHIU, Asupra integrării sistemului de ecuaţii diferenţiale al vibraţiilor structurilor cu un număr finit de grade de libertate, excitate seismic. . . 239

MAGDALENA POSEA, Aspecte privind calculul eforturilor şi deplasărilor arborilor . . 247

CRISTIAN FĂCIU, Aspecte cinematice în problema tragerii 265

T. TURCOIU, N. APOSTOLESCU, O metodă de determinare a legii deplasării pistonului-sertar al pompelor de injecţie 275

T. SIRETEANU, S. PĂRĂIAN, Criterii pentru aprecierea confortului şi aderenţei roată-sol la automobile 285

I. SPULBER, C. SPULBER, Asupra unor condiţii de regim hidrodinamic la prelucrarea prin electroeroziune cu electrod conic 297

LUCIAN CĂPITANU, Cercetări privind utilizarea lagărelor sinterizate ca înlocuitoare ale lagărelor turnate, în construcţia motoarelor de tractor 307

RECENZII 317

TRANSPORTUL ALUVIUNILOR ÎN REGIM NEPERMANENT III. EVOLUȚIA PROCESULUI DE PAVARE

de I. SETEANU, M. ERHAN și A. MARINOV
Institutul politehnic București

Patul mobil al unui rîu tinde, în timp, către o configurație de echilibru, ca urmare a proceselor de eroziune și depunere.
Se propune un model matematic de simulare a evoluției patului albiei unui rîu, luîndu-se în considerare efectul modificării structurii granulometrice a sedimentului. Bilanțul detaliat pe fracții este efectuat în conformitate cu schema lui Toffaleti [4].
Se prezintă cîteva exemple de utilizare a unui program în limbaj FORTRAN IV, elaborat de către autori, cu rezultatele numerice corespunzătoare.

1. INTRODUCERE

Deși în literatura de specialitate se întîlnesc numeroase articole și studii privind transportul permanent și uniform de sediment [1], încercările de modelare a regimului nepermanent de transport al aluviunilor sînt mult mai puțin numeroase. Considerarea modificării granulometriei materialului solid de fund datorită interacțiunii dintre procesele de transport pentru fazele lichidă și solidă este de dată relativ recentă [2], [3], existînd tendința de folosire a unor relații de extrapolare insuficient legate de procesul fizic.

În lucrarea de față, care face parte dintr-un ciclu mai lung [4], [5], se prezintă un model de simulare a modificării granulometriei patului, bazat pe ecuațiile de bilanț masic detaliat pe fracțiuni granulometrice, separat pentru stratul de fund și pentru materialul în suspensie, pentru o curgere uniformă și staționară. Se compară rezultatele obținute cu cercetările altor autori. Într-o lucrare ulterioară se va generaliza modelul propus la cazul mișcării gradual variate, pentru secțiuni de formă arbitrară.

2. MODELUL FIZIC AL TRANSPORTULUI SOLID

Se consideră o porțiune de lungime L din albia unui rîu, avînd o pantă uniformă S_0 a patului și o lățime B, presupusă constantă, în care se stabilește o curgere uniformă și staționară de debit Q. Se admite că aportul de debit solid în secțiunea amonte este neglijabil, în timp ce prin secțiunea aval trece un debit solid Q_t diferit de zero. Se consideră că zona studiată are o lungime suficient de mare pentru ca, în curent, să se stabilească debitul solid de regim al curgerii uniforme și staționare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 2, 1981, P. 163–170

Procesul fizic al transportului solid, însoțit de fenomene de erodare și depunere este obiectul unui domeniu deosebit de complex al hidraulicii tehnice, datorită numărului mare de parametri ce guvernează procesul, precum și ca urmare a scărilor diferite ale mișcărilor fazelor lichidă și solidă. Marea majoritate a cercetărilor întreprinse în acest domeniu conduc la formule globale ale debitului solid de forma

$$Q_t = f(v, d_e, S_0, \ldots), \tag{1}$$

unde $v = Q/(BL)$ este viteza medie a fazei lichide, iar d_e reprezintă diametrul efectiv al granulelor din pat, definit în mod variat de diverși autori. Urmînd pe H.A. Einstein [6], în prezent se constată tendința ca, pe considerente semiempirice, să se detalieze descrierea procesului de transport pe fracții granulometrice [7], pe baza cărora se poate întreprinde o analiză a modificării structurii granulometrice a patului albiei, ca urmare a transportului solid („pavare").

Pentru simplificare, în această lucrare se va admite că stratul aluvionar, pînă la roca de bază, are o grosime atît de mică încît să se poată neglija, la orice moment de timp, neuniformitatea distribuției granulometrice pe verticală. În cazul general această ipoteză se extinde doar la o anumită *grosime de influență*, dependentă de diametrul efectiv al granulelor.

Notînd cu G_i greutatea granulelor corespunzătoare unității de arie a patului și cu C greutatea granulelor solide care sînt antrenate în curent într-un interval de timp Δt, se obține greutatea finală G_f a granulelor rămase în pat din relația :

$$G_f = G_i - C. \tag{2}$$

Mărimea C este dependentă de durata Δt, precum și de cantitatea totală G_f de granule ce rămîn în pat. Dacă se notează

$$C' = C/G_f \tag{3}$$

și se impune mărimea lui C', se poate obține intervalul de timp Δt necesar pentru realizarea condiției (3). Reciproc, se poate estima, pentru Δt dat, mărimea necesară a raportului C'. Deoarece condițiile fizice impuse nu sînt compatibile cu posibilitatea depunerilor aluvionare, din (3) rezultă condiția

$$0 \leqslant C' < 1. \tag{4}$$

Procedeul de calcul detaliat pe fracții granulometrice al debitului solid propus de către F. Toffaleti, prin generalizarea modelului lui H. A. Einstein, permite ca, pentru o curbă de distribuție granulometrică a patului și un regim de curgere uniformă și staționară cunoscut să se determine atît debitul solid total de echilibru, cît și spectrul său granulometric (proporțiile în curent ale fiecărei fracții). Notînd cu $t_i^{(0)}$, respectiv $t_f^{(0)}$ ponderile fracțiilor de diametru d_i în debitul masic solid la începutul și sfîrșitul

intervalului de timp Δt, cantitatea de material solid de diametru d_i antrenată din pat în acest interval de timp este

$$C(t_i^{(i)} + t_f^{(i)})/2 . \tag{5}$$

Greutatea aceleiaşi fracţii rămasă în pat se scrie :

$$b_f^{(i)} G_f = b_f^{(i)} (G_i - C), \tag{6}$$

unde prin $b^{(i)}$ s-a notat ponderea fracţiei i în pat ; analog, la începutul intervalului în pat se afla masa $b_i^{(i)} G_i$ de granule din aceeaşi fracţie.

Bilanţul masic pentru fracţia i se scrie :

$$b_i^{(i)} G_i - C (t_i^{(i)} + t_f^{(i)})/2 = b_f^{(i)} G_f, \tag{7}$$

rezultînd ponderile fracţiilor în pat la sfîrşitul intervalului de timp Δt :

$$b_f^{(i)} = b_i^{(i)} (1 + C') - C' (t_i^{(i)} + t_f^{(i)})/2. \tag{8}$$

Pentru a efectua bilanţul masic în curent este necesar să se cunoască cantitatea de sediment conţinută la un moment dat în faza lichidă pe distanţa L ; admiţînd că în zona de lungime L debitul solid $Q_t(x)$ creşte liniar şi observînd că masa solidă conţinută pe lungimea $\mathrm{d}x$ trece printr-o secţiune transversală în timpul $\mathrm{d}x/v$, rezultă

$$\int_0^L Q_t (x)/v \, \mathrm{d}x = \int_0^L Q_t x/(L v) \, \mathrm{d}x = Q_t L /(2v). \tag{9}$$

Bilanţul masic în curent pe fracţia i se scrie :

$$\Delta t (Q_{ti} t_i^{(i)} + Q_{tf} t_f^{(i)})/2 = L (Q_{ti} - Q_{tf})/(2v) -$$

$$- CBL (t_i^{(i)}) + t_f^{(i)})/2 . \tag{10}$$

Din această relaţie, sumată pe toate fracţiile i, dacă se cunosc ponderile granulometrice finale în curent $t_f^{(i)}$, se obţine mărimea intervalului de timp :

$$\Delta t = \frac{2L \, BG_i \, C'}{(Q_{ti} + Q_{tf}) (1 + C')} + \frac{Q_{ti} - Q_{tf}}{Q_{ti} + Q_{tf}} \cdot \frac{LBH}{Q}, \tag{11}$$

unde $H = Q/(Bv)$ este adîncimea de curgere.

Relaţiile (3), (8) şi (11) constituie un sistem iterativ din care se poate obţine modificarea secvenţială atît a granulometriei sedimentului în suspensie, cît şi a celui depozitat în pat, în condiţiile unui regim de curgere staţionar şi uniform.

Modificarea curbei granulometrice a patului aluvionar are ca rezultat schimbarea diametrului efectiv. Uzual, se admite că diametrul d_{65} (diametrul unei site prin care trece 65 % din materialul solid al unei probe) poate servi în acest scop. Porozitatea m a patului albiei se modifică în conformitate cu relația [2] :

$$m = 0{,}245 + 0{,}03285/d_{65}^{0{,}21} \tag{12}$$

(d_{65} în m), iar greutățile specifice aparente la începutul și sfîrșitul intervalului de timp Δt sînt :

$$\gamma_i = \gamma_s (1 - m_i); \quad \gamma_f = \gamma_s (1 - m_f). \tag{13}$$

Adîncimea de erodare Δh are expresia :

$$\Delta h = \frac{2 (G_i - G_f)}{(\gamma_i + \gamma_f)} = \frac{G_i C'}{(1 + C') \gamma_s (1 - \overline{m})}, \tag{14}$$

unde $\overline{m} = (m_i + m_f)/2$.

3. ALGORITM DE CALCUL. REZULTATE

La începutul procesului de calcul se cunosc : lungimea tronsonului L, adîncimea de curgere H, panta longitudinală S_0, debitul lichid Q, lățimea B a albiei, de secțiune dreptunghiulară, coeficientul de erodare C' (ales) și adîncimea de influență h_0, egală cu grosimea stratului aluvionar pînă la roca de bază. Structura granulometrică a materialului aluvionar din pat se impune la momentul inițial, exprimîndu-se prin funcția de pondere $b_0^{(i)}$, reprezentînd conținutul masic procentual al fracției de diametru d_i, dintr-un șir de diametre d_i ($i = 1{,}10$) ales convențional.

Cu ajutorul relației (12) se calculează porozitatea inițială m_0, după ce s-a determinat diametrul efectiv d_{65}, corespunzător structurii granulometrice inițiale. Greutatea materialului solid, care corespunde inițial unității de arie a patului este

$$G_0 = \gamma_s h_0 (1 - m_0). \tag{15}$$

Pentru primul pas de timp Δt_0, cu ajutorul schemei lui Toffaleti de calcul detaliat al debitului solid, folosind elementele hidraulice inițiale, se obține debitul solid total Q_{t0}, precum și ponderile granulometrice $t_0^{(i)}$ în faza lichidă. Se aplică în continuare o metodă de aproximare de tip predictor-corector pentru calcularea debitului solid Q_{t1} și a structurii granulometrice $t_1^{(i)}$) la finele intervalului de timp Δt_0. Se admite ca o primă aproximare :

$$Q'_{t_1} = Q_{t0}; \quad t_1'^{(i)} = t_0^{(i)},$$

obținîndu-se din relația (8) expresia :

$$b_1'^{(i)} = b_0^{(i)} (1 + C') - C' t_0^{(i)}.$$

Folosind din nou schema lui Toffaleti, se calculează debitul solid Q_{t1}'' și ponderile granulometrice $t_1''^{(i)}$, obținîndu-se astfel o nouă estimare pentru structura granulometrică a patului, la sfîrșitul intervalului de timp :

$$b_1''^{(i)} = b_0^{(i)} (1 + C') - C' (t_0^{(i)} + t_1''^{(i)})/2.$$

Procesul de iterare corespunzător intervalului de timp Δt_0 se încheie cînd, pentru o valoare ε suficient de mică, este îndeplinită condiția

$$|b_1^{k+1,(i)} - b_1^{k(i)}| \leqslant \varepsilon.$$

În acest fel, se poate estima mărimea intervalului de timp Δt_0, care corespunde valorii alese C' a constantei de erodare :

$$\Delta t_0 = \frac{2LBG_0C'}{(Q_{t0} + Q_{t1})(1 + C')} + \frac{Q_{t0} - Q_{t1}}{Q_{t0} + Q_{t1}} \cdot \frac{LBH}{Q}.$$

După ce se determină diametrul efectiv d_{65} la sfîrșitul intervalului de timp Δt_0, care corespunde structurii granulometrice $b_1^{(i)}$, se obține porozitatea finală m_1 și se estimează pierderea de greutate pentru unitatea de arie a patului :

$$G_0 - G_1 = G_0 C' /(1 + C'),$$

rezultînd adîncimea erodată :

$$\Delta h_0 = \frac{G_0 C'}{\gamma_{sm}(1 + C')},$$

unde greutatea specifică aparentă medie este

$$\gamma_{sm} = \gamma_s (1 - \overline{m}_0),$$

iar $\overline{m}_0$ reprezintă porozitatea medie, $\overline{m}_0 = (m_0 + m_1)/2$.

Pentru un pas de timp intermediar Δt_n, cunoscînd din etapa anterioară granulometria $b_n^{(i)}$ în pat, respectiv $t_n^{(i)}$ în faza lichidă, precm și debitul solid total Q_{tn}, se scrie într-o primă aproximație, conform schemei predictor-corector

$$Q_{t,n+1}' = Q_{t,n} ; \quad t_{n+1}'^{(i)} = t_n^{(i)},$$

rezultînd

$$b'^{(i)}_{n+1} = b^{(i)}_n (1 + C') - C' t^{(i)}_n .$$

Folosind schema lui Toffaleti, se deduce debitul solid total $Q''_{t,n+1}$ și structura granulometrică $t''^{(i)}_{n+1}$ în curent, putîndu-se reestima granulometria finală în pat :

$$b''^{(i)}_{n+1} = b^{(i)}_n (1 + C') - C' (\alpha t^i_n + (1 - \alpha) t^{(i)}_{n+1}),$$

unde α este un parametru de suprarelaxare, care mărește viteza de convergență a procesului iterativ (ales între 0,5 și 0,8).

Intervalul de timp Δt_n, corespunzător valorii impuse C' a constantei de erodare, se scrie :

$$\Delta t_n = \frac{2LB G_0 C'}{(1 + C')^{n+1}(Q_{tn} + Q_{t,n+1})} + \frac{Q_{tn} - Q_{t,n+1}}{Q_{tn} + Q_{t,n+1}} - \frac{LBH}{Q}.$$

După ce se reactualizează diametrul efectiv d_{65}, corespunzător structurii granulometrice finale $b^{(i)}_{n+1}$, se calculează porozitatea medie $\overline{m}_n = (m_n + m_{n+1})/2$.

Adîncimea erodată în intervalul de timp Δt_n are expresia :

$$\Delta h_n = \frac{G_0 C'}{(1 + C')^{n+1} \gamma_s (1 - \overline{m}_n)} .$$

În acest fel, se determină pas cu pas, atît evoluția procesului de erodare cît și durata de desfășurare a acestuia. Pentru a se obține un criteriu de încheiere a calculului, se observă că, pe măsura apropierii de starea de „pavare", debitul solid tinde asimptotic către o valoare limită ($Q_{t,n+1} \simeq Q_{tn}$), pentru n suficient de mare. În acest caz, se obține relația asimptotică :

$$\Delta t_n / \Delta t_{n+1} \simeq 1 + C', \qquad (15)$$

care poate fi folosită drept criteriu de oprire a calculului.

Pentru ilustrarea algoritmului prezentat s-au ales următoarele date de bază : lungimea tronsonului de calcul $L = 500$ m, adîncimea de curgere $H = 10$ m, panta longitudinală $S_0 = 0{,}00005$, debitul lichid $Q = 7900$ m^3/s și lățimea albiei $B = 500$ m. S-a studiat o serie de variante corespunzînd unor valori diferite ale constantei de erodare C' ($C' = 0{,}04$; $0{,}06$; $0{,}08$) și ale adîncimii de influență h_0 ($h_0 = 1{,}0$ m ; $1{,}25$ m ; $1{,}5$ m).

În figurile 1, 2, 3 se reprezintă evoluția în timp a curbelor granulometrice ale patului albiei, ultima curbă corespunzînd satisfacerii criteriului exprimat de formula asimptotică (15), pentru care s-a realizat pavarea.

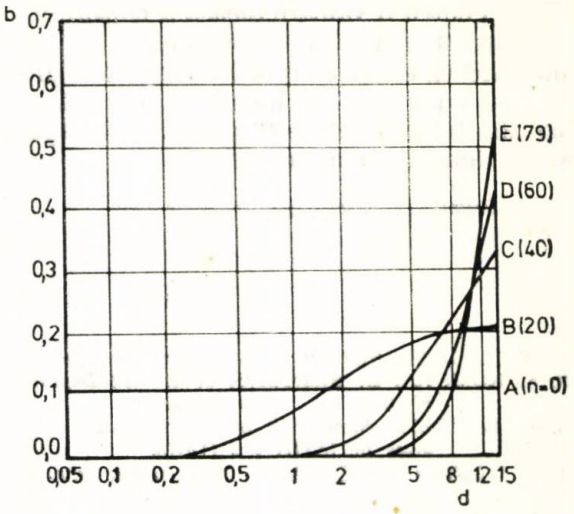


Fig. 1

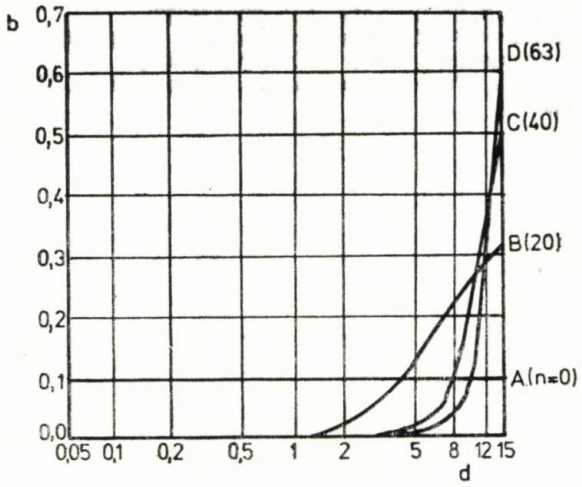


Fig. 2

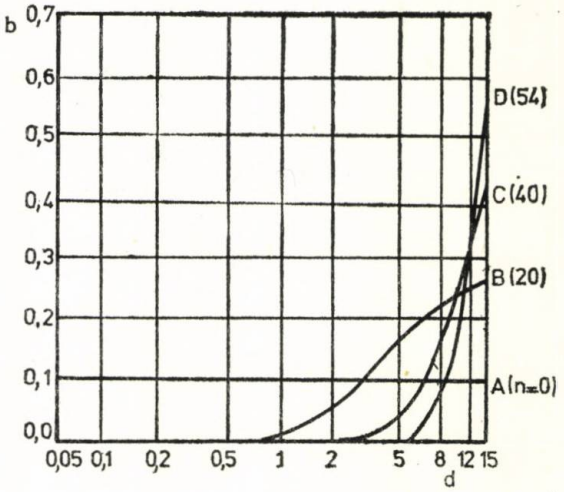


Fig. 3

Pentru o valoare aleasă a constantei de erodare C', curbele granulometrice iterate sînt independente de adîncimea de influenţă h_0 aleasă, dar intervalele de timp între două iteraţii sînt diferite în acest caz, crescînd o dată cu h_0. Într-o lucrare ulterioară se va analiza modul de alegere a constantei de erodare C' pentru a corespunde unui interval de timp impus între două iteraţii succesive.

Primită la redacţie la 6 octombrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. W. H. GRAF, *Hydraulics of Sediment Transport*, McGraw-Hill Inc., New-York (1971).
2. S. KOMURA, D. SIMMONS, *River Bed Degradation below Dams*, Proc. A.S.C.E., J. of Hydr. Div., HY4 (1967).
3. M. BAYAZIT, *Simulation of Armor Coat Formation and Destruction*, Proc. XVI Congress of IAHR , **2** (1975).
4. A. DIACON, I. SETEANU, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent (I). Efectul modificării profilului transversal al curgerii*, St. Cerc. Mec. Apl., **35**, *1* (1976).
5. I. SETEANU, R. POPA, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent (II). Efectul formei secţiunii transversale a curgerii*, St. Cerc. Mec. Apl., **38**, *1* (1979).
6. H. A. EINSTEIN, *The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open-Channel Flows*, U. S. Dept. Agric., Soil Conserv. Serv., T.B.No. 1026 (1950).
7. F. TOFFALETI, *Definitive Computation of Sand Discharge in Rivers*, Proc. A.S.C.E., J. of Hydr. Div., HY1 (1969).

PIERDEREA PRIN NEETANȘEITATE LA SPAȚIUL INELAR CU UN PERETE MOBIL

de ALECSANDRU D. STAN, SORIN OANĂ

Institutul de petrol și gaze Ploiești

În lucrare sînt analizate pierderile prin neetanșeitatea unui spațiu inelar cu un perete mobil pentru mișcarea laminară sau turbulentă a fluidului.
Datorită mișcării peretelui mobil, debitul scurs crește dacă sensul de mișcare al peretelui coincide cu gradientul de presiune și se reduce în caz contrar. Cu cît distanța dintre suprafețele cilindrice se mărește cu atît debitul pierdut prin neetanșeitate crește. Excentricitatea spațiului inelar influențează debitul pierdut doar la mișcarea laminară a fluidului, pe măsură ce excentricitatea crește și debitul pierdut prin neetanșeitate se mărește. La mișcarea turbulentă excentricitatea spațiului inelar nu influențează debitul de fluid scurs.

1. INTRODUCERE

Sînt situații în tehnică cînd un spațiu inelar are un perete mobil. Cel mai frecvent, peretele interior al spațiului inelar este mobil. Un asemenea caz se întîlnește, de exemplu, la spațiul inelar format de pistonul și cilindrul unei pompe de extracție la o sondă în pompaj. Mișcarea fluidului din spațiul inelar poate fi laminară sau turbulentă. Mișcarea se apreciază laminară pentru numerele lui Reynolds mai mici decît 2500; numărul lui Reynolds fiind definit în lucrarea [4] cu viteza medie a fluidului și lungimea caracteristică $2R_e(1-k)$.

Viteza de deplasare a peretelui mobil este presupusă constantă în timp și poate avea același sens cu gradientul de presiune $\Delta p/l$ sau contrar acestuia. Indiferent de caracterul mișcării și de sensul pe care-l are mișcarea suprafeței mobile față de gradientul de presiune, spațiul inelar poate fi și excentric.

2. NEETANȘEITATEA SPAȚIULUI INELAR CU MIȘCAREA LAMINARĂ A FLUIDULUI

Pentru mișcarea laminară a fluidului în spațiul inelar cu peretele interior mobil, viteza are expresia

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R_e^2 - r^2 - \frac{R_e^2 - R_i^2}{\ln\dfrac{R_i}{R_e}}\ln\frac{r}{R_e}\right) - \frac{V}{\ln\dfrac{R_i}{R_e}}\ln\frac{r}{R_e}, \qquad (1)$$

unde prin Δp s-a notat căderea de presiune ce are loc pe lungimea l a spațiului inelar, V este viteza suprafeței mobile care s-a presupus în relația (1) că are sensul invers gradientului de presiune, μ fiind viscozitatea fluidului, iar r raza situată între R_i și R_e.

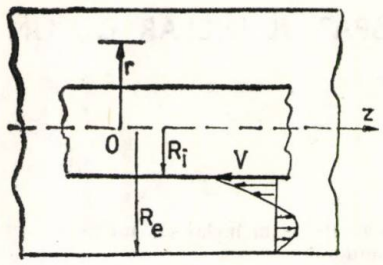


Fig. 1

Debitul de fluid pierdut prin neetanșeitatea spațiului inelar se calculează cu relația

$$Q = 2\pi \int_{R_i}^{R_e} v\, r\, dr. \qquad (2)$$

Pentru cazul în care V este de sens contrar gradientului de presiune, se găsește în urma efectuării calculelor,

$$\frac{Q}{\pi R_e^2} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R_e^2 (1-k^2)\left(1 + k^2 + \frac{1-k^2}{\ln k}\right) - \left(\frac{1-k^2}{2\ln k} + k^2\right) V, \qquad (3)$$

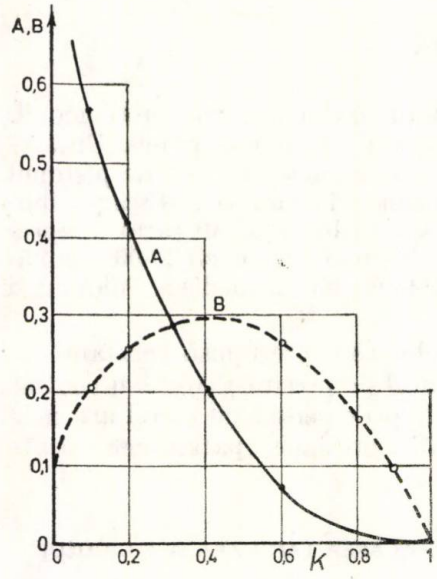


Fig. 2

unde s-a notat $k = R_i/R_e$.

Se observă că primul termen din membrul drept al ecuației (3) arată influența gradientului de presiune asupra debitului pierdut prin neetanșeitate, iar cel de-a doilea, tot în situația analizată, indică reducerea debitului datorită mișcării în sens invers a suprafeței mobile. În cazul cînd suprafața mobilă are același sens cu gradientul de presiune, cel de-al doilea termen se adaugă la cel datorat gradientului de presiune. Acest lucru se întîmplă la cursa descendentă a garniturii de prăjini.

În funcție de parametrul k se prezintă variația lui A și B (fig. 2); A și B fiind ușor de identificat prin compararea expresiei

$$\frac{Q}{\pi R_e^2} = \frac{A\,\Delta p}{4\mu l} - B\,V, \qquad (4)$$

cu relația (3).

3. EFECTUL EXCENTRICITĂȚII ASUPRA DEBITULUI SCURS LA MIȘCAREA LAMINARĂ

De multe ori cilindrul interior este așezat excentric față de cel exterior; distanța dintre centre fiind e. Excentricitatea relativă e_1 se poate

defini asemănător ca în lucrările [5, 6]

$$e_1 = \frac{e}{R_e}. \tag{5}$$

Raza de la centrul suprafeței cilindrice exterioare la un punct de pe suprafața mobilă are deci mărimea [2]

$$R_1 = R_i + e\,(1 - 2x/\pi R_e) \tag{6}$$

și dacă se introduce notația

$$k_\delta = R_1 / R_e, \tag{7}$$

se obține expresia acestuia

$$k_\delta = k + e_1\,(1 - 2x/\pi R_e), \tag{8}$$

k_δ variază liniar cu x avînd valorile extreme $k + e_1$ și $k - e_1$ la $x = 0$ și, respectiv, $x = \pi R_e$ (fig. 3).

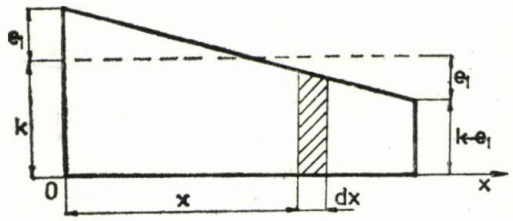


Fig. 3

Debitul mediu de fluid care se scurge printr-un spațiu excentric este $\bar{Q}$ și poate fi obținut din relația

$$\pi R_e \bar{Q} = \int_0^{\pi R_e} Q \cdot \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Înlocuirea lui Q prin expresia dată de (4) conduce la rezultatul

$$\frac{\bar{Q}}{\pi R_e^2} = \bar{A}\,\frac{\Delta p}{4\mu l} - \bar{B}\,V, \tag{10}$$

cu $\bar{A}$ s-a notat

$$\bar{A} = \frac{1}{\pi R_e} \int_0^{\pi R_e} A \Big|_{k=k_\delta} \mathrm{d}x, \tag{11}$$

$\bar{B}$ s-a definit în mod asemănător cu ajutorul coeficientului B. Schimbarea

de variabilă folosită şi în lucrarea [6] a condus la valoarea lui $\bar{A}$

$$\bar{A} = \int_{k-e_1}^{k+e_1} A \Big|_{k=k_8} \mathrm{d}X. \tag{12}$$

Calculul lui $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ s-a efectuat pe un calculator FELIX C-256 folosind regula $\frac{1}{3}$ a lui Simpson [5], care introduce erori de ordinul lui h^5; h fiind lungimea unui subinterval în care a fost împărţit intervalul $2e_1 = (k + e_1) - (k - e_1)$.

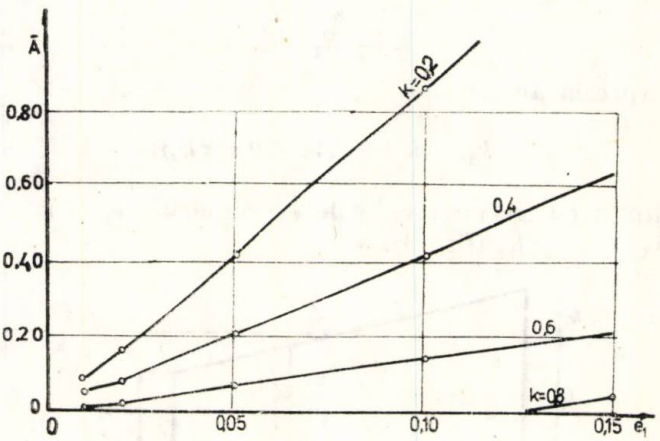


Fig. 4

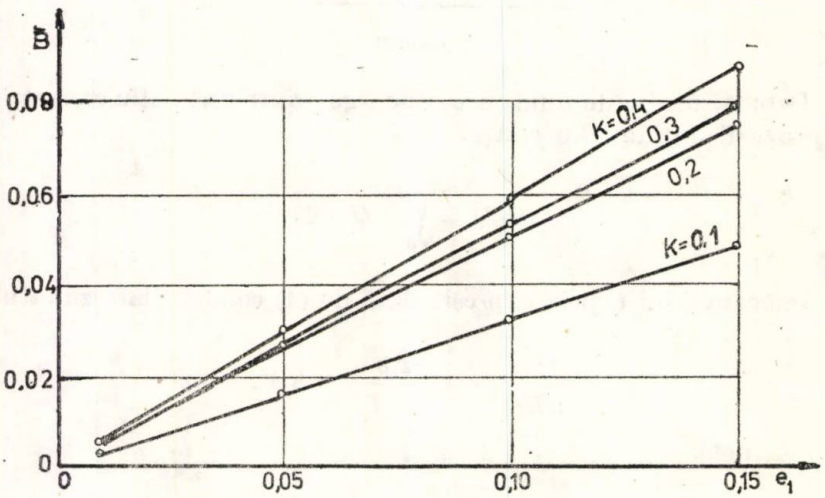


Fig. 5

Întrucît intervalul $2e_1$ a fost împărţit de fiecare dată în 100 părţi, ordinul de mărime al erorii introduse la calculul integralei este $2 \times 10^{-12} e_1$.

Se observă (fig. 4) că $\bar{A}$ crește pe măsură ce se mărește excentricitatea relativă e_1 ceea ce dovedește că la spațiile inelare excentrice pierderile prin neetanșeitate sînt mai mari decît la spațiile fără excentricitate. Tot coeficientul $\bar{A}$ scade pe măsură ce se micșorează k, ceea ce înseamnă că atunci cînd distanța dintre pereții cilindrici ai spațiului inelar se micșorează se reduc și pierderile prin neetanșeitate. În ceea ce privește $\bar{B}$ se observă (fig. 5) că acesta crește pe măsură ce se mărește e_1 și în raport cu parametrul k se constată că $\bar{B}$ are valori minime la valorile cele mai mici și cele mai mari ale acestui parametru (0 și 1).

Acest lucru este evident deoarece chiar B prezintă un maxim în valoare absolută pentru $k = 0{,}407937$, rezultat ce a fost obținut din relația

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}k} = 0 \tag{13}$$

și a condus la soluționarea ecuației transcendente

$$4k^2(\ln k)^2 - 2k^2 \ln k - 1 + k^2 = 0. \tag{14}$$

4. MIȘCAREA TURBULENTĂ ÎN SPAȚIUL INELAR CU UN PERETE MOBIL

În cazul unei mișcări turbulente se poate presupune că în apropierea peretelui mobil profilul vitezei este [3]

$$\begin{aligned} v_i &= v_{*i}\,\xi_i - V && \text{pentru } 0 \leqslant \xi_i \leqslant 11{,}5, \\ v_i &= v_{*i}\,(2{,}5 \ln \xi_i + 5{,}5) - V && \text{pentru } \xi_i > 11{,}5\ , \end{aligned} \tag{15}$$

unde $\xi_i = \dfrac{z_i\, v_{*i}}{\nu}$,

z_i fiind distanța măsurată de la peretele mobil către interiorul spațiului inelar, v_{*i} este viteza dinamică definită cu ajutorul efortului de forfecare la perete τ_{0i} și ρ densitatea fluidului,

$$v_{*i} = \sqrt{\frac{\tau_{0i}}{\rho}}, \tag{16}$$

ν este viscozitatea cinematică, iar V viteza suprafeței mobile. Pentru suprafața cilindrică de rază R_e se pot defini în mod asemănător mărimile v_e, v_{*e}, ξ_e, z_e, τ_{0e}; această suprafață fiind fixă se introduce $V = 0$.

Relațiile (15) au fost scrise pentru cazul în care viteza suprafeței mobile este de sens contrar gradientului de presiune. În acest caz, există un punct situat la distanța adimensională $\bar{\xi}_i$, unde viteza v_i este nulă.

Dacă anularea se efectuează pe zona liniară a vitezei, $\bar{\xi}_i$ are mărimea

$$\bar{\xi}_i = \frac{V}{v_{*i}}, \tag{17}$$

iar dacă se face pe profilul logaritmic se găsește

$$\bar{\xi}_i = e^{\left(0{,}4\frac{V}{v_{*i}} - 2{,}2\right)}. \tag{18}$$

În tabelul 1 se prezintă valorile lui $\bar{\xi}_i$, calculate cu ajutorul relației (18), în funcție de raportul V/v_{*i}

Tabelul 1

V/v_{*i}	11,6058	12,2701	14,0029	15,2800	17,0129	18,7457
$\bar{\xi}_i$	11,5	15	30	50	100	200

Debitul de fluid antrenat de mișcarea suprafeței mobile a spațiului inelar va fi

$$Q_a = 2\pi \int_{R_i}^{R_i + \bar{z}_i} v_i \, r dr, \tag{19}$$

$\bar{z}_i$ fiind obținut din relația

$$\bar{\xi}_i = \frac{\bar{z}_i \, v_{*i}}{\nu}.$$

Efectuînd calculele, se obțin rezultatele

$$\frac{Q_a}{2\pi\nu R_e} = \frac{\bar{\xi}_i^2}{2}\left(k + \frac{2}{3}\frac{V}{v_{*i}}\frac{1}{\mathscr{R}}\right) - \frac{V}{v_{*i}}\bar{\xi}_i\left(k + \bar{\xi}_i \frac{V}{2v_{*i}} \cdot \frac{1}{\mathscr{R}}\right) \tag{20}$$

pentru situația $\bar{\xi}_i \leqslant 11{,}5$, ceea ce înseamnă că viteza se anulează în zona cu variație liniară, și

$$\frac{Q_a}{2\pi\nu R_e} = C_1 k + \frac{C_2}{\mathscr{R}}\frac{V}{v_{*i}}\bar{\xi}_i\left(k + \bar{\xi}_i \frac{V}{2\,v_{*i}} \cdot \frac{1}{\mathscr{R}}\right) \tag{21}$$

dacă anularea vitezei se face pe profilul logaritmic, prin C_1 și C_2 s-au notat

$$C_1 = 2{,}5\ (\bar{\xi}_i \ln \bar{\xi}_i - 11{,}5 \ln 11{,}5) + 3(\bar{\xi}_i - 11{,}5) + 66{,}1250,$$

$$C_2 = 1{,}25\ (\bar{\xi}_i^2 \ln \bar{\xi}_i - 11{,}5^2 \ln 11{,}5) + 2{,}125\ (\bar{\xi}_i - 11{,}5) +$$

$$+ 509{,}9583,$$

$\mathcal{R}$ fiind numărul lui Reynolds definit cu viteza V și raza R_e. În tabelul 2 se prezintă în funcție de $\bar{\xi}_i$ pentru cazul în care viteza fluidului se anulează în interiorul profilului liniar, valoarea absolută a raportului $Q_a/2\pi\nu R_e$ pentru situația în care V are semn contrar gradientul de presiune sau sens invers acestuia.

Tabelul 2

$\bar{\xi}_i$	0	2	6	10	11,5
V contrar $\frac{\Delta p}{l}$	0	$2k + \frac{2,66}{\mathcal{R}}$	$18k + \frac{216,00}{\mathcal{R}}$	$50k + \frac{1666,66}{\mathcal{R}}$	$66,125k + \frac{2915,01}{\mathcal{R}}$
V același sens cu $\Delta p/l$	0	$6k + \frac{13,33}{\mathcal{R}}$	$54k + \frac{1080,00}{\mathcal{R}}$	$150k + \frac{8333,33}{\mathcal{R}}$	$198,37k + \frac{14575,05}{\mathcal{R}}$

În tabelul 3 se redă aceeași mărime pentru cazul în care viteza se anulează în interiorul profilului logaritmic.

Tabelul 3

$\bar{\xi}_i$	11,5	30	50	100	200
V contrar cu $\frac{\Delta p}{l}$	$67,3k + \frac{2988,2}{\mathcal{R}}$	$113,5k + \frac{10324,0}{\mathcal{R}}$	$163,5k + \frac{26545,2}{\mathcal{R}}$	$288,6k + \frac{109304,5}{\mathcal{R}}$	$538,5k + \frac{471884,6}{\mathcal{R}}$
V același sens cu $\frac{\Delta p}{l}$	$199,5k + \frac{14825,1}{\mathcal{R}}$	$726,5k + \frac{166149,0}{\mathcal{R}}$	$1364,4k + \frac{557150,7}{\mathcal{R}}$	$3119,9k + \frac{2785083,1}{\mathcal{R}}$	$6959,7k + \frac{13584166,1}{\mathcal{R}}$

Se observă că debitul de fluid antrenat de suprafața mobilă a spațiului inelar sau cel pierdut prin neetanșeitate se mărește pe măsură ce crește raportul V/v_{*i}. În situația în care viteza suprafeței mobile V are același sens cu gradientul de presiune $\Delta p/l$ debitul de fluid pierdut prin neetanșeitate este mai mare decît debitul antrenat de către suprafața cilindrică dacă aceasta are viteza de deplasare de semn contrar gradientului de presiune. În ambele situații se observă că la mărirea parametrului k se măresc, în valoare absolută, și cele două debite analizate.

5. EFECTUL EXCENTRICITĂȚII LA MIȘCAREA TURBULENTĂ

Așa cum s-a obținut mai înainte, debitul pierdut prin neetanșeitate sau cel antrenat de peretele mobil al spațiului inelar se poate scrie sub forma

$$\frac{Q}{2\pi\nu R_e} = A_1 k + \frac{B_1}{\mathcal{R}}, \tag{22}$$

A_1 și B_1 fiind două constante care depind de raportul V/v_{*i}. Printr-un raționament identic efectuat ca la mișcarea laminară se găsește că debitul mediu pentru spațiul inelar excentric și mișcare turbulentă $\bar{Q}$ satisface relația

$$\frac{\bar{Q}}{2\pi\nu R_e} = 2kA_1 + \frac{B_1}{\mathcal{R}}. \tag{23}$$

Rezultatul arată că debitul antrenat sau scurs prin neetanșeitate este independent de excentricitatea relativă e_1.

Acest efect nu era observat la mișcarea laminară, unde s-a constatat că la mărirea excentricității relative e_1 atît debitul pierdut prin neetanșeitate, cît și cel antrenat de suprafața mobilă crește. În ceea ce privește celălalt parametru, k, efectul este similar ca la mișcarea laminară a fluidului, pe măsură ce se mărește k debitul scurs sau cel antrenat de suprafața mobilă crește.

6. DEBITUL SCURS LA O CURSĂ DUBLĂ A PISTONULUI

La o cursă dublă a pistonului viteza suprafeței mobile se modifică ca sens față de gradientul de presiune.

La cursa ascendentă a garniturii de prăjini viteza pistonului este de sens invers față de gradientul de presiune, iar la cursa descendentă are același sens. Acest lucru înseamnă că la cele două curse pentru același gradient de presiune exercitat pe spațiul inelar pierderile de

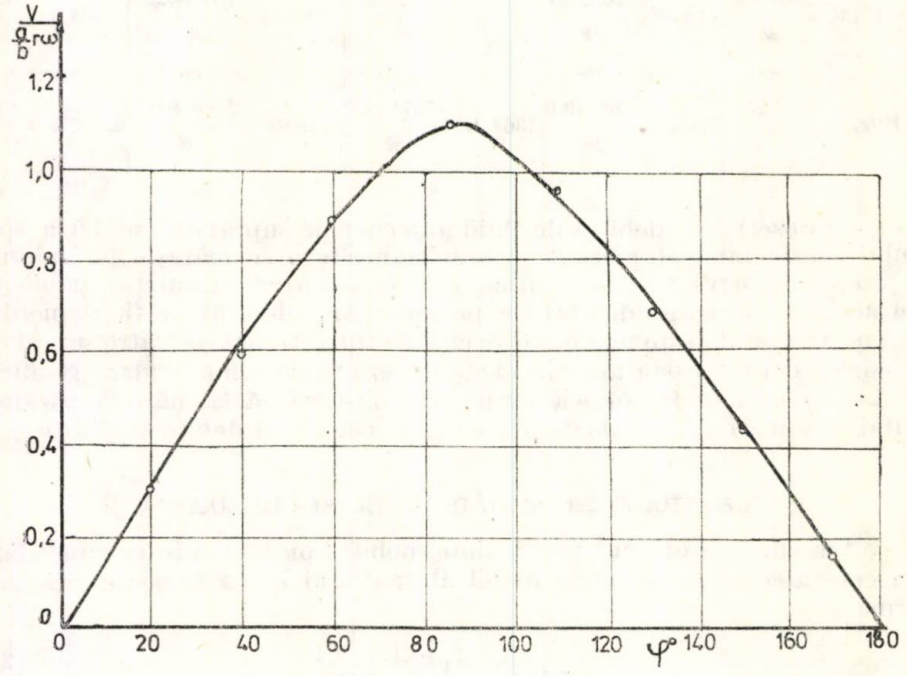


Fig. 6

fluid sînt diferite; cele mai mari scăpări fiind la cursa descendentă a garniturii de prăjini.

Viteza garniturii de prăjini V raportată la viteza $\left(r\omega\frac{a}{b}\right)$ este prezentată în funcție de unghiul de rotire al manivelei φ în figura 6; $(r\omega)$ fiind viteza periferică a manivelei, iar a și b sînt două lungimi caracteristice pentru unitatea de pompaj UP 7 [1].

La cursa descendentă a garniturii și mișcare laminară a fluidului debitul scurs printre piston și cilindrul pompei are o variație în raport cu unghiul φ asemănătoare cu aceea de la cursa ascendentă.

Dacă se întîmplă ca

$$V \geqslant \Delta p \frac{\bar{A}}{\bar{B}},$$

atunci printre piston și cilindrul pompei nu se scurge fluid. Pentru cazul unei mișcări turbulente, la cursa descendentă a garniturii debitul scurs este mai mare decît acela de la cursa ascendentă deoarece în prima situație în orice punct al spațiului inelar viteza fluidului are, ca și garnitura, sensul de curgere descendent, pe cînd în cazul al doilea, fluidul din apropierea peretelui mobil este antrenat către suprafață (fig. 7 și *b*).

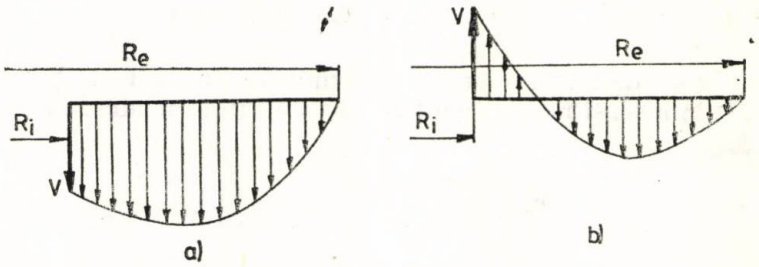


Fig. 7

Se poate efectua un calcul pentru a compara debitul de fluid scurs printre piston și cilindrul pompei la cursa descendentă și cel la cursa ascendentă a garniturii; mișcarea fiind turbulentă în ambele situații.

Pentru aceasta este necesar să se scrie efortul de forfecare pe peretele mobil sub forma

$$\tau_s = \frac{\mu_i}{R_i} \cdot \frac{V}{\ln \frac{R_i}{R_e}}, \tag{24}$$

această relație a fost obținută din expresia vitezei în spațiul inelar la mișcarea laminară a fluidului. Presupunerea că mișcarea fluidului în apropierea peretelui este laminară, justifică alegerea efortului de forfecare care se introduce suplimentar datorită mobilității peretelui interior sub forma scrisă anterior.

Dacă se scrie că la cursa descendentă la forța datorită căderii de presiune care se realizează pe spațiul inelar Δp se adaugă și forța de frecare pe suprafața mobilă, iar la cursa ascendentă se scade, se obține, de exemplu, pentru cursa descendentă, relația

$$\Delta p \cdot \pi(R_e^2 - R_i^2) - 2\pi R_i l \tau_s = \Delta p_d \pi(R_e^2 - R_i^2), \tag{25}$$

cu Δp s-a notat căderea de presiune în situația cînd ambii pereți sînt ficși, iar cu Δp_d căderea de presiune la cursa descendentă.

Dacă se introduc Δp și Δp_d sub forma

$$\Delta p = \rho \frac{v_m^2}{2} \frac{l}{2(R_e - R_i)} \lambda_i \quad \text{și} \quad \Delta p_d = \rho \frac{v_{md}^2}{2} \frac{l}{2(R_e - R_i)} \lambda_i,$$

v_m și v_{md} fiind vitezele medii în situația că spațiul inelar are ambii cilindrii ficși și, în al oilea caz, pistonul pompei se mișcă descendent și se consideră că și coeficienții de rezistență λ_i sînt egali, la cele două cazuri se găsește

$$v_{md} = v_m \sqrt{1 - \frac{16}{\mathscr{R}} \frac{V}{v_m} \frac{1}{(1+k)\lambda_i \ln k}}. \tag{26}$$

Prin $\mathscr{R}$ s-a definit numărul lui Reynolds cu v_m și distanța caracteristică $2R_e$. Prin același raționament se găsește viteza medie la cursa ascendentă, v_{ma},

$$v_{ma} = v_m \sqrt{1 + \frac{16}{\mathscr{R}} \frac{V}{v_m} \frac{1}{(1+k)\lambda_i \ln k}}. \tag{27}$$

Raportul dintre debitul de fluid la cursa descendentă Q_d și cel la cursa ascendentă Q_a pentru o valoare mică a termenului $\frac{16}{\mathscr{R}} \frac{V}{v_m} \frac{1}{(1+k)\lambda_i \ln k}$, are expresia

$$\frac{Q_d}{Q_a} = 1 - \frac{16}{\mathscr{R}} \frac{V}{v_m} \frac{1}{(1+k)\lambda_i \ln k}. \tag{28}$$

Rezultatul arată că la cursa descendentă a pistonului, debitul de fluid scurs este mai mare decît la cursa ascendentă.

Pentru mișcarea laminară, dacă se ține seama de relația (4) și aceea corespunzătoare pentru cursa descendentă, tot la mișcarea laminară, se găsește

$$\frac{Q_d}{Q_a} = 1 - \frac{f(k)}{4(1+k)\ln k} \frac{V}{v_m}, \tag{29}$$

unde s-a notat ca și în [5]

$$f(k) = \frac{1+k^2}{1-k} + \frac{1+k}{\ln k}.$$

Se observă că și la mișcarea laminară, Q_d este mai mare decît Q_a; creșterea lui Q_d față de Q_a fiind, la ambele mișcări, liniară în raport cu raportul V/v_m. În ambele situații analizate se observă că pentru un spațiu inelar cu cele două suprafețe cilindrice fixe $\frac{V}{v_m} = 0$ rezultă că $Q_d = Q_a$. În domeniul de tranziție de la mișcarea laminară la mișcarea turbulentă se observă că termenul $E_1 = f(k)/4$ și $E_2 = 16/(\mathcal{R}\lambda_i)$ nu diferă prea mult unul față de celălalt. La E_2, coeficientul de rezistență λ_i din spațiul inelar a fost calculat cu relația [6]

$$\lambda_i = \frac{0{,}3164}{\mathcal{R}^{0,25}} \cdot \frac{1+k^{0,75}}{1+k}. \tag{30}$$

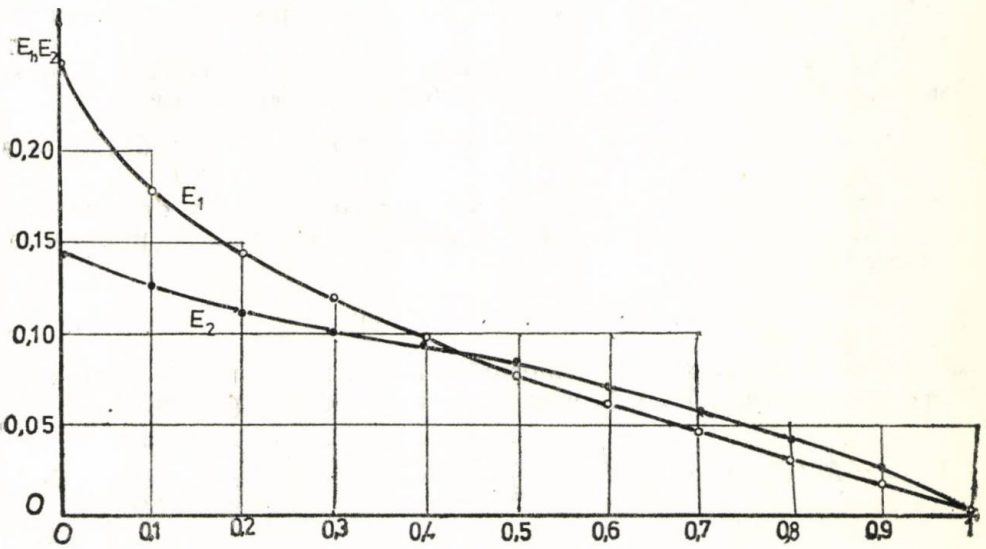


Fig. 8

Numărul lui Reynolds din aceste relații a fost calculat cu formula

$$\mathcal{R} = 2500/(1-k)$$

deoarece în lucrarea [4] s-a definit acest parametru cu lungimea $2R_e(1-k)$ și s-a stabilit că față de acest număr zona de tranziție este în jurul valorii

de 2500. La compararea lui E_1 și E_2 nu s-au luat în considerare termenul constant $(1 + k)\ln k$.

Coeficientul E_1 este practic egal cu E_2 pentru $k \geqslant 0{,}4$. Probabil că diferențele existente între E_1 și E_2 sînt datorate relațiilor de calcul pentru λ_i și, de asemenea, zona de tranziție depinde și de mărimea lui k.

Diferența cea mai mare între E_1 și E_2 sînt la valorile mici ale lui k. La $k = 0$, E_1 este de 1,68 mai mare decît E_2.

Totuși, această valoare a parametrului k face improprie noțiunea de spațiu inelar. Tot un caz limită este acela în care $k = 1$ și cu toate că noțiunea de spațiu inelar dispare și în această situație se observă că $E_1 = E_2 = 0$, ceea ce conduce la egalitatea între Q_a și Q_d. Admiterea unui coeficient de rezistență egal la spațiul inelar cu ambele suprafețe cilindrice fixe cu acela de la spațiul inelar cu un perete mobil este o altă cauză care a condus probabil la valori distincte între E_1 și E_2 mai ales la valori mici ale parametrului k.

7. ELEMENTELE MIȘCĂRII LA CURSA PISTONULUI

În cazul în care viteza pistonului este variabilă în timp, debitul de fluid care se scurge printre piston și cilindrul pompei depinde de timp [2]. Tot ca și în calculele noastre, pentru mișcarea laminară s-a găsit că viteza fluidului variază liniar cu viteza de deplasare a pistonului pompei de extracție.

Dacă se notează cu V_d și V_a volumele de fluid scurse la cursa descendentă și, respectiv, ascendentă a pistonului, se poate scrie

$$\mathrm{d}V_d = \pi R_e^2 (1 - k^2)\, v_{md}\mathrm{d}t \text{ și } \mathrm{d}V_a = \pi R_e^2 (1 - k^2)\, v_{ma}\, \mathrm{d}t\,, \qquad (31)$$

t fiind timpul. Dacă se înlocuiește viteza medie la cursa descendentă, relația (26), scriind pentru viteza de deplasare V forma adoptată și în lucrarea [2],

$$V = V_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

se găsește pentru mișcarea turbulentă a fluidului volumul de fluid scurs în perioada de timp T cît durează cursa descendentă a pistonului,

$$V_d = \pi R_e^2 (1 - k^2)\, v_m \int_0^T \sqrt{1 - \frac{16}{\mathscr{R}} \frac{V_0 \sin(\omega t + \varphi)}{v_m}} \cdot \frac{1}{(1 + k)\,\lambda_i \ln k}\, \mathrm{d}t. \qquad (32)$$

Integrala se poate efectua cu ușurință. Pentru cursa ascendentă precum și pentru mișcarea laminară se pot efectua calcule asemănătoare. Mai interesant ni se pare modul cum poate fi estimat caracterul mișcării și coeficientul de rezistență λ_i în mișcarea turbulentă și viteza v_m pentru o anumită valoare a parametrului k. Atît pentru mișcarea laminară, cît și aceea turbulentă se poate scrie

$$\Delta d = \rho\, g H, \qquad (33)$$

g fiind accelerația gravitațională și H adîncimea de fixare a pompei de extracție, iar ρ este densitatea fluidului.

Înlocuind expresia lui Δp adoptată din această lucrare în relația (31), se găsește

$$\lambda_i v_m^2 = 4gR_e (1 - k)\frac{H}{l}, \tag{34}$$

l fiind lungimea pe care are loc căderea de presiune Δp. Prin încercări se alege v_m, cu ajutorul căruia se determină numărul lui Reynolds deci și coeficientul de rezistență λ_i.

În cazul în care regimul este laminar, avînd în vedere că

$$\lambda_i = \frac{64}{R_e f(k)},$$

se găsește imediat

$$v_m = \frac{(1 - k) f(k)}{8\nu} R_e^2 g \frac{H}{l}. \tag{35}$$

Din relațiile (34) și (35) se observă că debitul de fluid scurs printre cilindrul pompei și piston este mai mare la o mișcare laminară decît la mișcarea turbulentă a fluidului pentru aceeași adîncime de fixare a pompei H. Tot la o mișcare laminară a fluidului, debitul scurs este mai mare pe măsură ce viscozitatea fluidului scade.

Această influență fiind mult mai mică la mișcarea turbulentă a fluidului și este pusă în evidență doar prin intermediul coeficientului de rezistență λ_i. Este posibil și la spațiile inelare cu mișcări turbulente, ca la tuburile cu secțiunea circulară, că la anumite valori ale numărului lui Reynolds coeficientul de rezistență să fie independent de acest parametru, ceea ce face ca viteza de curgere a fluidului să nu mai depindă de viscozitatea fluidului. Toate aceste observații fac posibilă alegerea unui cuplu piston-cilindru adecvat la o pompă de extracție pentru obținerea unui randament volumetric cît mai ridicat în funcție de adîncimea de fixare H, de caracteristicile fluidului ν, de regimul de curgere λ_i și de geometria cuplului piston-cilindrul pompei R_e, k, e_1.

8. CONCLUZII

Debitul de fluid scurs prin neetanșeitate depinde de distanța dintre suprafețele cilindrice care formează spațiul inelar și de sensul de mișcare al suprafeței mobile față de gradientul de presiune exercitat. La spațiul inelar cu distanța mare dintre suprafețe se scurg prin neetanșeitate debite mai mari decît la cele mai etanșe, indiferent dacă se apreciază o mișcare laminară sau turbulentă a fluidului.

Excentricitatea spaţiului inelar influenţează debitul de fluid scurs, mai ales la o mişcare laminară a fluidului, iar la o mişcare turbulentă excentricitatea nu are influenţă asupra debitului scurs. Atît în mişcarea laminară, cît şi în aceea turbulentă debitul de fluid pierdut prin neetanşeitate sau antrenat de peretele mobil, pentru valori mici ale vitezei suprafeţei mobile, este liniar cu acest termen. Dacă sensul de mişcare al suprafeţei mobile este invers gradientului de presiune, debitul pierdut prin neetanşeitate este mai mic decît în situaţia în care suprafaţa mobilă se mişcă în acelaşi sens cu gradientul de presiune.

Primită la redacţie la 24 septembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. GR. IOACHIM, *Extracţia petrolului şi gazelor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1965, p. 370—371, 402.
2. T. OROVEANU, P. IONESCU, *Determinarea pierderilor de lichid prin spaţiul dintre piston şi cilindru la pompele de extracţie cu luarea în considerare a excentricităţii acestora*, Buletin I.P.G.G, **VI** (1960) p. 65—73.
3. T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Exploatarea unui zăcămînt fisurat la presiuni diferenţiale mari*, St. cerc. mec. apl., **37**, *2*, p. 191—198 (1978).
4. W. ROHSENOW, J. P. HARTNETT, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw Hill Book Comp., New York, Toronto, London 1973, p. 7, 64—7, 68.
5. AL. D. STAN, *Curgerea laminară a fluidelor în spaţii inelare*, St. cerc. mec. apl., **38**, *5*, 637—643 (1979).
6. AL. D. STAN, *Mişcări turbulente prin spaţii inelare*, St. cerc. mec. apl., **38**, *6*, 825—837 (1979).

DETERMINAREA CĂDERII DE PRESIUNE ÎN CURGEREA NEIZOTERMICĂ A UNUI LICHID PRINTR-O CONDUCTĂ

de T. OROVEANU
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În anumite situații, lichidele transportate prin conducte trebuie încălzite în prealabil, cazul cel mai frecvent fiind acela al transportului petrolului brut foarte vîscos. Curgerea fiind neizotermică, deoarece temperatura lichidului scade în lungul conductei, pentru calculul căderii de presiune trebuie utilizate formule adecvate. În lucrare se examinează această situație și sînt stabilite formule de calcul cu caracter general care sînt apoi particularizate pentru diferite regimuri de curgere. Un exemplu de calcul ilustrează modul de aplicare a metodei propuse.

1. În general, în calculul căderii de presiune în conductele prin care se transportă lichide, de obicei petrol brut sau produse petroliere, se admite că temperatura lichidului care curge prin conductă este constantă, regimul fiind deci, din acest punct de vedere, izotermic. Apar însă relativ frecvent situații în care este necesar să se recurgă la încălzirea prealabilă a lichidului transportat, în scopul de a se evita unele dificultăți. Astfel se procedează, de exemplu, în cazul petrolului brut cu viscozitate mare sau cu conținut ridicat de parafină.

În aceste condiții, temperatura lichidului transportat variază destul de mult în lungul conductei și ca urmare se produce o variație a viscozității și a masei specifice care nu pot fi neglijate. În cazul în care coeficientul de pierdere de sarcină depinde de numărul lui Reynolds, variația viscozității influențează și pe aceea a presiunii în lungul conductei, respectiv valoarea căderii totale de presiune. Chiar atunci cînd coeficientul de pierdere de sarcină depinde numai de rugozitatea relativă, variația masei specifice are același efect deși considerabil mai redus decît acela al variației viscozității.

O determinare relativ simplă a căderii de presiune în cazul în care se ține seama doar de variația viscozității se poate face numai în cazul în care regimul de curgere este laminar sau în regim turbulent atunci cînd conducta este netedă și se poate folosi, pentru coeficientul de pierdere de sarcină, formula lui Blasius. Și în aceste două cazuri este însă necesar să se utilizeze, pentru exprimarea dependenței viscozității cinematice de temperatură, o formulă empirică de tip exponențial a cărei precizie este discutabilă.

În cele ce urmează, vom prezenta o metodă de calcul a căderii de presiune în cadrul căreia se ține seama atît de variația cu temperatura a viscozității, cît și de aceea a masei specifice, ambele exprimate prin cele mai precise formule empirice existente. Această metodă poate fi utilizată în toate situațiile care pot apare, în regim laminar sau în regim turbulent.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 2, 1981, P. 185–197

2. Pentru un element de conductă de lungime $\mathrm{d}x$ căderea de presiune $\mathrm{d}p$ are expresia

$$\mathrm{d}p = -\frac{8\rho Q^2\lambda}{\pi^2 d^5}\,\mathrm{d}x - \rho g\,\mathrm{d}z, \tag{1}$$

în care ρ este masa specifică a lichidului ,Q debitul, λ coeficientul de pierdere de sarcină, d diametrul interior al conductei, g accelerația gravitației și $\mathrm{d}z$ diferența de nivel dintre extremitățile elementului de conductă.

Scriind această cădere de presiune în unități de lungime, obținem

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho g} = \mathrm{d}h = -i\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}z \tag{2}$$

unde

$$i = \frac{8Q^2\lambda}{\pi^2 g d^2} \tag{3}$$

este panta hidraulică.

În cazul în care temperatura este presupusă constantă, avem

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\rho_i g} = \mathrm{d}h_i = -i_i\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}z, \tag{4}$$

indicele i semnificînd curgere izotermică. Panta hidraulică avînd în acest caz expresia

$$i_i = \frac{8\,Q_i^2\,\lambda_i}{\pi^2\,g\,d^5}, \tag{5}$$

obținem imediat

$$\frac{i}{i_i} = \left(\frac{Q}{Q_i}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_i} = \left(\frac{\rho Q}{\rho_i Q_i}\,\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_i} = \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_i}, \tag{6}$$

deoarece debitul de masă este constant ($\rho Q = \rho_i Q_i$).

Dacă introducem notațiile

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}h + \mathrm{d}z = -i\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}H_i = \mathrm{d}h_i + \mathrm{d}z = -i_i\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

rezultă

$$\mathrm{d}H = \frac{i}{i_i}\,\mathrm{d}H_i = \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_i}\,\mathrm{d}H_i \tag{8}$$

sau

$$\mathrm{d}H = -i_i\left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_i}\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

dacă ținem seama de a doua relație (7).

Integrînd între două puncte notate cu 1 și 2 (intrarea, respectiv ieșirea din tronsonul de conductă considerat), găsim

$$H_1 - H_2 = i_i \int_1^2 \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_i}\, \mathrm{d}x, \tag{10}$$

sau

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} - \frac{p_2}{\rho_2 g} = i_i \int_1^2 \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_i}\, \mathrm{d}x + z_2 - z_1. \tag{11}$$

În integrala care apare în membrul al doilea al acestor formule, ρ și λ depind de temperatură, astfel că pentru integrare este necesar să utilizăm relația dintre temperatură și distanță.

În cazul în care se consideră temperatura constantă T în secțiunea transversală a conductei, se poate scrie

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}T}{a\,(T - T_m)}, \tag{12}$$

unde T_m este temperatura mediului în care se află conducta, iar

$$a = \frac{\pi\, k\, D}{\rho\, Q\, c}, \tag{13}$$

k fiind coeficientul global de transfer de căldură, D diametrul exterior al conductei și c căldura specifică a lichidului; k și c depinzînd de temperatură, rezultă că și a este o funcție de această variabilă.

Cu ajutorul relației (12) care este stabilită pe baza unor considerente cunoscute din literatura de specialitate [1], formula (11) devine

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} - \frac{p_2}{\rho_2 g} = i_i \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_i} \frac{\mathrm{d}T}{a(T - T_m)} + z_2 - z_1. \tag{14}$$

Integrarea se efectuează deci în raport cu temperatura în intervalul $[T_2, T_1]$. Limitele de integrare sînt cunoscute deoarece T_1 este temperatura la care se încălzește în prealabil lichidul, iar T_2 este temperatura minimă pe care o poate avea acesta pentru ca transportul să decurgă în bune condiții.

Integrînd relația (12), obținem

$$l = \int_{T_2}^{T_1} \frac{\mathrm{d}T}{a\,(T - T_m)}, \tag{15}$$

unde

$$l = x_2 - x_1 \tag{16}$$

reprezintă lungimea tronsonului de conductă corespunzătoare intervalului de temperaturi $[T_2, T_1]$. În cazul în care se admite că a este o constantă, rezultatul precedent (15) devine

$$l = \frac{1}{a} \ln \frac{T_1 - T_m}{T_2 - T_m} \tag{17}$$

și este cunoscut din literatura de specialitate.

Dacă se urmărește determinarea presiunii într-o secțiune oarecare a conductei, la o distanță x de secțiunea inițială, formula (14) ne dă

$$\frac{p_x}{\rho_x g} = \frac{p_1}{\rho_1 g} - i_i \int_{T_x}^{T_1} \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_i} \frac{\mathrm{d}T}{a\,(T - T_m)} + z_1 - z_x, \tag{18}$$

indicele x desemnînd valorile presiunii, masei specifice, temperaturii și cotei în secțiunea x.

Pentru a se putea stabili variația presiunii în funcție de distanța x, se scrie în loc de (15)

$$x = \int_{T_x}^{T_1} \frac{\mathrm{d}T}{a(T - T_m)}, \tag{19}$$

originea lui x fiind considerată, ca și în (18), în secțiunea inițială a conductei ($x_1 = 0$). Dacă se poate utiliza și aici aproximația de a considera pe a constant, obținem

$$x = \frac{1}{a} \ln \frac{T_1 - T_m}{T_x - T_m}. \tag{20}$$

În felul acesta, problema este în principiu rezolvată, rămînînd numai să se calculeze integralele din (14), respectiv (18) și din (15), respectiv (19). Calculul pantei hidraulice corespunzătoare curgerii izotermice nu pune nici o problemă dacă se fixează temperatura, de altfel arbitrară, la care se produce această curgere.

3. Pentru calcule, este util să se precizeze expresia (6) a raportului pantelor hidraulice în diferitele cazuri care pot apare.

Astfel, atunci cînd regimul din conductă este laminar sau turbulent neted la valori relativ mici ale numărului lui Reynolds ($\mathcal{R}e < 10^5$), coeficientul de pierdere de sarcină are expresia

$$\lambda = \frac{A}{\mathcal{R}e^m}, \tag{21}$$

unde $A = 64$ și $m = 1$ în regim laminar, iar $A = 0{,}3164$ și $m = 0{,}25$ în regim turbulent neted. Dacă se utilizează expresia cunoscută a numărului lui Reynolds în funcție de debit și de viscozitate cinematică, rezultă

$$\lambda = \frac{B\nu^m}{Q^m}, \tag{22}$$

unde $B = \dfrac{\pi^m d^m}{4^m} A$.

Prin urmare

$$\frac{\lambda}{\lambda_i} = \left(\frac{\nu}{\nu_i}\right)^m \left(\frac{Q_i}{Q}\right)^m \tag{23}$$

și

$$\frac{i}{i_i} = \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^{2-m} \left(\frac{\nu}{\nu_i}\right)^m, \tag{24}$$

iar formula (14) devine

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} - \frac{p_2}{\rho_2 g} = i_i \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^{2-m} \left(\frac{\nu}{\nu_i}\right)^m \frac{\mathrm{d}T}{a(T - T_m)} + z_2 - z_1, \tag{25}$$

formula (18) scriindu-se cu ușurință sub o formă asemănătoare.

Aceste considerații pot fi extinse pentru cazul regimului turbulent rugos, dacă punem $m = 0$. Rezultă astfel

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} - \frac{p_2}{\rho_2 g} = i_i \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{\mathrm{d}T}{a(T - T_m)} + z_2 - z_1. \tag{26}$$

Observăm că în acest caz avem

$$\frac{i}{i_i} = \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{Q}{Q_i}\right)^2 \tag{27}$$

și deoarece la încălzire masa specifică variază relativ puțin, eficacitatea în transport a procedeului este nulă. Acest lucru este cunoscut, dar observăm că încălzirea poate avea chiar un efect negativ deoarece debitul crește și ca urmare panta hidraulică este mai mare decît aceea din curgerea izotermică.

Mai există însă două situații care nu pot fi examinate cu ajutorul formulei (22). Prima dintre acestea este regimul turbulent neted la valori mari ale numărului lui Reynolds, pentru care coeficientul de pierdere de sarcină are expresia

$$\lambda = C + \frac{D}{\mathcal{R}e^m} \tag{28}$$

cu $C = 0{,}0032$, $D = 0{,}221$, $m = 0{,}237$ (Nikuradse) sau $C = 0{,}0061$, $D = 0{,}55$, $m = \frac{1}{3}$ (Harris).

În acest caz, din (6) obținem

$$\frac{i}{i_i} = \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{1 + \frac{\alpha}{\mathcal{R}e^m}}{1 + \frac{\alpha}{\mathcal{R}e_i^m}}, \tag{29}$$

unde $\alpha = \dfrac{D}{C}$, sau

$$\frac{i}{i_i} = \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{1 + \beta \dfrac{\nu^m}{Q^m}}{1 + \beta \dfrac{\nu_i^m}{Q_i^m}}, \tag{30}$$

cu $\beta = \dfrac{\pi^m d^m}{4^m}\ \alpha$. Debitul de masă fiind constant, mai putem scrie

$$\frac{i}{i_i} = \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{1 + \varphi\, \rho^m\, \nu^m}{1 + \varphi\, \rho_i^m\, \nu_i^m}, \tag{31}$$

cu $\varphi = \dfrac{\beta}{(\rho Q)^m} = \dfrac{\beta}{(\rho_i Q_i)^m}$.

Acest rezultat se mai poate pune și sub forma

$$\frac{i}{i_i} = \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{1 + \varphi \rho_i^m\, \nu_i^m \left(\dfrac{\rho}{\rho_i}\right)^m \left(\dfrac{\nu}{\nu_i}\right)^m}{1 + \varphi\, \rho_i^m\, \nu_i^m}, \tag{32}$$

iar formula (14) devine

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} - \frac{p_2}{\rho_2 g} = i_i \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^2 \frac{1 + \varphi\, \rho_i^m\, \nu_i^m \left(\dfrac{\rho}{\rho_i}\right)^m \left(\dfrac{\nu}{\nu_i}\right)^m}{1 + \varphi \rho_i^m\, \nu_i^m} \frac{\mathrm{d}T}{a(T - T_m)} +$$

$$+ z_2 - z_1 . \tag{33}$$

Din (33) ca și din (25) poate fi dedusă cu ușurință formula care corespunde cu (18) și furnizează deci valoarea presiunii într-o secțiune oarecare a conductei.

A doua situație în care nu mai putem utiliza formula (22) este aceea a regimului turbulent mixt, în care λ depinde simultan de numărul lui Reynolds și de rugozitatea relativă. Formulele existente, dintre care cea mai cunoscută este aceea a lui Colebrook și White, au o structură complicată care nu permite efectuarea unor calcule similare cu cele precedente. O apreciere a situației se poate face cu ajutorul formulei (6) care ne dă raportul pantelor hidraulice. La încălzire, datorită scăderii destul de accentuate a viscozității, numărul lui Reynolds crește ($\mathcal{R}e > \mathcal{R}e_i$). La această

creștere a numărului lui Reynolds corespunde o scădere a coeficientului de pierdere de sarcină ($\lambda < \lambda_i$). Dacă această scădere este mai accentuată decît aceea a masei specifice, din formula (6) rezultă că panta hidraulică este mai mică decît aceea din cazul curgerii izotermice. Încălzirea lichidului transportat are deci un efect favorabil.

În încheierea acestor considerații, este necesar să mai precizăm un aspect legat de modul de utilizare a formulelor deduse. Temperatura fiind variabilă în lungul conductei și anume descrescătoare, numărul lui Reynolds variază de asemenea, scăzînd odată cu distanța față de secțiunea de intrare în conductă. În anumite cazuri, din această cauză se poate produce o schimbare a regimului de curgere din conductă. Astfel, dacă regimul rămîne turbulent pe toată lungimea, se poate trece de la un domeniu la altul; tot astfel, regimul turbulent poate deveni laminar.

Prin urmare este necesar ca în intervalul $[T_1, T_2]$ să se determine temperatura T_t la care se produce o tranziție de felul celor semnalate mai sus. Acest lucru se poate face calculînd raportul

$$\frac{\mathscr{R}e}{\mathscr{R}e_i} = \frac{Q}{Q_i}\,\frac{\nu_i}{\nu} = \frac{\rho_i}{\rho}\,\frac{\nu_i}{\nu} \tag{34}$$

în funcție de temperatură. Valoarea $\mathscr{R}e_i$ a numărului lui Reynolds din curgerea izotermică fiind cunoscută, formula precedentă ne furnizează valoarea $\mathscr{R}e_t$ la care se produce tranziția și, implicit, temperatura T_t.

Odată cunoscută temperatura T_t, se determină poziția secțiunii transversale a conductei corespunzătoare și anume

$$x_t = \int_{T_t}^{T_1} \frac{\mathrm{d}\,T}{a\,(T - T_m)} \tag{35}$$

așa cum rezultă imediat din (19).

Într-o astfel de situație, pentru $x \in [0, x_t)$ se va utiliza o formulă pentru calculul căderii de presiune, în funcție de regimul de curgere corespunzător, iar pentru $x \in (x_t, l]$, o altă formulă, de asemenea corespunzătoare regimului de curgere.

4. Așa cum am amintit în introducerea acestei lucrări, cazul cel mai frecvent în care se efectuează transportul neizotermic prin conducte este acela al petrolului brut și uneori al unor produse petroliere. Ca urmare, în vederea prezentării unui exemplu de calcul, vom indica în cele ce urmează formulele utilizate pentru calcularea diferiților parametri fizici care depind de temperatură.

Astfel, masa specifică la o temperatură t, exprimată în grade Celsius, este dată de formula [1]

$$\rho_t = \rho_{20} - \xi\,(t - 20), \tag{36}$$

unde ρ_{20} este masa specifică a lichidului la temperatura de 20°C, iar factorul ξ are expresia

$$\xi = 1{,}825 - 0{,}001315\,\rho_{20}. \tag{37}$$

Precizăm că formula (36) furnizează valoarea masei specifice în kg/m^3, ρ_{20} trebuind să fie introdus în aceleași unități. Trecerea la temperatura absolută este imediată.

În ceea ce privește viscozitatea cinematică ν, formula cea mai indicată este

$$\log \log (\nu + 0{,}8) = a - bT \tag{38}$$

în care ν este exprimat în cSt. Pentru utilizarea formulei ASTM, denumirea sub care este cunoscută (38), este necesar să se determine experimental viscozitatea cinematică la două temperaturi diferite. În acest mod pot fi determinate constantele a și b care diferă de la un produs la altul.

Căldura specifică în funcție de temperatură poate fi determinată, pentru petrolul brut sau produsele petroliere, cu ajutorul formulei lui Cragoe,

$$c = \frac{762{,}5 + 3{,}38\ T}{\sqrt{\rho_4^{20}}}, \tag{39}$$

rezultatul fiind exprimat în J/kgK. În această formulă, ρ_4^{20} reprezintă raportul dintre masa specifică la temperatura de 20°C a produsului considerat și masa specifică a apei la temperatura de 4°C.

Coeficientul global de transfer de căldură are expresia

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{2\lambda_c} \ln \frac{D}{d} + \frac{d}{2\lambda_i} \ln \frac{D_i}{D} + \frac{d}{D_i} \frac{1}{\alpha_1} \tag{40}$$

unde α este coeficientul de transfer de căldură de la lichid la peretele interior al conductei, λ_c conductivitatea termică a materialului conductei, λ_i conductivitatea termică a izolației, α_1 coeficientul de transfer de căldură de la conductă la mediul înconjurător, d, D și D_i respectiv diametrul interior al conductei, diametrul exterior al acesteia și diametrul izolației.

Dacă introducem numărul lui Nusselt

$$\mathcal{N}u = \frac{\alpha\, d}{\lambda_l}, \tag{41}$$

λ_l fiind conductivitatea termică a lichidului și numărul lui Prandtl

$$\mathcal{P}r = \frac{\rho\, \nu\, c}{\lambda_l}, \tag{42}$$

coeficientul α se poate calcula cu ajutorul formulei

$$\mathcal{N}u = 0{,}475\ (\mathcal{R}e\mathcal{P}r)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0{,}14}, \tag{43}$$

pentru cazul în care regimul este laminar. În această formulă, care provine din formula Sieder-Tate modificată pentru $\frac{l}{d} > 60$, μ_p este viscozitatea dinamică a lichidului la peretele conductei.

Pentru cazul în care regimul este turbulent, se poate utiliza formula Sieder-Tate

$$\mathcal{N}u = 0{,}027\ \mathcal{R}e^{0,8}\ \mathcal{P}r^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0,14}. \tag{44}$$

Variaţia conductivităţii termice a lichidului în funcţie de temperatură rezultă din formula

$$\lambda_l = \frac{0{,}134 - 6{,}31 \times 10^{-5}\ T}{\rho_4^{20}}, \tag{45}$$

valoarea astfel calculată exprimîndu-se în W/mK.

Coeficientul α_1 are, la rîndul său, expresia

$$\alpha_1 = \frac{2\lambda_s}{D_i \ln \frac{4h_0}{D_i}} \tag{46}$$

în care λ_s este conductivitatea termică a solului, conducta fiind presupusă îngropată, iar h_0 adîncimea de îngropare măsurată de la axa conductei.

5. Ca exemplu, vom considera cazul în care printr-o conductă de 14″ cu diametrul exterior $D = 0{,}3556$ m şi diametrul interior $d = 0{,}3381$m se transportă petrol brut cu debitul masic $\rho Q = 76$ kg/s.

Pentru petrolul brut considerat, formulele (36), (38) şi (39) devin, respectiv,

$$\rho = 845 - 0{,}713825\ (t - 20),$$

$$\text{loglog}\ (\nu + 0{,}8) = 2{,}2809476 - 0{,}00579586\ T$$

şi

$$c = 829{,}49065 + 3{,}6769553\ T.$$

Din cauză că viscozitatea cinematică este foarte mare, transportul se realizează cu încălzirea prealabilă la temperatura de 334 K a lichidului transportat. Pentru a evita presiuni de pompare prea mari, fixăm temperatura minimă în conductă la 310 K. În ceea ce priveşte mediul în care se află conducta admitem pentru temperatura acestuia valoarea de 290 K.

În tabela 1, sînt trecute mai multe valori ale masei specifice, viscozităţi cinematice şi căldurii specifice în intervalul de temperaturi stabilit.

La debitul masic considerat, corespunde la temperatura de 334 K un debit $Q = 0{,}09316772$ m³/s şi o viteză medie $v = 1{,}037$ m/s, iar la temperatura de 310 K un debit $Q = 0{,}09125129$ m³/s şi o viteză medie $v = 1{,}016$ m/s. Prin urmare, valorile extreme ale numărului lui Reynolds sînt 2155, 263 şi 306, 829 ceea ce înseamnă că regimul rămîne laminar.

Tabela 1

T[K]	310	312	314	316	320
ρ[kg/m^3]	832,86498	831,43733	830,00968	828,58203	825,72673
ν [cSt]	1119,97030	930,73419	777,23028	652,11072	465,35667
c [J/kg K]	1969,3468	1976,7007	1984,0546	1991,4085	2006,1163
T [K]	324	328	330	332	334
ρ [kg/m^3]	822,87143	820,01613	818,58848	817,16083	815,73318
ν [cSt]	337,90070	249,41371	215,54392	186,97683	162,79088
c [J/kgK]	2020,8242	2035,5320	2042,8859	2050,2398	2057,5937

Pentru continuarea calculelor, este necesar să determinăm conductivitatea termică a petrolului brut, cu ajutorul formulei (45) care devine

$$\lambda_l = 0{,}15857988 - 7{,}4674556 \times 10^{-5}\, T.$$

În tabela 2, sînt înscrise mai multe valori ale conductivităţii termice, în intervalul de temperaturi considerat, ca şi valorile viscozităţii dinamice pentru aceleaşi temperaturi.

Tabela 2

T [K]	310	312	314	316	320
λ_l [W/mK]	0,13543077	0,13528142	0,13513207	0,13498272	0,13468402
μ [P]	9,3278404	7,7384750	6,4510866	5,4032722	3,8425744
T [K]	324	328	330	332	334
λ_l [W/mK]	0,13438532	0,13408663	0,13393728	0,13378793	0,13363858
μ [P]	2,7804883	2,0452327	1,7644177	1,5279014	1,3279392

Putem utiliza acum formula (43), în care viscozitatea la perete μ_p se calculează prin procedeul de aproximaţii succesive cunoscut, asupra căruia nu insistăm. Mai departe, alegem pentru conductivitatea termică a solului în care se află îngropată conducta valoarea $\lambda_s = 1{,}3$ W/mK şi fixăm adîncimea de îngropare $h_0 = 1{,}6778$ m. Admitem, pentru simplificare, că diametrul izolaţiei este egal cu diametrul exterior al conductei (conductă fără izolaţie). Dacă alegem pentru conductivitatea termică a metalului din care sînt confecţionate ţevile valoarea $\lambda_c = 34{,}892$ W/mK, dispunem de toate elementele necesare pentru a calcula, cu ajutorul formulei (40) coeficientul global de transfer de căldură şi apoi coeficientul a a cărui

expresie este (13). În tabela 3, sînt trecute valorile lui a pentru mai multe temperaturi din intervalul considerat.

Calculul integralei din formula (15) ne conduce la concluzia că transportul este posibil, cu o scădere a temperaturii de la $T_1 = 334$K la $T_2 = 310$K pe o lungime de conductă $l = 44727,756$ m.

Tabela 3

T [K]	310	312	314	316	320
a [m^{-1}]	0,00001797	0,00001791	0,00001784	0,00001777	0,00001764
T [K]	324	328	330	332	334
a [m^{-1}]	0,00001751	0,00001739	0,00001732	0,00001726	0,00001720

Pentru simplificare, admitem că traseul conductei este orizontal. Ţinînd seama şi de faptul că regimul este laminar, formula (25) devine, cu $m = 1$,

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} - \frac{p_2}{\rho_2 g} = \\ = i_i \int_{T_2}^{T_1} \frac{\rho_i}{\rho} \frac{\nu}{\nu_i} \frac{\mathrm{d}T}{a(T - T_m)}. \tag{47}$$

De asemenea, presiunea la o distanţă x de intrarea în conductă rezultă din formula

$$\frac{p_x}{\rho_x g} = \frac{p_1}{\rho_1 g} - \\ - i_i \int_{T_x}^{T_1} \frac{\rho_i}{\rho} \frac{\nu}{\nu_i} \frac{\mathrm{d}T}{a(T - T_m)}. \tag{48}$$

Tabela 4

T [K]	x [m]	$\frac{p_x}{\rho_x g}$ [m]	p_x [10^5Pa]
334	0	703,249	56,276
332	2699,943	689,254	55,253
330	5521,815	672,449	54,000
328	8476,498	652,150	52,461
326	11580,242	627,469	50,564
324	14850,174	597,245	48,212
322	18304,568	560,441	45,319
320	21969,447	514,572	41,682
318	25871,759	456,477	37,040
316	30049,210	382,959	31,128
314	34544,728	288,981	23,530
312	39412,497	167,530	13,664
310	44727,756	12,239	1,000

Corespondenţa dintre valorile distanţei x şi ale temperaturii T_x se stabileşte cu ajutorul formulei (19).

Dacă fixăm valoarea presiunii finale $p_2 = 10^5$Pa, din (47) rezultă $p_1 = 56,276 \times 10^5$Pa.

În tabela 4, sînt prezentate rezultatele calculelor pentru 13 valori ale temperaturii din intervalul considerat. Au fost înscrise şi cîteva valori ale temperaturii care au fost omise, pentru simplificare, în tabelele precedente.

Precizăm că panta hidraulică i_i a mișcării izotermice, dată de formula (5), care intervine în toate formulele de calcul al căderii de presiune și în particular în (47) și (48), poate fi calculată la o temperatură arbitrară aleasă, așa cum se poate constata cu ușurință. În calculele precedente, am considerat că mișcarea izotermică se produce la temperatura de 292K și a rezultat $i_i = 0{,}21542505$.

În figura 1, am reprezentat cu linie plină curba de variație a presiunii pe lungimea conductei, conform datelor din tabela 4.

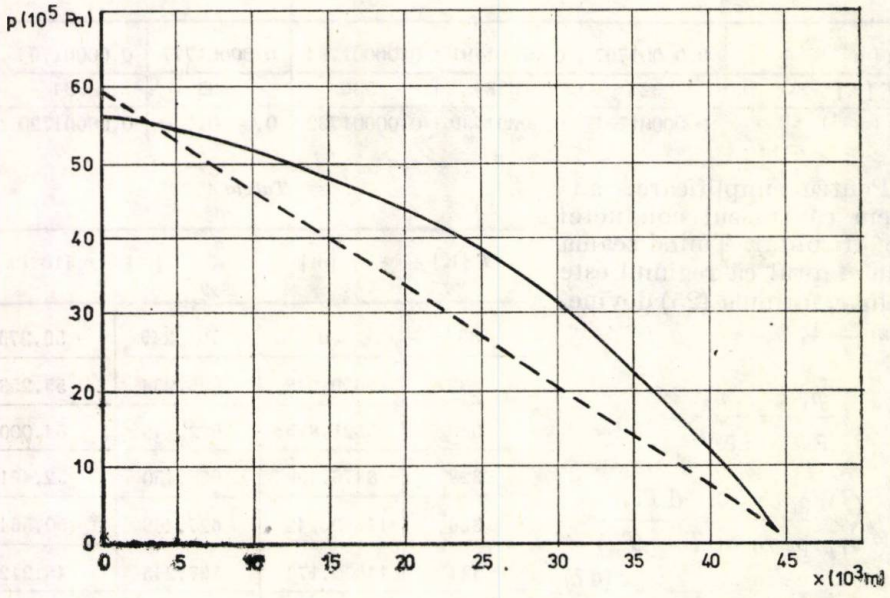


Fig. 1

În calculele de proiectare, se admite, în cazul regimului laminar în conducte, la transportul neizotermic, calcularea pantei hidraulice, respectiv a căderii de presiune, la temperatura

$$t_m = \frac{t_1 + 2t_2}{3} \tag{49}$$

exprimată în grade Celsius.

În exemplul considerat în această lucrare, rezultă $t_m = 45°C$; panta hidraulică, pentru regimul laminar, are expresia binecunoscută

$$i = \frac{128\nu Q}{\pi g d^4} \tag{50}$$

și dacă înlocuim toate mărimile cu valorile din exemplul de calcul de mai sus, cele dependente de temperatură fiind corespunzătoare la $T = 318$ K, obținem $i = 0{,}01605171$.

Din formula existentă în literatura de specialitate

$$\frac{p_1}{\rho g} = il + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 - z_1 , \tag{51}$$

care reprezintă de fapt particularizarea formulei (11) pentru cazul regimului izotermic, în care punem $z_1 = z_2$, și introducem pentru p_2 aceeași valoare ca și mai sus, rezultă $p_1 = 59{,}258 \times 10^5$Pa. Prin urmare, presiunea de pompare astfel calculată este cu 5,3% mai mare decît aceea calculată exact mai înainte. Admițînd însă că panta hidraulică este constantă, rezultă pentru variația presiunii în lungul conductei dreapta trasată cu linie întreruptă în figura 1. Din examinarea acestei figuri, se observă imediat că această variație fictivă a presiunii în conductă diferă mult de aceea reală; în anumite zone ale conductei, presiunea reală este cu peste 50 % mai mare decît aceea care corespunde regimului izotermic fictiv la temperatura dată de (49).

6. În concluzie putem afirma că metoda de calcul propusă în această lucrare pentru determinarea căderii de presiune în conducte în curgere neizotermică nu comportă nici un fel de aproximație și poate fi aplicată cu aceeași ușurință în toate situațiile. Mai mult încă, deoarece integralele care apar în formulele (14), (15), (18) și (19) se calculează numeric, pentru mărimile dependente de temperatură pot fi utilizate orice expresii și nu neapărat cele pe care le-am indicat în lucrare. Ne referim în mod particular la formulele (36), (38), (39) și (45) care pot fi înlocuite cu altele corespunzătoare, determinate pe cale experimentală pentru fiecare lichid care urmează a fi transportat în regim neizotermic. De asemenea, pentru calcularea coeficientului global de transfer de căldură (40) există posibilitatea de a se utiliza și alte formule decît cele prezentate în lucrare.

Pentru cazul particular al regimului laminar, ca și pentru regimul turbulent, în situația în care conducta este netedă, am stabilit formulele particularizate (25) și (33), care servesc la calculul căderii de presiune în aceste situații. În orice caz, deoarece numărul lui Reynolds variază mult în funcție de temperatură, utilizarea formulei (34) permite stabilirea domeniului de curgere și implicit precizarea formulei care poate fi aplicată în calcule.

Primită la redacție la 20 noiembrie, 1981

BIBLIOGRAFIE

1. V. D. BELOUSOV, E. M. BLEICHER, A. G. NEMUDROV, V. A. IUFIN, E. I. IAKOVLEV, *Truboprovodnii transport nefti i gaza*, Moskva, Nedra, 1978, p. 146, 147, 344.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL DINAMICII CORPURILOR CU MASĂ VARIABILĂ

de GHEORGHE PANAIT
I.P.G. Ploiești

În lucrare se stabilesc ecuațiile generale de mișcare ale solidului rigid liber cu masă variabilă și în particular pentru un rotor cu masă variabilă (cu dezechilibru variabil). De asemenea, se prezintă importanța cunoașterii acestor ecuații pentru rezolvarea problemelor de dinamică a acestor corpuri, cum ar fi calculul reacțiunilor dinamice și studiul posibilităților de echilibrare dinamică.

1. GENERALITĂȚI

Sînt foarte numeroase cazurile în care, în faza de proiectare a diferitelor utilaje tehnologice sau altor mașini, nu se ține seama de faptul că anumite elemente cinematice în timpul funcționării au regim de organe cu masă variabilă.

Se pot da numeroase exemple, cum ar fi :

1 — aparatul de treier al combinelor de cereale păioase ;

2 — cuva centrifugelor și supercentrifugelor din industria farmaceutică și alimentară ;

3 — amestecătoarele din industria alimentară și preparare a furajelor ;

4 — filtrele rotative din industria chimică și farmaceutică ;

5 — ventilatoarele și turbosuflantele din industria cimentului ;

6 — bobinele din industria textilă pe care se înfășoară sau se desfășoară straturi de fire ;

7 — tobele pe care se înfășoară sau se desfășoară cabluri ;

8 — discurile abrazive ale polizoarelor și ale mașinilor de rectificat ;

9 — piesele care pierd material prin prelucrări mecanice pe mașini unelte etc.

Interesul crește foarte mult mai ales pentru *rotori*, la care, datorită variației masei și a distribuției de masă, apare un dezechilibru dinamic variabil, conducînd la o uzură prematură a lagărelor, a arborilor și chiar la distrugerea prin rezonanță a lor și a utilajului respectiv.

Acest schimb de material continuu, care pentru un corp determinat poate fi : fie un proces de anexare, fie unul de detașare, fie chiar, într-un caz mai general, un proces simultan de detașare și de anexare de particule materiale, implică *considerarea caracteristicilor inerțiale ale unui asemenea element ca funcții de timp*.

Indiferent de legea de variație a masei sau de legea de variație a distribuției masei (masa poate fi constantă dar să se modifice continuu

distribuţia), problemele dinamice pentru elementul cinematic respectiv nu se mai pot rezolva cu teoremele cunoscute din mecanica teoretică pentru solidul rigid cu masă constantă.

În această lucrare se vor stabili ecuaţiile generale de mişcare ale unui rigid liber cu masă variabilă şi mai departe, ca un caz particular, ecuaţiile de mişcare ale unui *rotor cu masă variabilă* (dezechilibru dinamic variabil).

2. ECUAŢIILE GENERALE DE MIŞCARE ALE RIGIDULUI CU MASĂ VARIABILĂ

2.1. TEOREMA IMPULSULUI

Se consideră un rigid de masă variabilă,

$$M(t) = \sum_{s=1}^{n} m_s(t), \tag{1}$$

în mişcarea sa generală faţă de un triedru considerat fix $T_1(O_1x_1y_1z_1)$. Triedrul solidar cu rigidul este $T(O\,x\,y\,z)$ (fig. 1).

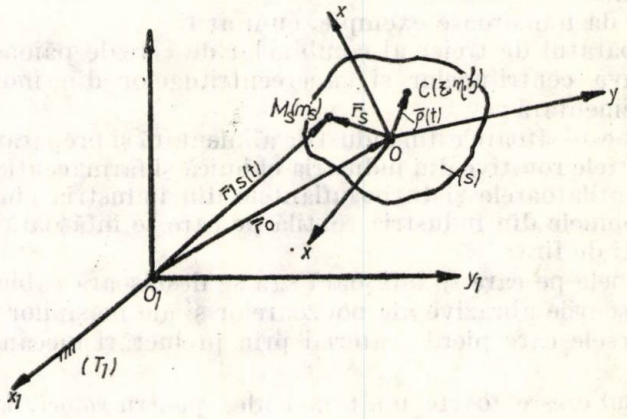


Fig. 1

Se notează cu $\bar{r}_{1s}$, respectiv cu $\bar{r}_s$, vectorii de poziţie faţă de T_1, respectiv faţă de T, ai unui punct material $M_s(s = 1, 2, 3, \ldots, n)$ oarecare de masă variabilă $m_s(t)$, $(s = 1, 2, \ldots, n)$.

Pentru stabilirea teoremei impulsului, se pleacă de la formula lui MESCERSKI scrisă pentru un punct de masă variabilă $m_s = m_s(t)$, $(s = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_s \bar{v}_{1s}) = \bar{F}_{s,e} + \bar{F}_{s,i} + \frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t} \cdot \bar{u}_1 \,, \tag{2}$$

unde

$\bar{v}_{1s}$ este viteza absolută a punctului față de $T_1(O_1 x_1 y_1 z_1)$;

$\bar{u}_{1s}$ — viteza absolută a particulei care se desprinde sau se alipește, în raport cu $T_1(O_1 x_1 y_1 z_1)$;

$\bar{F}_{s,e}$ — rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra punctului material;

$\bar{F}_{s,i}$ — rezultanta forțelor interioare. Impulsul total al solidului rigid cu masă variabilă este

$$\bar{H}_1 = \sum_{s=1}^{n} \bar{H}_{1s} = \sum_{s=1}^{n} m_s \bar{v}_{1s}. \tag{3}$$

Plecînd de la relația (2), se poate scrie pentru întregul solid rigid relația:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n} m_s \bar{v}_{1s}\right) = \dot{\bar{H}}_1 = \sum_{s=1}^{n} \bar{F}_{s,e} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t} \cdot \bar{u}_{1s}. \tag{4}$$

Ținînd seama că $\sum_{s=1}^{n} \bar{F}_{s,i} = 0$ și notînd cu $\bar{R} = \sum_{s=1}^{n} \bar{F}_{s,e}$ vectorul rezultant al forțelor exterioare, relația (4) mai poate fi scrisă astfel:

$$\dot{\bar{H}}_1 = \bar{R} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t} \cdot u_{1s} \tag{5}$$

sau

$$\sum_{s=1}^{n} m_s \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{v}_{1s}}{\mathrm{d}t} = \bar{R} + \sum_{s=1}^{n} (\bar{u}_{1s} - \bar{v}_{1s}) = \bar{R} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t} \cdot \bar{w}_s, \tag{6}$$

unde

$$\bar{w}_s = \bar{u}_{1s} - \bar{v}_{1s}, \tag{7}$$

iar

$$\bar{v}_{1s} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_s. \tag{8}$$

Relația (6) mai poate fi scrisă sub forma:

$$\sum_{s=1}^{n} m_s \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{v}_{1s}}{\mathrm{d}t} = \bar{R} + \bar{\Phi}_r, \tag{9}$$

unde

$$\bar{\Phi}_r = \sum_{s=1}^{n} \frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t} \cdot \bar{w}_s \tag{10}$$

este vectorul rezultant al *forțelor reactive*.

Dacă se ţine seama de relaţia (8), $\bar{v}_{1s} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_s$, în care $\bar{v}_0$ este viteza absolută a originii triedrului mobil $T\,(O\,x\,y\,z)$; $\bar{\omega}$ —viteza unghiulară instantanee a solidului rigid de masă variabilă, prin derivare în raport cu timpul se obţine:

$$\bar{a}_{1s} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_s + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_s), \tag{11}$$

unde $\bar{\varepsilon}$ este acceleraţia instantanee.

Se introduce relaţia (11) în relaţia (9) şi după calcule elementare se obţine

$$M(t) \cdot \{\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}(t) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{\rho}\,(t)]\} = \bar{R} + \bar{\Phi}_r\,(t), \tag{12}$$

care reprezintă *teorema impulsului pentru mişcarea generală a unui solid rigid cu masă variabilă*, unde masa solidului $M(t)$, vectorul de poziţie al centrului de greutate $\bar{\rho}(t)$ şi rezultanta forţelor reactive $\Phi_r(t)$, sînt funcţi de timp.

2.2. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC

Pentru stabilirea teoremei momentului cinetic, se pleacă tot de la formula lui MESCERSKI (2), scrisă pentru un punct material curent $M_s (s = 1, 2, \ldots, n)$, de masă variabilă $m_s = m_s(t)$, $(s = 1, 2, \ldots, n)$, al solidului rigid de masă variabilă.

Înmulţind vectorial relaţia (2) la stînga cu vectorul de poziţie $\bar{r}_{1s}$ al punctului M_s de masă $m_s = m_s(t)$ şi observînd că $\bar{r}_{1s} \times \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_s \bar{v}_{1s}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r}_{1s} \times m_s \bar{v}_{1s})$, se obţine relaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \sum_{s=1}^{n} (\bar{r}_{1s} \times m_s\, \bar{v}_{1s}) = \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times \bar{F}_{s,e} + \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times \bar{F}_{s,i} + \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times \frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t} \cdot \bar{u}_{1s}. \tag{13}$$

Observînd că $\sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times \bar{F}_{s,i} = 0$, şi notînd

$$\sum_{s=1}^{n} (\bar{r}_{1s} \times m_s\, \bar{v}_{1s}) = \bar{K}_1\,; \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times \bar{F}_{s,e} = \bar{M}_{e_1}, \tag{14}$$

unde $\bar{K}_1$ este momentul cinetic al solidului rigid în raport cu $T_1\,(O_1\,x_1 y_1 z_1)$, iar $\bar{M}_{e_1}$ este momentul rezultant al forţelor exterioare, teorema momentului cinetic (13) se poate pune sub forma:

$$\dot{\bar{K}}_1 = \bar{M}_{e_1} + \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times \frac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t} \cdot \bar{u}_{1s}\,. \tag{15}$$

Înlocuind în (15) $\bar{K}_1$ prin expresia sa (14), obţinem :

$$\sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times m_s \cdot \frac{d\bar{v}_{1s}}{dt} + \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times \frac{dm_s}{dt} \cdot \bar{v}_{1s} = \bar{M}_{e_1} + \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times \frac{dm_s}{dt} \cdot \bar{u}_{1s} \tag{16}$$

sau

$$\sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times m_s \cdot \frac{d\bar{v}_{1s}}{dt} = \bar{M}_{e_1} + \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times \frac{dm_s}{dt} (\bar{u}_{1s} - \bar{v}_{1s}) \tag{17}$$

sau încă

$$\sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times m_s \cdot \frac{d\bar{v}_{1s}}{dt} = \bar{M}_{e_1} + \bar{M}_{r_1}, \tag{18}$$

unde

$$\bar{M}_{r_1} = \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_{1s} \times \frac{dm_s}{dt} \cdot \bar{w}_s \tag{19}$$

este *momentul rezultant al forţelor reactive.*

Dacă în relaţia (18) se ţine seama de relaţia $\bar{r}_{1s} = \bar{r}_0 + \bar{r}_s$, de elaţia (11) şi de relaţiile :

$$\bar{M}_{e_1} = \bar{M}_e + \bar{r}_0 \times \bar{R}, \tag{20}$$

$$\bar{M}_{r_1} = \bar{M}_r + \bar{r}_0 \times \bar{\Phi}, \tag{21}$$

unde

$$\bar{M}_e = \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_s \times \bar{F}_{s.e} \tag{22}$$

reprezintă momentul rezultant al forţelor exterioare în raport cu originea O a triedrului mobil $T(O\ x\ y\ z)$ şi

$$\bar{M}_r = \sum_{s=1}^{n} \bar{r}_s \times \frac{dm_s}{dt} \cdot \bar{w}_s \tag{23}$$

momentul rezultant al forţelor reactive calculat faţă de aceeaşi origine O a triedrului $T\ (O\ x\ y\ z)$, după calcule elementare cu luarea în consideraţie a formei finale a teoremei impulsului (12), teorema *momentului cinetic pentru un solid rigid cu masă variabilă se scrie sub forma :*

$$\bar{\rho}(t) \times M(t) \cdot \bar{a}_0 + \tau(t) \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times \tau(t) \cdot \bar{\omega} = \bar{M}_e + \bar{M}_r, \tag{24}$$

runde

$\rho(t)$ reprezintă vectorul de poziţie al centrului de masă al solidului rigid cu masă variabilă în raport cu originea triedrului $T\ (Oxyz)$ şi este funcţie de timp ($\bar{\rho} = \bar{\rho}\ (t)$) ;

$\tau(t)$ — *tensorul momentelor de inerție*, definit astfel:

$$\tau(t) = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yz} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

iar

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Momentul de inerție care intră în componența tensorului de inerție (25) sînt de asemenea funcții de timp.

În concluzie, ecuațiile mișcării unui solid rigid liber cu masă variabilă sînt:

$$M(t) \cdot \{\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}(t) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{\rho}(t)]\} = \bar{R} + \bar{\Phi}_r(t), \tag{27}$$

$$\bar{\rho}(t) \times M(t) \cdot \bar{a}_0 + \tau(t) \cdot \bar{\varepsilon} + \tau(t) \cdot \bar{\omega} = \bar{M}_e + \bar{M}_r(t).$$

Din analiza ecuațiilor de mișcare (27) pentru un rigid liber cu masă variabilă, se constată că *forma lor* este *formal* identică cu a ecuațiilor de mișcare pentru un solid rigid liber cu masă constantă, cu deosebirea că masa și momentele de inerție sînt funcții de timp, iar în termenul al doilea apar rezultanta forțelor reactive $\bar{\Phi}_r(t)$ și, respectiv, momentul rezultant al forțelor reactive $\bar{M}_r(t)$.

Ecuațiile de mișcare (27) sînt echivalente cu șase ecuații scalare obținute prin proiectarea lor pe axele triedrului $T(Oxyz)$.

3. ECUAȚIILE GENERALE DE MIȘCARE ALE UNUI ROTOR CU MASĂ VARIABILĂ

Ecuațiile generale de mișcare pentru un rotor cu masă variabilă se obțin din ecuațiile generale (27) în care se face accelerația $\bar{a}_0 = 0$, $\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k}$ și $\bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k}$, unde $\bar{k}$ este versorul axei de rotație ($O_1z_1 = Oz$) — (fig. 2.) Rezultă

$$M(t) \cdot \{\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}(t) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{\rho}(t)]\} = \bar{R} + \bar{\Phi}_r(t),$$

$$\tau(t) \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times \tau(t) \cdot \bar{\omega} = \bar{M}_e + \bar{M}_r(t), \tag{28}$$

care reprezintă *ecuațiile generale de mișcare pentru un rotor cu masă variabilă*, în care

$$\tau(t) = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yx} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & -J_{zz} \end{pmatrix}; \omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}; \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}. \tag{29}$$

În ecuațiile generale (29) $\bar{R}$ *reprezintă rezultanta forțelor active și de legătură, iar* $\bar{M}_e$ *reprezintă momentul rezultant al forțelor active și de legătură.*

Ecuațiile vectoriale (29) proiectate pe cele trei axe ale triedrului mobil $T(Oxyz)$ conduc la următoarele ecuații sacalare:

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon \cdot M(t) \cdot \eta(t) - \omega^2 \cdot M(t) \cdot \xi(t) &= X + R_{1x}(t) + R_{2x}(t) + \Phi_{r,x}(t), \\
\varepsilon \cdot M(t) \cdot \xi(t) - \omega^2 \cdot M(t) \cdot \eta(t) &= Y + R_{1y}(t) + R_{2y}(t) + \Phi_{r,y}(t), \\
0 &= Z + R_{1z}(t) + R_{2z}(t) + \Phi_{r,z}(t), \qquad (30) \\
-\varepsilon \cdot J_{zz}(t) + \omega^2 \cdot J_{yz}(t) &= M_z - l \cdot R_{2y}(t) + M_{r,x}(t), \\
-\varepsilon \cdot J_{yz}(t) - \omega^2 \cdot J_{xz}(t) &= M_y + l \cdot R_{2x}(t) + M_{r,y}(t), \\
J_{zz}(t) \cdot \varepsilon &= M_z + M_{r,z}(t).
\end{aligned}
$$

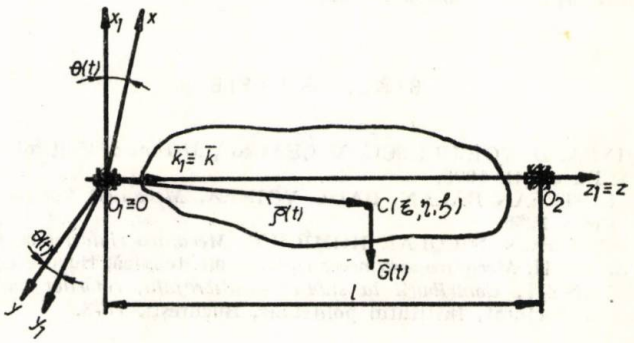


Fig. 2

În ecuațiile (30), X, Y, Z reprezintă proiecțiile rezultantei forțelor exterioare care acționează asupra rotorului, iar M_x, M_y, M_z — proiecțiile momentului rezultant al forțelor exterioare pe axele triedrului $T(Oxyz)$.

În ecuațiile generale de mișcare stabilite pentru solidul rigid liber cu masă variabilă, cît și pentru rotorul cu masă variabilă, mărimile funcții de timp: $\bar{\rho}(t)$, $\tau(t)$, $\bar{\Phi}_r(t)$ și $\bar{M}_r(t)$ — ca formă depind de ipotezele care se fac asupra variației masei sau distribuției masei.

Ecuațiile mișcării unui solid rigid cu masă variabilă și în particular ecuațiile mișcării unui rotor cu masă variabilă au o deosebită importanță în rezolvarea problemelor dinamice ale acestor corpuri.

Calculul reacțiunilor dinamice, spre exemplu pentru un rotor cu masă variabilă, dă posibilitatea proiectării corespunzătoare a lagărelor de susținere a rotorului respectiv.

De asemenea, cu ajutorul ecuațiilor de mișcare se pot studia *posibilitățile de echilibrare dinamică a acestei categorii de rotori.*

4. CONCLUZII

1. Ecuațiile generale ale mișcării unui solid rigid cu masă variabilă și în particular pentru un rotor cu masă variabilă, sînt formal asemănătoare cu cele cunoscute din literatura de specialitate pentru masă constantă cu deosebirea că masa $M(t)$ și mometele de inerție definite prin tensorul $\tau(t)$ sînt funcții de timp, iar în termenul al doilea apare $\Phi_r(t)$ rezultanta forțelor reactive și $\bar{M}_r(t)$ momentul rezultant al forțelor reactive;

2. Forma mărimilor funcții de timp : $\bar{\rho}(t)$; $M(t)$, $\tau(t)$, $\bar{\Phi}_r(t)$, $\bar{M}_r(t)$ depinde numai de ipotezele care se fac asupra variației masei sau a distribuției masei corpului;

3. Cunoașterea ecuațiilor de mișcare pentru un rotor cu masă variabilă deci cu dezechilibru dinamic variabil, dau posibilitatea calculării corecte a reacțiunilor dinamice și de aici un calcul rațional al lagărelor de susținere;

4. Cu ajutorul ecuațiilor de mișcare se pot studia posibilitățile de echilibrare dinamică a rotorilor cu masă variabilă (cu dezechilibru dinamic variabil).

Primită la redacție la 20 noiembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. RADU P. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.
2. V. VÎLCOVICI, STEFAN BĂLAN, RADU VOINEA, *Mecanică teoretică*, Edit. tehnică, București, 1968.
3. DUMITRU MANGERON, NICOLAE IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, vol. II, *Mecanica sistemeoor rigide*, Edit. tehnică, București, 1980.
4. GHEORGHE PANAIT, *Contribuții la studiul echilibrajului rotorilor cu masă variabilă*. Teză de doctorat, Institutul politehnic, București, 1978.

ASUPRA DINAMICII SOLIDULUI ÎN MIȘCARE PLAN-PARALELĂ

de ȘTEFAN STAICU
Institutul politehnic București

Lucrarea studiază dinamica și ciocnirea solidului în mișcarea plan-paralelă, supus la legături suplimentare.
Din ecuațiile generale ale ciocnirii rezultă unele cazuri particulare interesante privind distribuțiile de viteze de la sfîrșitul ciocnirii.

I. MOBILITATEA SOLIDULUI RIGID

Un solid rigid execută mișcarea *plan-paralelă* dacă *trei puncte* ale sale rămîn în permanență în plane paralele cu un plan fix numit *plan director*. Aceasta înseamnează că traiectoriile punctelor rigidului vor fi curbe plane conținute în plane paralele; o axă a rigidului normală la planul director va genera o suprafață cilindrică.

Se remarcă, de asemenea, că rigidul poate avea trei grade de libertate și că poziția sa poate fi definită cu ajutorul a trei parametri scalari independenți.

Înainte de a trece la studiul dinamicii solidului să facem unele precizări privind mobilitatea solidului. Pentru aceasta vom considera un corp material rezemat în trei puncte ale sale B_1, B_2, B_3.

Deși în aceste condiții rigidul este în general imobilizat, vom analiza în continuare posibilitățile sale de mișcare.

Astfel, în timpul mișcării solidului aceste trei puncte rămîn în permanență pe trei suprafețe fixe (S_1), (S_2), (S_3) de ecuații $f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$, $f_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$ și, respectiv, $f_3(\xi, \eta, \zeta) = 0$ (fig. 1).

Alegînd planul $O\xi\eta$ ca plan director al mișcării plan-paralele, rezultă că punctele B_1, B_2 și B_3 vor parcurge pe suprafețele date niște curbe situate în plane orizontale.

Condițiile de legătură ale mișcării solidului,

$$\vec{v}_{B_j} \vec{\nabla} f_j = 0, \tag{1.1}$$

se scriu sub forma

$$(\vec{\omega}, \vec{IB}_j, \vec{\nabla} f_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{1.2}$$

unde $\vec{\omega}$ reprezintă viteza unghiulară instantanee de rotație în jurul axei instantanee (Δ).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 2, 1981, P. 207–221

Aceste trei condiţii sînt simultan satisfăcute dacă fiecare dintre vectorii $\vec{\nabla} f_j$ este coplanar cu axa (Δ).

Pornind de aici putem trage unele concluzii cu privire la forma suprafeţelor şi la mobilitatea solidului.

Într-adevăr, vom obţine următoarele cazuri posibile de mişcare:

a) Cele trei normale la suprafeţele (S_1), (S_2), (S_3) trebuie să fie în permanenţă concurente cu axa (Δ). Rigidul are un singur grad de liber-

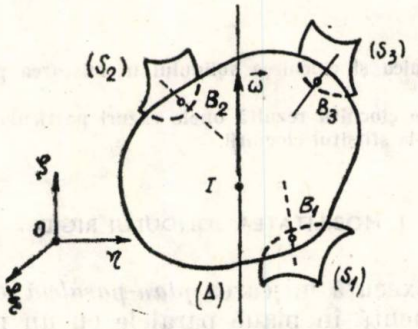


Fig. 1

tate, putînd executa o mişcare instantanee de rotaţie în jurul axei (Δ).

Legăturile vor fi reprezentate de trei suprafeţe care îndeplinesc condiţia de mai sus.

Necunoscutele care apar sînt reacţiunile din legături, cotele punctelor de intersecţie ale axei (Δ) cu cele trei normale şi unghiul de rotaţie al rigidului în jurul axei (Δ).

Aşadar, o asemenea problemă este simplu nedeterminată.

b) Normalele la două suprafeţe sînt concurente cu axa (Δ), cea de-a treia normală fiind paralelă cu aceasta adică perpendiculară pe planul director al mişcării.

Rigidul are un singur grad de libertate şi se va roti în jurul unei axe instantanee (Δ).

Legăturile (S_1), (S_2) vor fi reprezentate prin două suprafeţe arbitrare, iar (S_3) va fi un plan paralel cu planul director.

Necunoscutele sînt: reacţiunile normale din legături, cotele punctelor de intersecţie ale axei (Δ) cu cele două normale şi unghiul de rotaţie al rigidului. Deci problema aceasta este determinată.

c) Axa instantanee de rotaţie (Δ) este concurentă cu una dintre normalele la suprafeţe şi parelelă cu celelalte două normale.

Aşadar rigidul este rezemat în două puncte pe două plane paralele cu planul director; cea de-a treia legătură poate fi reprezentată de orice suprafaţă (S_1).

În cazul de faţă vom avea ca necunoscute: reacţiunile normale, cota punctului de intersecţie al normalei la suprafaţă cu axa (Δ) şi cei doi parametri care definesc poziţia momentană a rigidului.

d) Cele trei normale la suprafeţe în punctele de sprijin sînt paralele cu axa (Δ). Rezultă că legăturile sînt reprezentate prin trei plane paralele cu planul director $O\xi\eta$.

Solidul rigid are trei grade de libertate.

Observații. 1°. Considerații analoage pot fi făcute, presupunînd că cele trei puncte B_1, B_2, B_3 se deplasează în permanență pe trei curbe plane (C_1), (C_2), (C_3) date de intersecțiile planelor

$$\zeta - \zeta_{B1} = 0, \quad \zeta - \zeta_{B2} = 0, \quad \zeta - \zeta_{B3} = 0, \tag{1.3}$$

cu suprafețele cilindrice

$$g_1(\xi, \eta) = 0, \quad g_2(\xi, \eta) = 0, \quad g_3(\xi, \eta) = 0. \tag{1.4}$$

Din condițiile de mișcare ale rigidului supus la legături,

$$(\vec{\omega}, \vec{IB}_j, \vec{\nabla} g_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \tag{1.5}$$

rezultă toate situațiile posibile.

a) Cele trei suprafețe cilindrice se aleg astfel ca cele trei normale în B_1, B_2, B_3 să fie mereu concurente cu axa instantanee de rotație (Δ). Necunoscutele sînt cele șase reacțiuni și unghiul de rotație a rigidului.

Problema este de asemenea simplu nedeterminată.

b) Punctele B_1, B_2 se deplasează pe două suprafețe cilindrice și se elimină cea de-a treia suprafață ($\vec{\nabla} g_3 = \vec{0}$). Rigidul va avea un singur grad de libertate.

c) Condițiile $\vec{\nabla} g_2 = \vec{0}$, $\vec{\nabla} g_3 = \vec{0}$ conduc la eliminarea a două suprafețe cilindrice. Astfel, solidul va efectua o mișcare plan-paralelă cu două grade de libertate.

d) Rigidul rămîne sprijinit numai pe cele trei suprafețe plane în punctele sale B_1, B_2 și B_3.

2°. Mișcarea de rostogolire cu alunecare pe suprafețele cilindrice (1.4) a unui rigid rezemat în trei puncte B_1, B_2, B_3 este asemănătoare cu cea studiată mai sus.

3°. Să considerăm mai departe cazurile c) de rezemare ale rigidului și să adăugăm încă o legătură reprezentată de o suprafață cilindrică rugoasă (Σ). Peste această suprafață corpul material poate să se rostogolească în jurul generatoarei (Δ) a cilindrului, fără să alunece.

Din condițiile de mișcare analoage cu (1.2) sau (1.5) rezultă:

α) Normala la suprafața (S_1) trebuie să fie în permanență concurentă cu axa instantanee de rotație (Δ). Problema este simplu nedeterminată.

β) Condiția ca normala la suprafața (S_1) să fie paralelă cu axa (Δ) reduce această legătură la un plan paralel cu planul director.

De asemenea, condiția de mișcare $\vec{\nabla} g_1 = \vec{0}$ implică suprimarea suprafeței cilindrice (S_1) de ecuația $g_1(\xi, \eta) = 0$.

În aceste cazuri problema este determinată.

II. DINAMICA MIŞCĂRII PLAN-PARALELE

Să considerăm un solid rezemat pe trei plane orizontale prin intermediul a trei puncte necoliniare ale sale B_1, B_2, B_3. De asemenea, mai presupunem că alte două puncte D_1, D_2 ale rigidului rămîn în permanenţă pe două suprafeţe cilindrice fixe (Σ_1), (Σ_2) (fig. 2).

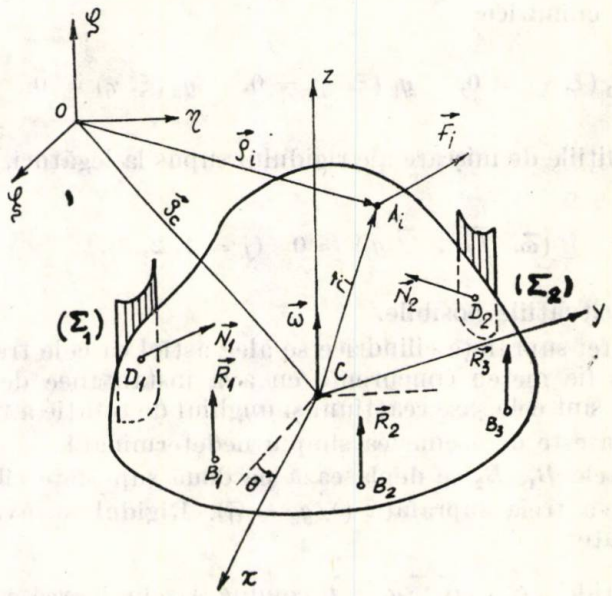


Fig. 2

Vom raporta mişcarea rigidului la un sistem fix $O\xi\eta\zeta$ avînd axele $O\xi$ şi $O\eta$ situate în planul director al mişcării, şi la un triedru mobil $Cxyz$, solidar cu rigidul, avînd originea în centrul maselor C şi axele Cx, Cy situate într-un plan paralel cu $O\xi\eta$.

În cele ce urmează se va studia mişcarea rigidului de masă M sub acţiunea forţelor exterioare $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ şi se vor determina reacţiunile din legături.

Deoarece mişcarea rigidului este aceeaşi cu a triedrului mobil, poziţia sa va fi determinată de coordonatele ξ_C, η_C, ζ_C = const. ale originii C faţă de triedrul fix şi de unghiul θ dintre axele $O\xi$ şi Cx.

Aşadar, legile de mişcare ale rigidului vor fi cunoscute prin funcţiile scalare :

$$\xi_C = \xi_C(t), \quad \eta_C = \eta_C(t), \quad \theta = \theta(t). \tag{2.1}$$

Variaţia în timp a celor trei parametrii şi expresiile reacţiunilor normale $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ introduse de legături se pot obţine cu ajutorul teoremelor generale ale dinamicii.

Fie

$$\varphi_1(\xi, \eta) = 0, \qquad \varphi_2(\xi, \eta) = 0 \tag{2.2}$$

ecuațiile suprafețelor cilindrice pe care se vor deplasa punctele D_1 și D_2

Aplicînd teorema mișcării centrului maselor

$$\ddot{\vec{M}}\rho_C = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \sum_{j=1}^{3} \vec{R}_j + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \tag{2.3}$$

în care

$$\vec{N}_1 = \lambda_1 \vec{\nabla}\varphi_1, \quad \vec{N}_2 = \lambda_2 \vec{\nabla}\varphi_2, \tag{2.4}$$

și proiectînd pe axele mobile, se obțin ecuațiile

$$M(\dot{v}_{Cx} - \dot{\theta} v_{Cy}) = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_{Dk}} \cos\theta + \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta_{Dk}} \sin\theta \right) + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$M(\dot{v}_{Cy} + \dot{\theta} v_{Cx}) = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \left(-\frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_{Dk}} \sin\theta + \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta_{Dk}} \cos\theta \right) + \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

$$0 = \sum_{j=1}^{3} R_j + \sum_{i=1}^{n} Z_i. \tag{2.5}$$

Teorema momentului cinetic în raport cu centrul maselor, se scrie sub forma

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{CD}_1 \wedge \vec{N}_1 + \vec{CD}_2 \wedge \vec{N}_2 + \sum_{j=1}^{3} \vec{CB}_j \wedge \vec{R}_j + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i, \tag{2.6}$$

unde $\vec{K}_C$ este momentul cinetic în mișcarea relativă a rigidului față de punctul C:

$$\vec{K}_C = -J_{xz}\dot{\theta}\vec{i} - J_{yz}\dot{\theta}\vec{j} + J_z\dot{\theta}\vec{k}. \tag{2.7}$$

Ținînd seama de expresiile:

$$\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\vec{CB}_j = x_{Bj}\vec{i} + y_{Bj}\vec{j} + z_{Bj}\vec{k} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

$$\vec{CD}_k = x_{Dk}\vec{i} + y_{Dk}\vec{j} + z_{Dk}\vec{k},$$

$$\xi_{Dk} = \xi_C + x_{Dk}\cos\theta - y_{Dk}\sin\theta, \qquad \eta_{Dk} = \eta_C + x_{Dk}\sin\theta + y_{Dk}\cos\theta$$

$$(k = 1, 2), \tag{2.8}$$

se proiectează relația (2.6) pe axele Cx, Cy, Cz și rezultă ecuațiile

$$-J_{xz}\ddot{\theta} + J_{yz}\dot{\theta}^2 = -\sum_{k=1}^{2} z_{Dk}\lambda_k\left(-\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_{Dk}}\sin\theta + \frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_{Dk}}\cos\theta\right) + \\ + \sum_{j=1}^{3} y_{Bj} R_j + \sum_{i=1}^{n}(y_i Z_i - z_i Y_i),$$

$$-J_{yz}\ddot{\theta} - J_{xz}\dot{\theta}^2 = \sum_{k=1}^{2} z_{Dk}\lambda_k\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_{Dk}}\cos\theta + \frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_{Dk}}\sin\theta\right) - \\ - \sum_{j=1}^{3} x_{Bj} R_j + \sum_{i=1}^{n}(z_i X_i - x_i Z_i), \tag{2.9}$$

$$J_z\ddot{\theta} = \sum_{k=1}^{2}\lambda_k\left[x_{Dk}\left(-\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_{Dk}}\sin\theta + \frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_{Dk}}\cos\theta\right) - y_{Dk}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_{Dk}}\cos\theta + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_{Dk}}\sin\theta\right)\right] + \sum_{i=1}^{n}(x_i Y_i - y_i X_i).$$

Din condițiile de legătură ale punctelor D_1, D_2,

$$\vec{v}_{Dk}\cdot\vec{\nabla}\varphi_k = 0, \tag{2.10}$$

scrise sub forma

$$\vec{v}_C\,\vec{\nabla}\varphi_k + (\vec{\omega}, \vec{CD}_k, \vec{\nabla}\varphi_k) = 0 \qquad (k = 1, 2), \tag{2.11}$$

rezultă încă două ecuații

$$(v_{Cx} - \dot{\theta}y_{Dk})\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_{Dk}}\cos\theta + \frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_{Dk}}\sin\theta\right) + \\ + (v_{Cy} + \dot{\theta}x_{Dk})\left(-\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_{Dk}}\sin\theta + \frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_{Dk}}\cos\theta\right) = 0 \quad (k = 1, 2). \tag{2.12}$$

Să multiplicăm primele două ecuații (2.5) și ultima ecuație (2.9) cu v_{Cx}, v_{Cy} și, respectiv $\dot{\theta}$, iar apoi să le adunăm. Ținînd seama și de (2.12), se obține relația

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}M v_C^2 + \frac{1}{2}J_z\dot{\theta}^2\right) = \left(v_{Cx}\sum_{i=1}^{n} X_i + v_{Cy}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\mathrm{d}t + \\ + \sum_{i=1}^{n}(x_i Y_i - y_i X_i)\,\mathrm{d}\theta, \tag{2.13}$$

care reprezintă tocmai teorema energiei cinetice aplicată mișcării plan-paralele a rigidului.

Această ecuație împreună cu condițiile (2.12) constituie ecuațiile diferențiale ale mișcării solidului. Într-adevăr, dacă forțele exterioare sînt definite prin funcții vectoriale de forma

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i\,(t,\ \xi_C,\ \eta_C,\ \theta,\ v_{Cx},\ v_{Cy},\dot{\theta}), \tag{2.14}$$

din cele trei ecuații rezultă

$$v_{Cx} = v_{Cx}\,(t,\ \xi_C,\ \eta_C,\ \theta),\quad v_{Cy} = v_{Cy}\,(t,\ \xi_C,\ \eta_C,\ \theta),\quad \dot{\theta} = \dot{\theta}\,(t,\ \xi_C,\ \eta_C,\ \theta). \tag{2.15}$$

Pornind de aici și ținînd seama de

$$\dot{\xi}_C = v_{Cx}\cos\theta - v_{Cy}\sin\theta,\quad \dot{\eta}_C = v_{Cx}\sin\theta + v_{Cy}\cos\theta, \tag{2.16}$$

se determină în final legile de mișcare (2.1) ale solidului rigid.

În continuare, primele două ecuații (2.5) dau parametrii λ_1, λ_2 care definesc reacțiunile $\vec{N}_1$ și $\vec{N}_2$.

În sfîrșit, din primele două ecuații (2.9) și ultima ecuație (2.5) rezultă imediat forțele normale de legătură R_1, R_2, R_3.

Observații. 1°. Pentru a obține cele două cazuri particulare echivalente b) de mai sus vom impune, în rezultatele obținute, condiția ca punctele B_1 și B_2 să coincidă cu punctele D_1 și, respectiv, D_2, adică

$$\vec{OD}_k = \vec{OB}_j,\ \vec{CD}_k = \vec{CB}_j \qquad (j = k = 1, 2). \tag{2.17}$$

2°. Dacă se eliberează solidul de legătură (Σ_2), mișcarea plan-paralelă va avea două grade de libertate. Aceasta revine la a face $\lambda_2 = 0$, $\vec{\nabla}\varphi_2 = \vec{0}$ în relațiile generale de mai înainte.

Astfel, teorema energiei cinetice (2.13), împreună cu relațiile diferențiale

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\cos\theta + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\sin\theta}{-\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\sin\theta + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\cos\theta} = \frac{\dot{v}_{Cx} - \dot{\theta}v_{Cy} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{M}}{\dot{v}_{Cy} + \dot{\theta}v_{Cx} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{M}} = -\frac{v_{Cy} + \dot{\theta}x_{D1}}{v_{Cx} - \dot{\theta}\,y_{D1}}, \tag{2.18}$$

conduc la legile de mișcare ale rigidului.

3°. Cazurile particulare c) prezentate la început se pot deduce ușor făcînd în relațiile precedente

$$\vec{OD}_1 = \vec{OB}_1, \qquad \vec{CD}_1 = \vec{CB}_1. \tag{2.19}$$

4°. Solidul rigid poate efectua o mişcare plan-paralelă cu trei grade de libertate dacă se îndepărtează cele două suprafeţe cilindrice (Σ_1), (Σ_2). Astfel se obţin cazurile particulare d), cînd corpul material se reazemă pe trei plane paralele prin intermediul a trei puncte care-i aparţin B_1, B_2, B_3.

Pentru soluţionarea problemei de faţă este suficient să introducem

$$\lambda_k = 0, \quad \vec{\nabla}\varphi_k = \vec{\theta} \qquad (k = 1, 2) \tag{2.20}$$

în rezultatele de mai sus. Rezultă astfel acelaşi sistem de ecuaţii obţinut în [5] pe o cale directă.

5°. Să considerăm acum cazul β) adesea întîlnit în practică, al rostogolirii fără alunecare a rigidului peste o suprafaţă fixă (Σ_1) de ecuaţie $\varphi_1(\xi, \eta) = 0$.

Solidul, presupus rezemat în punctele B_1, B_2, B_3 pe cele trei plane orizontale, va avea un singur grad de libertate.

Completînd sistemul de forţe cu forţa de frecare

$$\vec{T}_1 = \lambda_{T_1}(\vec{\nabla}\varphi_1 \wedge \vec{k}), \tag{2.21}$$

aplicată în D_1 şi făcînd $\lambda_2 = 0$, $\vec{\nabla}\varphi_2 = \vec{0}$ în relaţiile generale vom obţine sistemul de ecuaţii

$$M(\dot{v}_{Cx} - \dot{\theta} v_{Cy}) = \lambda_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\cos\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\sin\theta\right) +$$

$$+ \lambda_{T1}\left(-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\sin\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\cos\theta\right) + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$M(\dot{v}_{Cy} + \dot{\theta} v_{Cx}) = \lambda_1\left(-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\sin\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\cos\theta\right) -$$

$$- \lambda_{T1}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\cos\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\sin\theta\right) + \sum_{i=1}^{n} Y_i, \tag{2.22}$$

$$J_z\ddot{\theta} = (\lambda_1 x_{D1} - \lambda_{T1} y_{D1})\left(-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\sin\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\cos\theta\right) -$$

$$- (\lambda_1 y_{D1} + \lambda_{T1} x_{D1})\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\cos\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\sin\theta\right) + \sum_{i=1}^{n}(x_i Y_i - y_i X_i),$$

$$0 = \sum_{j=1}^{3} R_j + \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

$$-J_{xz}\ddot{\theta} + J_{yz}\,\dot{\theta}^2 = -z_{D1}\left[\lambda_1\left(-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\sin\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\cos\theta\right) -\right.$$

$$\left. - \lambda_{T1}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\xi\eta_{D1}}\cos\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\sin\theta\right)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} y_{Bj}\,R_j + \sum_{i=1}^{n}(y_i\,Z_i - z_i\,Y_i),$$

$$-J_{yz}\ddot{\theta} - J_{xz}\dot{\theta}^2 = z_{D1}\left[\lambda_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\cos\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\sin\theta\right) +\right.$$

$$\left. + \lambda_{T1}\left(-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}\sin\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}\cos\theta\right)\right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{3} x_{Bj}\,R_j + \sum_{i=1}^{n}(z_i\,X_i - x_i\,Z_i),$$

la care se adaugă

$$v_{Cx} - \dot{\theta}\,y_{D1} = 0, \quad v_{Cy} + \dot{\theta}x_{D1} = 0, \tag{2.23}$$

deduse din condiţia

$$\vec{v}_{D1} = \vec{0}. \tag{2.24}$$

Dacă vom multiplica primele trei ecuaţii ale sistemului prin v_{Cx}, v_{Cy} şi, respectiv, $\dot{\theta}$, şi le vom însuma se obţine relaţia

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - x_{D1})\,Y_i - (y_i - y_{D1})\,X_i\right]\mathrm{d}\theta, \tag{2.25}$$

care reprezintă, în fond, teorema energiei cinetice.

Condiţia ca rigidul să se rostogolească fără alunecare se referă la valoarea coeficientului de frecare:

$$\mu_1 > \mu_{min} = \frac{\lambda_{T1}}{\lambda_1}. \tag{2.26}$$

6°. În cazul în care solidul se rostogoleşte şi alunecă cu frecare pe două suprafeţe (Σ_1), (Σ_2) sau atunci cînd două puncte ale sale D_1, D_2 alunecă cu frecare pe aceleaşi suprafeţe cilindrice, ecuaţiile dinamice sînt cele date

de relaţiile (2.22), unde vom substitui λ_1, λ_{T1}, φ_1, $\overrightarrow{OD}_1$, $\overrightarrow{CD}_1$, respectiv prin λ_k, λ_{Tk}, φ_k, $\overrightarrow{OD}_k$, $\overrightarrow{CD}_k$ şi vom aplica operatorul $\sum_{k=1}^{2}$.

Mai adăugăm că condiţiile (2.23) vor fi înlocuite cu cele date de (2.12), iar relaţia (2.26) se schimbă prin

$$\lambda_{Tk} = \mu_k \lambda_k \qquad (k = 1, 2). \tag{2.27}$$

7°. Să considerăm cazul particular în care:

a) forţele exterioare sînt permanent situate în planul Cxy;

b) punctele de reazem D_1, D_2 descriu curbe situate în planul Cxy; adică

$$z_i = 0, \quad Z_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$z_{D1} = 0, \quad z_{D2} = 0. \tag{2.28}$$

În aceste condiţii reacţiunile R_1, R_2, R_3 normale pe planul mişcării sînt independente de forţele exterioare; ele rezultă din sistemul

$$\sum_{j=1}^{3} R_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} y_{Bj} R_j = -J_{xz}\ddot{\theta} + J_{yz}\dot{\theta}^2, \quad \sum_{j=1}^{3} x_{Bj} R_j = J_{yz}\ddot{\theta} + J_{xz}\dot{\theta}^2 = \tag{2.29}$$

Dacă se suprimă planele de rezemare în punctele B_1, B_2, B_3, adică dacă $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 = 0$, din ecuaţiile (2.29) rezultă că mişcarea plan-paralelă devine instabilă, iar corpul material suferă o *deviaţie* faţă de planul director. Această derivaţie dispare dacă $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$, adică atunci cînd axa Cz este axa principală şi centrală de inerţie. În acest caz rigidul îşi continuă mişcarea plan-paralelă, menţinîndu-şi planul Cxy paralel cu planul director. Planul Cxy al rigidului se numeşte *plan spontan de mişcare plană.*

III. CIOCNIREA SOLIDULUI ÎN MIŞCARE PLAN-PARALELĂ

Să reluăm acelaşi solid rezemat pe trei plane orizontale în punctele necoliniare B_1, B_2, B_3. Se presupune, de asemenea, că alte două puncte D_1, D_2 ale rigidului rămîn în permanenţă pe două suprafeţe cilindrice fixe (Σ_1), (Σ_2) (fig. 3).

Datorită percuţiei $\vec{\mathscr{P}}$ aplicată într-un punct oarecare A al rigidului vor apărea în punctele de sprijin percuţiile normale de legătură $\vec{\mathscr{P}}_1$, $\vec{\mathscr{P}}_2$, $\vec{\mathscr{P}}_3$, $\vec{\mathscr{P}}_{n1}$ şi $\vec{\mathscr{P}}_{n2}$.

Cunoscînd viteza $\vec{v}_C'$ a centrului de greutate C al rigidului şi viteza unghiulară $\vec{\omega}'$ în jurul acestui punct, la începutul ciocnirii, se cere să se determine percuţiile de legătură şi parametrii cinematici $\vec{v}_C''$ respectiv $\vec{\omega}''$ la sfîrşitul ciocnirii. Aceştia reprezintă în realitate vitezele iniţiale pentru mişcarea plan-paralelă a rigidului care începe la sfîrşitul ciocniri

Pentru aceasta, se va raporta rigidul, pe perioada ciocnirii, la un triedru mobil $Cxyz$ solidar cu rigidul, avînd originea în centrul maselor C şi axele Cx, Cy, Cz paralele cu axele triedrului fix $O\xi\eta\zeta$ al cărui plan $O\xi\eta$ este situat în planul director al mişcării.

Pentru studiul complet al problemei se aplică teoremele generale ale ciocnirilor.

Astfel, din teorema impulsului:

$$\vec{H}''-\vec{H}'=\vec{\mathscr{P}}_{n1}+\vec{\mathscr{P}}_{n2}+\sum_{j=1}^{3}\vec{\mathscr{P}}_j+\vec{\mathscr{P}}, \tag{3.1}$$

în care vom înlocui

$$\vec{\mathscr{P}}_{n1}=\lambda_1\vec{\nabla}\varphi_1,\quad \vec{\mathscr{P}}_{n2}=\lambda_2\vec{\nabla}\varphi_2, \tag{3.2}$$

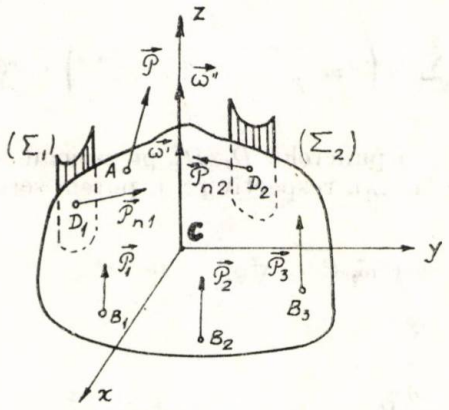


Fig 3

se obţin următoarele ecuaţii:

$$\begin{aligned}
M\,\delta v_{Cx}&=\sum_{k=1}^{2}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_{Dk}}+\mathscr{P}_x,\\
M\,\delta v_{Cy}&=\sum_{k=1}^{2}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_{Dk}}+\mathscr{P}_y,\\
0&=\sum_{k=1}^{3}\mathscr{P}_j+\mathscr{P}_z,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

unde δ reprezintă operatorul saltului finit pe perioada ciocnirii.

Teorema momentului cinetic, aplicată faţă de centrul maselor C, se scrie

$$\vec{K}_c'' - \vec{K}_c' = \vec{C}D_1 \wedge \vec{\mathscr{P}}_{n1} + \vec{C}D_2 \wedge \vec{\mathscr{P}}_{n2} + \sum_{j=1}^{3} \vec{C}B_j \wedge \vec{\mathscr{P}}_j + \vec{C}A \wedge \vec{\mathscr{P}}. \tag{3.4}$$

Notînd cu x,y,z coordonatele punctului A, se proiectează această relaţie vectorială pe cele trei axe şi se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} -J_{xz}\,\delta\omega &= -\sum_{k=1}^{2} z_{Dk}\,\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta_{Dk}} + \sum_{j=1}^{3} y_{Bj}\,\mathscr{P}_j + y\,\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y\,, \\ -J_{yz}\,\delta\omega &= \sum_{k=1}^{2} z_{Dk}\,\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_{Dk}} - \sum_{j=1}^{3} x_{Bj}\,\mathscr{P}_j + z\,\mathscr{P}_x - x\mathscr{P}_z, \\ J_z \cdot \delta\omega &= \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \left(x_{Dk} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta_{Dk}} - y_{Dk} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_{Dk}} \right) + x\mathscr{P}_y - y\,\mathscr{P}_x. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Salturile vitezelor punctelor D_1, D_2, pe perioada ciocnirii fiind situate în planele tangente la (Σ_1), respectiv (Σ_2), putem scrie relaţiile

$$\delta\vec{v}_C \cdot \vec{\nabla}\varphi_k + (\delta\vec{\omega}, \vec{CD}_k, \vec{\nabla}\varphi_k) = 0 \qquad (k = 1, 2), \tag{3.6}$$

de unde rezultă

$$(\delta v_{Cx} - y_{Dk}\,\delta\omega) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_{Dk}} + (\delta v_{Cy} + x_{Dk}\,\delta\omega) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta_{Dk}} = 0 \quad (k = 1, 2). \tag{3.7}$$

Să multiplicăm primele două ecuaţii (3.3) şi ultima ecuaţie (3.5) cu δv_{Cx}, δv_{Cy} şi, respectiv, $\delta\omega$, iar apoi să le adunăm.
Ţinînd seama şi de (3.7), se obţine relaţia

$$\frac{1}{2} M (\delta\vec{v}_C)^2 + \frac{1}{2} J_z (\delta\omega)^2 = \frac{1}{2} [\vec{\mathscr{P}}\,\delta\vec{v}_C + (x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x)\,\delta\omega], \tag{3.8}$$

care reprezintă tocmai teorema lui Kelvin [5] referitoare la energia vitezelor pierdute pe perioada ciocnirii.

Din cele trei ecuaţii (3.7), (3.8) rezultă v_{cx}'', v_{cy}'' şi ω''. În continuare, primele două relaţii (3.3) dau parametrii λ_1, λ_2 care determină percuţiile $\vec{\mathscr{P}}_{n1}$ şi $\vec{\mathscr{P}}_{n2}$, iar din primele relaţii (3.5) şi ultima relaţie (3.3) rezultă imediat percuţiile normale $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$.

Observații. 1°. Cazul în care solidul se reazemă numai pe o suprafață cilindrică (Σ_1) se obține din cazul general făcînd $\lambda_2 = 0$, $\vec{\nabla}\varphi_2 = \vec{0}$. Într-adevăr, din relațiile

$$\frac{\delta v_{Cx} - \dfrac{\mathscr{P}_x}{M}}{\delta v_{Cy} - \dfrac{\mathscr{P}_y}{M}} = -\frac{\delta v_{Cy} + x_{D1}\,\delta\omega}{\delta v_{Cx} - y_{D1}\,\delta\omega} = \frac{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_{D1}}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_{D1}}}, \tag{3.9}$$

și din teorema lui Kelvin (3.8), rezultă parametrii cinematici la sfîrșitul ciocnirii.

2°. Dacă se îndepărtează cele două suprafețe cilindrice, rigidul va avea trei grade de libertate, sprijinindu-se pe trei plane paralele în punctele B_1, B_2 și B_3.

Dacă vom face în rezultatele generale de mai înainte :

$$\lambda_k = 0, \qquad \vec{\nabla}\varphi_k = \vec{0} \qquad (k = 1, 2), \tag{3.10}$$

rezultă aceleași ecuații obținute în [5] pe o cale directă.

a) Pentru ca mișcarea rigidului la sfîrșitul ciocnirii să corespundă unei translații instantanee în planul director al mișcării este necesară condiția

$$\omega'' = 0, \tag{3.11}$$

de unde deducem că locul geometric al punctelor de aplicație ale percuțiilor este o dreaptă situată în planul vertical :

$$y = \frac{\mathscr{P}_y}{\mathscr{P}_x}\,x + \frac{J_z}{\mathscr{P}_x}\,\omega', \tag{3.12}$$

și că suportul percuției, împreună cu această dreaptă, definesc un plan normal pe planul director.

b) Pentru ca mișcarea rigidului să caracterizeze, la sfîrșitul ciocnirii, o rotație instantanee în jurul unei axe ce trece printr-un punct dat $I\,(a, b, c)$ al rigidului, sînt necesare următoarele condiții :

$$v''_{Iy} = 0 \qquad , \; v''_{Ix} = 0\,, \tag{3.13}$$

adică

$$y = \frac{\mathscr{P}_y}{\mathscr{P}_x}\,x + \frac{J_z}{\mathscr{P}_x}\left(\omega' - \frac{v'_{Cx} + \dfrac{\mathscr{P}_x}{M}}{b}\right),$$

$$a\left(v'_{Cx} + \frac{\mathscr{P}_x}{M}\right) + b\left(v'_{Cy} + \frac{\mathscr{P}_y}{M}\right) = 0, \tag{3.14}$$

care arată că percuţia va fi situată împreună cu linia punctelor sale de aplicaţie într-un plan perpendicular pe planul director; de asemenea, componentele $\mathscr{P}_x$, $\mathscr{P}_y$ vor satisface relaţia (3.14).

Dacă se urmăreşte ca rotaţia instantanee să se efectueze în jurul centrului de greutate C, atunci condiţiile (3.13) conduc la

$$\frac{\mathscr{P}_x}{v'_{Cx}} = \frac{\mathscr{P}_y}{v'_{Cy}} = -M, \tag{3.15}$$

care arată că percuţia trebuie să fie aplicată într-un punct oarecare al rigidului, însă în sens opus vectorului $\vec{v}'_C$ şi cu intensitatea Mv'_C.

c) Pentru ca rigidul să se oprească brusc atunci cînd este supus unei percuţii, trebuie să fie îndeplinite simultan condiţiile

$$v''_{Cx} = 0, \qquad v''_{Cy} = 0, \qquad \omega'' = 0 \tag{3.16}$$

sau

$$y = \frac{\mathscr{P}_y}{\mathscr{P}_x} x + \frac{J_z}{\mathscr{P}_x}\omega', \quad \frac{v'_{Cx}}{\mathscr{P}_x} = \frac{v'_{Cy}}{\mathscr{P}_y} = -\frac{1}{M}. \tag{3.17}$$

d) Poziţia centrului de percuţie se deduce din condiţiile

$$\mathscr{P}_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \tag{3.18}$$

care conduc la

$$\mathscr{P}_x = M\,\delta v_{Cx}, \quad \mathscr{P}_y = M\,\delta v_{Cy}, \quad \mathscr{P}_z = 0,$$

$$-z\,\mathscr{P}_y = -J_{xz}\delta\omega, \; z\mathscr{P}_x = -J_{yz}\,\delta\omega, \; x\mathscr{P}_y - y\,\mathscr{P}_x = J_z\,\delta\omega, \tag{3.19}$$

de unde rezultă

$$x\,J_{xz} + y\,J_{yz} = z\,J_z, \; z = \frac{J_{xz}}{M}\frac{\delta\omega}{\delta v_{Cy}}, \; \mathscr{P}_x J_{xz} + \mathscr{P}_y J_{yz} = 0. \tag{3.20}$$

Aşadar, suportul percuţiei exterioare trebuie să fie cuprins într-un plan paralel cu planul director.

Coordonatele punctului de aplicaţie al percuţiei $\vec{\mathscr{P}}$ vor verifica ecuaţia dreptei (3.20) care reprezintă chiar suportul percuţiei. Punctul de aplicaţie A din planul xCz se numeşte *centrul de percuţie* şi are următoarele coordonate:

$$x = \frac{J_z}{M}\frac{\delta\omega}{\delta v_{Cy}}, \; y = 0, \quad z = \frac{J_{xz}}{M}\frac{\delta\omega}{\delta v_{Cy}}. \tag{3.21}$$

3°. Dacă la începutul şi la sfîrşitul ciocnirii rigidul execută o mişcare de rostogolire fără alunecare pe o suprafaţă (Σ_1), atunci, pe lîngă percuţia normală $\vec{\mathscr{P}}_{n1}$ se va introduce în D_1 şi percuţia tangenţială

$$\vec{\mathscr{P}}_{t1} = \lambda_{T1}(\vec{\nabla}\varphi_1 \wedge \vec{k}), \tag{3.22}$$

iar apoi se vor adăuga condiţiile de legătură

$$\delta v_{Cx} - y_{D1}\,\delta\omega = 0, \quad \delta v_{Cy} + x_{D1}\,\delta\omega = 0, \tag{3.23}$$

şi teorema lui Kelvin (3.8) care se reduce la

$$J_\Delta \cdot \delta\omega = (x - x_{D1})\,\mathscr{P}_y - (y - y_{D1})\,\mathscr{P}_x. \tag{3.24}$$

4°. În cazul în care punctele de contact alunecă cu frecare, vom adăuga relaţiile

$$\lambda_{Tk} = \mu_k \lambda_k \qquad (k = 1, 2), \tag{3.25}$$

iar condiţiile (3.23) vor reveni la forma (3.7) dată mai sus.

Primită la redacţie la 27 iunie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. M. ROY, *Mécanique. I. Corps rigides*, Dunod, Paris, 1965.
2. V. VÂLCOVICI, ŞT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanică teoretică*, Ed. tehnică, 1968.
3. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanică*, Edit. Academiei, 1970.
4. M. ATANASIU, *Mecanică tehnică*, Edit. tehnică, 1963.
5. ŞT. STAICU, *Mecanica. Dinamica şi elemente de Mecanica fluidelor*, Litografia Institutului politehnic Bucureşti, 1973.
6. ŞT. STAICU, *Metode energetice pentru studiul ciocnirilor*. St. cerc. mec. Apl., **35**, *4*, (1976).

METODĂ DE CALCUL, UTILIZÎND SERIILE DUBLE TRIGONOMETRICE PENTRU PLACA RIGIDIZATĂ CU NERVURI EXCENTRICE DISPUSE PE DOUĂ DIRECȚII

de GABRIEL D. POPA
Universitatea din Galați

Se propune metoda de calcul, utilizînd seriile duble trigonometrice, pentru structurile alcătuite din tablă rigidizată cu nervuri dispuse pe două direcții ortogonale. Considerînd articulații, pe liniile teoretice de contact situate la marginile tălpilor superioare ale nervurilor, conlucrarea elastică dintre placă și nervuri se exprimă ținînd seama de săgețile plăcii, provenite din încovoiere, precum și de săgețile nervurilor, provenite din încovoiere și torsiune.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Fie structura simplu rezemată pe contur alcătuită din placa de grosime constantă h și din două familii de nervuri excentrice, neidentice, neechidistante, avînd secțiuni nesimetrice, dispuse după cele două direcții Ox și Oy ale axelor de coordonate ; nervurile paralele cu axa Oy sînt notate $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots, N_r$, iar cele paralele cu axa Ox sînt notate $N_I, N_{II}, \ldots, N_I, \ldots, N_R$ (fig. 1).

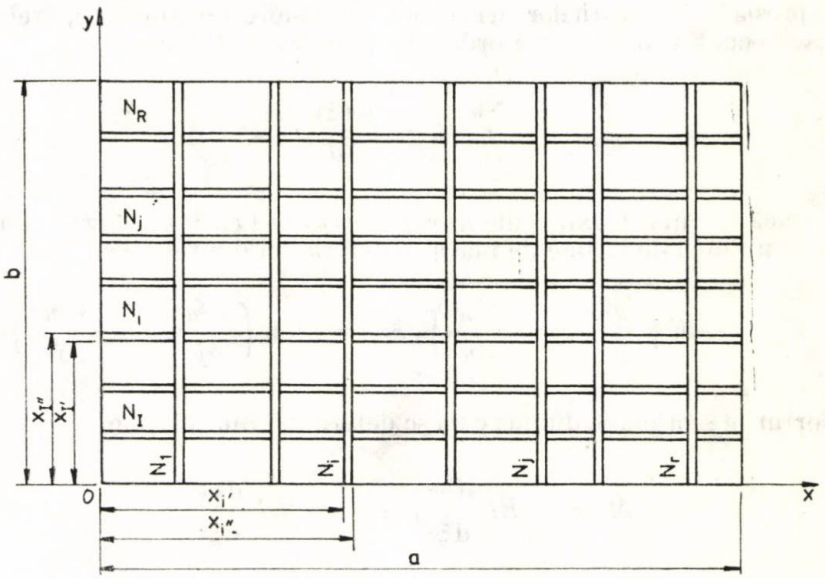


Fig. 1

Îmbinarea dintre placă (tablă) și nervuri (profiluri la care, în general, centrul de greutate și centrul de rotire al secțiunii transversale nu se confundă) este presupusă perfectă și realizată obișnuit prin cordoane de sudură continue pe toate muchiile profilelor în contact cu tabla.

Pentru structura considerată se pune problema determinării stării de eforturi, atît din placă, cît și din fiecare nervură în parte, ținînd seama de conlucrarea elastică dintre aceste elemente. Rezolvarea problemei revine deci la deducerea expresiilor corespunzătoare ale săgeților plăcii și nervurilor, provenite din încovoiere, precum și a rotirilor nervurilor, provenite din torsiune.

După cum se știe din teoria clasică a plăcilor plane, expresia $w(x, y)$ a săgeților plăcii trebuie să satisfacă ecuația cu derivate parțiale de ordinul al patrulea :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{K}. \tag{1.a}$$

Analog, din statica grinzii drepte, expresia $w(\xi)$ a săgeților nervurilor, provenite din încovoiere, trebuie să satisfacă ecuația diferențială ordinară tot de ordinul al patriulea

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}\xi^4} = \frac{q(\xi)}{EI}, \tag{2.a}$$

iar expresia $\theta(\xi)$ a rotirilor nervurilor, provenite din torsiune, trebuie să satisfacă ecuația diferențială ordinară de ordinul al doilea

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\xi^2} = -\frac{m(\xi)}{GJ}. \tag{3.a}$$

Dacă se cunosc expresiile $w(x, y)$, $w(y)$, $w(x)$, $\theta(y)$, $\theta(x)$, eforturile aferente unității de lățime de placă se determină din relațiile

$$M_x = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \; M_y = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{1.b}$$

iar eforturile secționale din nervuri se determină din relațiile

$$M = -EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2}, \; T = -EI\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}\xi^3} \tag{2.b}$$

și

$$M_t = GJ\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}. \tag{3.b}$$

Prin principala ipoteză de lucru adoptată, constînd în schematizarea legăturilor dintre placă și nervuri precum și a legăturilor dintre nervuri, vom admite că fiecare nervură este legată dublu articulat de placă (fig. 2a), iar două nervuri concurente sînt legate prin patru articulații (fig. 2*b*); în felul acesta condițiile de conlucrare elastică vor trebui să exprime egalitatea săgeților plăcii și nervurilor pe liniile în contact (considerate la marginile tălpilor superioare ale nervurilor) precum și egalitatea săgeților nervurilor în noduri (considerate la intersecțiile marginilor tălpilor superioare ale nervurilor) sub acțiunea încărcărilor exterioare.

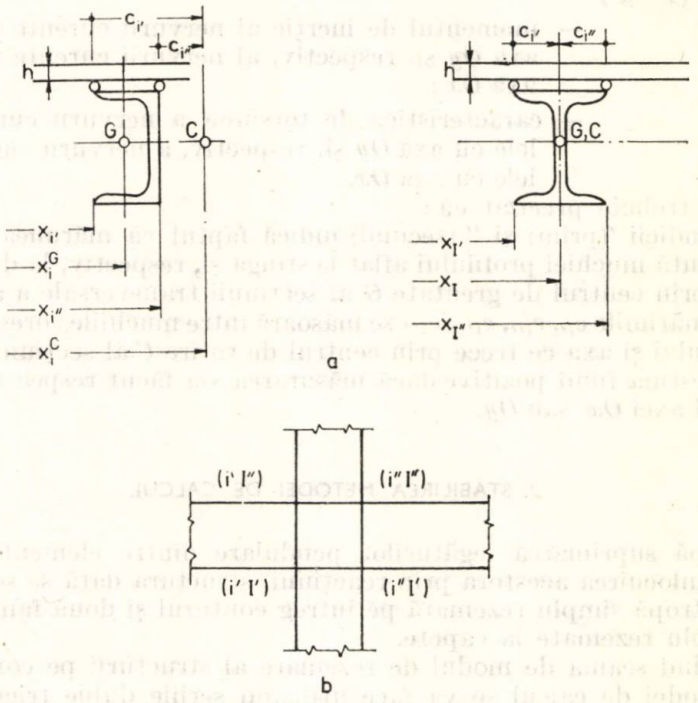


Fig. 2

Considerăm că, dacă se ține seama de modul de solidarizare prin sudură a tablei cu profilele platelajului și de faptul că pentru solicitările de încovoiere și torsiune ale grinzilor se admite indeformabilitatea secțiunilor transversale în planul lor, schematizarea adoptată este nu numai admisibilă dar și mai reală față de cea corespunzătoare situației în care nervurile ar fi reprezentate numai prin axele lor ce trec prin centrele de greutate ale secțiunilor transversale.

Pentru efectuarea studiului se alege sistemul cartezian de coordonate *Oxyz* astfel că planul *xOy* coincide cu planul median al plăcii, iar axa *Oz* este orientată în jos.

Caracteristicile geometrice și mecanice ale structurii studiate se definesc după cum urmează:

a, *b* — deschiderile de calcul ale platelajului;

$\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{b}{a}$ — rapoarte ale laturilor platelajului;

r, R — numărul nervurilor platelajului paralele cu axa Oy și, respectiv, cu axa Ox;

$E, \mu, G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ — constantele elastice ale materialului;

$K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii;

I_i, I_I — momentul de inerție al nervurii curente paralele cu axa Oy și, respectiv, al nervurii curente paralele cu axa Ox;

J_i, J_I — caracteristica de torsiune a nervurii curente paralele cu axa Oy și, respectiv, a nervurii curente paralele cu axa Ox.

Mai trebuie precizat că:

— indicii '(prim) și '' (secund) indică faptul că mărimea respectivă este aferentă muchiei profilului aflat la stînga și, respectiv, la dreapta axei ce trece prin centrul de greutate G al secțiunii transversale a acestuia;

— mărimile $c_{i'}, c_{i''}, c_{I'}, (c_{I''}$ se măsoară între muchiile corespunzătoare ale profilului și axa ce trece prin centrul de rotire C al secțiunii transversale a acestuia fiind pozitive dacă măsurarea s-a făcut respectiv în sensul pozitiv al axei Ox sau Oy.

2. STABILIREA METODEI DE CALCUL

După suprimarea legăturilor pendulare dintre elementele componente și înlocuirea acestora prin reacțiuni, structura dată se separă într-o placă izotropă simplu rezemată pe întreg conturul și două familii de nervuri simplu rezemate la capete.

Ținînd seama de modul de rezemare al structurii pe contur, stabilirea metodei de calcul se va face utilizînd seriile duble trigonometrice.

Referindu-ne mai întîi la placa izotropă, simplu rezemată pe întreg conturul, observăm că asupra acesteia acționează încărcarea exterioară de suprafață $p_0(x, y)$, cunoscută, care poate fi reprezentată sub forma seriei duble trigonometrice

$$p_0(x, y) = \sum_m \sum_n p_{0.mn} \sin\alpha_m \sin\beta_n y, \qquad (4.a)$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

unde am notat

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b},$$

precum și încărcările liniare $p_{i'}(y)$, $p_{i''}(y)$, $p_{I'}(x)$, $p_{I''}(x)$, necunoscute, care pot fi reprezentate sub forma seriilor simple trigonometrice:

$$p_{i'}(y) = \sum_n p_{i',n} \sin\beta_n y\,;\; p_{i''}(y) = \sum_n p_{i'',n} \sin\beta_n y\,,$$

$$p_{I'}(x) = \sum_m p_{I',m} \sin\alpha_m x\,;\; p_{I''}(x) = \sum_m p_{I'',m} \sin\alpha_m x$$

$$(i = \overline{1, r};\; I = \overline{I, R};\; n = 1, 2, 3, \ldots;\; m = 1, 2, 3, \ldots)$$

sau a seriilor duble trigonometrice:

$$p_{i'}(x, y) = \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{i',n} \sin\alpha_m x_i\,,\; \sin\alpha_m x \sin\beta_n y,$$

$$p_{i''}(x, y) = \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{i'',n} \sin\alpha_m x_{i''} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y,$$

$$p_{I'}(x, y) = \frac{2}{b} \sum_m \sum_n p_{I',m} \sin\beta_n y_{I'} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y, \qquad (4.b)$$

$$p_{I''}(x, y) = \frac{2}{b} \sum_m \sum_n p_{I'',m} \sin\beta_n y_{I''} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y$$

$$(i = \overline{1, r};\; I = \overline{I, R};\; m, n = 1, 2, 3, \ldots),$$

adică încărcarea totală:

$$q(x, y) = p_0(x, y) + \sum_{i'} p_{i'}(x, y) + \sum_{i''} p_{i''}(x, y) + \sum_{I'} p_{I'}(x, y) +$$

$$+ \sum_{I''} p_{I''}(x, y) = \sum_m \sum_n q_{mn} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y =$$

$$= \sum_m \sum_n \left[p_{0,mn} + \frac{2}{a} \sum_i (p_{i,n} \sin\alpha_m x_{i'} + p_{i'',n} \sin\alpha_m x_{i''}) + \right. \qquad (4.c)$$

$$\left. + \frac{2}{b} \sum_I (p_{I',m} \sin\beta_n y_{I'} + p_{I'',m} \sin\beta_n y_{I''}) \right] \sin\alpha_m x \sin\beta_n y$$

$$(i = \overline{1, r};\; I = \overline{I, R};\; m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Expresia $w(x, y)$ a săgeților plăcii, ce poate fi de asemenea reprezentată sub forma seriei duble trigonometrice

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y \tag{4.d}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots),$$

trebuie să verifice ecuația (1.a) a săgeților plăcii astfel că rezultă

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{K N_{mn}}, \tag{4.e}$$

unde am notat

$$N_{mn} = (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2.$$

În particular, săgețile plăcii pe liniile în contact cu cele două familii de nervuri sînt, respectiv,

$$\begin{aligned} w(x_{i'}, y) &= \sum_m \sum_n w_{mn} \sin\alpha_m x_{i'} \sin\beta_n y \qquad (i = \overline{1, r}), \\ w(x_{i''}, y) &= \sum_m \sum_n w_{mn} \sin\alpha_m x_{i''} \sin\beta_n y, \qquad (i = \overline{1, r}) \end{aligned} \tag{4.f}$$

și

$$\begin{aligned} w(x, y_{I'}) &= \sum_m \sum_n w_{mn} \sin\beta_n y_{I'} \sin\alpha_m x, \ (I = \overline{\mathrm{I}, \mathrm{R}}), \\ w(x, y_{I''}) &= \sum_m \sum_n w_{mn} \sin\beta_n y_{I''} \sin\alpha_m x, \ (I = \overline{I, R}) \end{aligned} \tag{4.g}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Referindu-ne apoi la prima familie de nervuri, paralele cu axa Oy și simplu rezemate la capete, observăm că asupra nervurii curente N_i acționează în primul rînd încărcările liniare $-p_{i'}(y)$, $-p_{i''}(y)$, care pot fi reprezentate sub forma seriilor simple trigonometrice

$$\begin{aligned} -p_{i'}(y) &= -\sum_n p_{i',n} \sin\beta_n y, \\ -p_{i''}(y) &= -\sum_n p_{i'',n} \sin\beta_n y \end{aligned} \tag{5.a}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

și în al doilea rînd încărcările concentrate din noduri $P_{i'I'}, P_{i'I''}, P_{i''I'}, P_{i''I''}$; care pot fi reprezentate sub forma seriilor simple trigonometrice

$$P_{i'I'}(y) = \frac{2P_{i'I'}}{b} \sum_n \sin\beta_n y_{I'} \sin\beta_n y,$$

$$P_{i'I''}(y) = \frac{2P_{i'I''}}{b} \sum_n \sin\beta_n y_{I''} \sin\beta_n y, \tag{5.b}$$

$$P_{i''I'}(y) = \frac{2P_{i''I'}}{b} \sum_n \sin\beta_n y_{I'} \sin\beta_n y,$$

$$P_{i''I''}(y) = \frac{2P_{i''I''}}{b} \sum_n \sin\beta_n y_{I''} \sin\beta_n y$$

$$(I = \overline{1, R};\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

adică încărcarea totală :

$$q_i(y) = -p_{i'}(y) - p_{i''}(y) + \sum_{I=1}^{R} [P_{i'I'}(y) + P_{i'I''}(y) + P_{i''I'}(y) + P_{i''I''}(y)] =$$

$$= \sum_n q_{i,n} \sin\beta_n y =$$

$$= \sum_n \left[-p_{i',n} - p_{i'',n} + \frac{2}{b} \sum_{I=1}^{R} (P_{i'I'} \sin\beta_n y_{I'} + P_{i'I''} \sin\beta_n y_{I''} + \right.$$

$$\left. + P_{i''I'} \sin\beta_n y_{I'} + P_{i''I''} \sin\beta_n y_{I''}) \right] \sin\beta_n y \tag{5.c}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Asupra aceleiași nervuri mai acționează momentul de torsiune distribuit :

$$m_i(y) = c_{i'} p_{i'}(y) + c_{i''} p_{i''}(y) - c_{i'} [P_{i'I'}(y) + P_{i'I''}(y)]$$

$$- c_{i''} [P_{i''I'}(y) + P_{i''I''}(y)] = \sum_n m_{i,n} \sin\beta_n y =$$

$$= \sum_n \{ c_{i'} p_{i',n} + c_{i''} p_{i'',n} - \frac{2}{b} \sum_{I=1}^{R} [c_{i'} (P_{i'I'} \sin\beta_n y_{I'} + P_{i'I''} \sin\beta_n y_{I''}) +$$

$$+ c_{i''} (P_{i''I'} \sin\beta_n y_{I'} + P_{i''I''} \sin\beta_n y_{I''})] \} \sin\beta_n y$$

$$(n = 1,2,3,\ldots). \tag{5.d}$$

Expresia $w_i(y)$ a săgeților nervurii, ce poate fi reprezentată sub forma seriei simple trigonometrice

$$w_i(y) = \sum_n w_{i,n} \sin \beta_n y$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5.e}$$

trebuie să verifice ecuația (2.a) a săgeților grinzii astfel că rezultă :

$$w_{i,n} = \frac{q_{i,n}}{EI_i \beta_n^4}. \tag{5.f}$$

Expresia $\theta_i(y)$ a rotirilor nervurii, ce poate fi reprezentată sub forma seriei simple trigonometrice

$$\theta_i(y) = \sum_n \theta_{i,n} \sin \beta_n y$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5.g}$$

trebuie să verifice ecuația (3.a) a rotirilor grinzii, astfel că rezultă

$$\theta_{i,n} = \frac{m_{i,n}}{GJ_i \beta_n^2} \tag{5.h}$$

În particular, săgețile nervurii pe liniile de articulație cu placa sînt :

$$w_{i'}(y) = w_i(y) - c_{i'}\, \theta_i(y) = \sum_n (w_{i,n} - c_{i'}\, \theta_{i,n}) \sin \beta_n y,$$
$$w_{i''}(y) = w_i(y) - c_{i''}\, \theta_i(y) = \sum_n (w_{i,n} - c_{i''} \theta_{i,n}) \sin \beta_n y \tag{5.i}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Referindu-ne în sfîrșit la cea de-a doua familie de nervuri, paralele cu axa Ox și simplu rezemate la capete, observăm că asupra nervurii N_{I} acționează în primul rînd încărcările liniare $-p_{\text{I}'}(x)$, $-p_{\text{I}''}(x)$, care pot fi reprezentate sub forma seriilor simple trigonometrice

$$-p_{\text{I}'}(x) = -\sum_m p_{\text{I}',m} \sin \alpha_m x,$$
$$-p_{\text{I}''}(x) = -\sum_m p_{\text{I}'',m} \sin \alpha_m x \tag{6.a}$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

și în al doilea rînd încărcările concentrate din noduri $-P_{i'I'}$, $-P_{i'',I'}$, $-P_{i'I''}$, $-P_{i''I''}$, care pot fi reprezentate sub forma seriilor simple trigonometrice

$$P_{i'I'}(x) = -\frac{2P_{i'I'}}{a}\sum_m \sin\alpha_m x_{i'},\ \sin\alpha_m x,$$

$$P_{i''I'}(x) = -\frac{2P_{i''I'}}{a}\sum_m \sin\alpha_m x_{i''}\sin\alpha_m x,$$

$$P_{i'I''}(x) = -\frac{2P_{i'I''}}{a}\sum_m \sin\alpha_m x_{i'},\ \sin\alpha_m x, \tag{6.b}$$

$$P_{i''I''}(x) = -\frac{2P_{i''I''}}{a}\sum_m \sin\alpha_m x_{i''}\sin\alpha_m x,$$

$$(i = \overline{1, r};\ m = 1, 2, 3, \ldots),$$

adică încărcarea totală

$$q_I(x) = -p_{I'}(x) - p_{I''}(x) + \sum_{i=1}^{r}[P_{i'I'}(x) + P_{i''I'}(x) + P_{i'I''}(x) + P_{i''I''}(x)] =$$

$$= \sum_m q_{I,m}\sin\alpha_m x =$$

$$= \sum_m \left[-p_{I',m} - p_{I'',m} - \frac{2}{a}\sum_{i=1}^{r}(P_{i'I'}\sin\alpha_m x_{i'} + P_{i''I'}\sin\alpha_m x_{i''} + \right.$$

$$\left. + P_{i'I''}\sin\alpha_m x_{i'} + P_{i''I''}\sin\alpha_m x_{i''})\right]\sin\alpha_m x \tag{6.c}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Asupra aceleiași nervuri mai acționează momentul de torsiune distribuit :

$$m_I(x) = c_{I'}p_{I'}(x) + c_{I''}p_{I''}(x) - c_{I'}[P_{i'I'}(x) + P_{i''I'}(x)] -$$
$$- c_{I''}[P_{i'I''}(x) + P_{i''I''}(x)] = \sum_m m_{I,m}\sin\alpha_m x =$$

$$= \sum_m \left\{c_{I'}p_{I',m} + c_{I''}p_{I'',m} + \frac{2}{a}\sum_{i=1}^{r}[c_{I'}(P_{i'I'}\sin\alpha_m x_{i'} + P_{i''I'}\sin\alpha_m x_{i''}) + \right.$$

$$\left. + c_{I''}(P_{i'I''}\sin\alpha_m x_{i'} + P_{i''I''}\sin\alpha_m x_{i''})]\right\}\sin\alpha_m x \tag{6.d}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Expresia $w_I(x)$ a săgeților nervurii, se poate fi reprezentată sub forma seriei simple trigonometrice

$$w_I(x) = \sum_m w_{I,m} \sin \alpha_m x \tag{6.e}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots),$$

trebuie să verifice ecuația (2.a) a săgeților grinzii astfel că rezultă :

$$w_{I,m} = \frac{q_{I,m}}{EI_I \alpha_m^4}. \tag{6.f}$$

Expresia $\theta_I(x)$ a rotirilor nervurii, ce poate fi reprezentată sub forma seriei simple trigonometrice

$$\theta_I(x) = \sum_m \theta_{I,m} \sin \alpha_m x$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{6.g}$$

trebuie să satisfacă ecuația (3.a) a rotirilor grinzii astfel că rezultă :

$$\theta_{I,m} = \frac{m_{I,m}}{G J_I \alpha_m^2}. \tag{6.h}$$

În particular, săgețile nervurii pe liniile de articulații cu placa sînt :

$$w_{I'}(x) = w_I(x) - c_{I'} \theta_I(x) = \sum_m (w_{I,m} - c_{I'} \theta_{I,m}) \sin \alpha_m x,$$

$$w_{I''}(x) = w_I(x) - c_{I''} \theta_I(x) = \sum_m (w_{I,m} - c_{I''} \theta_{I,m}) \sin \alpha_m x \tag{6.i}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Compatibilitățile deformațiilor plăcii și nervurilor curente pe coloanele i', i'', ale plăcii și nervurilor curente pe liniile I', I'' precum și ale nervurilor curente în nodurile (i', I'), (i', I''), (i'', I'), (i'' I''), se scriu :

$$w(x_{i'}, y) = w_{i'}(y), \quad w(x_{i''}, y) = w_{i''}(y), \tag{α}$$

$$w(x, y_{I'}) = w_{I'}(x), \; w(x, y_{I''}) = w_{I''}(x), \tag{β}$$

$$w_{i'}(y_{I'}) = w_{I'}(x_{i'}), \; w_{i'}(y_{I''}) = w_{I''}(x_{i'}),$$

$$w_{i''}(y_{I'}) = w_{I'}(x_{i''}), \; w_{i''}(y_{I''}) = w_{I''}(x_{i''}), \tag{γ}$$

după care se ține seama de relațiile (4.f), (4.g), (5.i), (6.i), (4.e), (5.f), (5.h), (6.f), (6.h), (4.c), (5.c), (5.d), (6.c), (6.d).

După multiplicarea cu factorul $\pi^4 aK/2a^4$, condiția (α) devine

$$\delta_{i'I',n}\, p_{I',n} + \delta_{i'I'',n}\, p_{I'',n} + \ldots + \delta_{i'r',n}\, p_{r',n} + \delta_{i',r'',n}\, p_{r'',n} = \Delta_{i',n},$$

$$\delta_{i''I',n}\, p_{I',n} + \delta_{i''I'',n}\, p_{I'',n} + \ldots + \delta_{i''r',n}\, p_{r',n} + \delta_{i''r'',n}\, p_{r'',n} = \Delta_{i'',n},$$

$$(i = \overline{1, r};\ n = 1, 2, ,3, \ldots) \tag{7.a}$$

unde am notat

$$\delta_{i'i',n} = \sum_m \frac{\sin^2\alpha_m\, x_{i'}}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^2} + \frac{a\,K}{2EI_i\,\alpha^4 n^4} + \frac{c_{i'}^2\,\pi^2 K}{2GJ_i\,a\alpha^2\,n^2},$$

$$\delta_{i'i'',n} = \sum_m \frac{\sin\alpha_m\, x_{i'}\,\sin\alpha_m\, x_{i''}}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^2} + \frac{a\,K}{2EI_i\,\alpha^4\,n^4} + \frac{c_{i'}\,c_{i''}\,\pi^2\,K}{2GJ_i\,a\alpha^2\,n^2},$$

$$\delta_{i'j',n} = \sum_m \frac{\sin\alpha_m\, x_{i'}\,\sin\alpha_m\, x_{j'}}{(m^2 + \alpha^2\,n^2)^2},$$

$$\delta_{i'j'',n} = \sum_m \frac{\sin\alpha_m\, x_{i'}\,\sin\alpha_m\, x_{j''}}{(m^2 + \alpha^2\,n^2)^2}, \tag{7.b}$$

$$\Delta_{i',n} = -\frac{a}{2}\,\frac{p_{0,mn}\sin\alpha_m\, x_{i'}}{(m^2 + \alpha^2\,n^2)^2} -$$

$$- \alpha \sum_m \frac{p_{I',m}\sin\beta_n\, y_{I'} + p_{I'',m}\sin\beta_n\, y_{I''} + \ldots + p_{R',m}\sin\beta_n y_{R'} + p_{R'',m}\sin\beta_n y_{R''}}{(m^2 + \alpha^2\,n^2)^2} \times$$

$$\times \sin\alpha_m\, x_{i'} + \frac{K}{EI_i\,\alpha^3\,n^4}\,[(P_{i'I'} + P_{i''I'})\sin\beta_n\, y_{I'} + (P_{i'I''} + P_{i''I''})\sin\beta_n y_{I''} +$$

$$+ \ldots + (P_{i'R'} + P_{i''R'}\sin\beta_n\, y_{R'} + (P_{i'R''} + P_{i''R''}\sin\beta_n\, y_{R''}] +$$

$$+ \frac{\pi^2\,Kc_{i'}}{GJ_i\,\alpha\,a^2\,n^2}\,[(c_{i'}\,P_{i'I'} + c_{i''}\,P_{i''I'})\sin\beta_n y_{I'} + (c_{i'}\,P_{i'I''} + c_{i''}\,P_{i''I''})\sin\beta_n\, y_{I''} +$$

$$+ \ldots + (c_{i'}\,P_{i'R'} + c_{i''}\,P_{i''R'})\sin\beta_n y_{R'} + (c_{i'}P_{i'R''} + c_{i''}P_{i''R''})\sin\beta_n y_{R''}]$$

$$(m = \overline{1, M})$$

şi constituie un sistem de $2r$ ecuaţii algebrice liniare cu $2r$ necunoscute a căror matrice coloană o notăm cu $\{p_{t,n}\}$.

După multiplicarea cu factorul $\pi^4 bK/2b^4$, condiţia (β) devine

$$\delta_{I'I',m}p_{I',m}+\delta_{I'I'',m}p_{I'',m}+\ldots+\delta_{I'R',m}p_{R',m}+\delta_{I'R'',m}p_{R'',m}=\Delta_{I',m}$$

$$\delta_{I''I',m}p_{I',m}+\delta_{I''I'',}p_{I'',m}+\ldots+\delta_{I''R',m}p_{R',m}+\delta_{I''R'',m}p_{R'',m}=\Delta_{I'',m}$$

$$(I=\overline{I,R};\ m=1,2,3,\ldots),$$

unde am notat

$$\delta_{I'I',m}=\sum_n\frac{\sin^2\beta_n y_{I'}}{(\beta^2m^2+n^2)^2}+\frac{b\,K}{2EI_I\beta^4m^4}+\frac{c_{I'}^2\pi^2K}{2GJ_I\,b\,\beta^2\,m^2},$$

$$\delta_{I'I''m}=\sum_n\frac{\sin\beta_n y_{I'}\sin\beta_n y_{I''}}{(\beta^2m^2+n^2)^2}+\frac{b\,K}{2EI_I\,\beta^4\,m^4}+\frac{c_{I'}c_{I''}\pi^2K}{2GJ_Ib\beta^2m^2},$$

$$\delta_{I'J',m}=\sum_n\frac{\sin\beta_n y_{I'}\sin\beta_n y_{J'}}{(\beta^2m^2+n^2)^2},\qquad(8.b)$$

$$\delta_{I'\,J'',m}=\sum_n\frac{\sin\beta_n y_{I'}\sin\beta_n y_{J''}}{(\beta^2n^2+n^2)^2},$$

$$\Delta_{I',m}=-\frac{b}{2}\sum_n\frac{p_{0,mn}\sin\beta_n y_{J'}}{(\beta^2m^2+n^2)^2}-$$

$$-\beta\sum_n\frac{p_{l',n}\sin\alpha_m x_{l'}+p_{l'',n}\sin\alpha_m\,x_{l''}+\ldots+p_{r',n}\sin\alpha_m x_{r'}+p_{r'',n}\sin\alpha_m x_{r'}}{(\beta^2m^2+n^2)^2}\times$$

$$\times\sin\beta_n\,y_{I'}-\frac{K}{EI_I\,\beta^3m^4}[(P_{I'I'}+P_{I'I''})\sin\alpha_m x_{l'}+(P_{l''I'}+P_{l''I''})\sin\alpha_m\,x_{l''}+$$

$$+\ldots+(P_{r'I'}+P_{r'I''})\sin\alpha_m\,x_{r'}+(P_{r''\,I'}+P_{r''I''})\sin\alpha_m\,x_{r''}]-$$

$$-\frac{\pi^2Kc_{i'}}{GJ_I\beta b^2m^2}[(c_{I'}P_{I'I'}+c_{I''}P_{I'I''})\sin\alpha_m x_{l'}+(c_{I'}P_{I''I'}+c_{I''}P_{I''I''})\sin\alpha_m\,x_{l''}+$$

$$+\ldots+(c_{I'}\,P_{r'I'}+c_{I''}P_{r'I''})\sin\alpha_m\,x_{r'}+(c_{I'}P_{r''I'}+c_{I''}P_{r''I''})\sin\alpha_m\,x_{r''}]$$

$$(n=\overline{1,N})$$

și constituie un sistem de $2R$ ecuații algebrice cu $2R$ necunoscute a căror matrice coloană o notăm $\{p_{T,m}\}$.

După multiplicarea cu factorul $\frac{\pi^4}{2}$ condiția (γ) devine

$$\delta_{(i'1')(l'1')} P_{l'1'} + \delta_{(i'1')(i1)} P_{i1} + \delta_{(i'1')(l''1')} P_{l''1'} + \delta_{(i'1')(i'1')} P_{i'1'} +$$

$$+ \delta_{(i'1')(l'1'')} P_{l'1''} + \delta_{(i'1')(i'1)} P_{i'1} + \delta_{(i'1')(l''1'')} P_{l''1''} + \delta_{(i'1')(i''1'')} P_{i''1''} +$$

$$+ \ldots + \delta_{(i'1')(r'1')} + P_{r'1'} + \delta_{(i'1')(i'R')} P_{i'R'} + \delta_{(i'1')(r''1')} P_{r''1'} +$$

$$+ \delta_{(i'1')(i'R'')} P_{r'R''} + \delta_{(i'1')(r'1'')} P_{r'1''} + \delta_{(i'1')(i''R')} P_{i''R'} +$$

$$+ \delta_{(i'1')(r''1')} P_{r''1''} + \delta_{(i'1')(i''R'')} P_{i''R''} = \Delta_{i'1'} ,$$

$$\delta_{(i'1'')(l'1')} P_{l'1'} + \delta_{(i'1'')(i1)} P_{i1} + \delta_{(i'1'')(l''1')} P_{l''1'} +$$

$$+ \delta_{(i'1'')(i'1')} P_{i'1'} + \delta_{(i'1'')(l'1'')} P_{l'1''} + \delta_{(i'1'')(i'1)} P_{i'1} +$$

$$+ \delta_{(i'1'')l''1''} P_{(l''1'')} + \delta_{(i'1'')(i''1'')} P_{i''1''} + \ldots + \delta_{(i'1'')(r'1')} P_{r'1'} +$$

$$+ \delta_{(i'1'')(i'R')} P_{i'R'} + \delta_{(i'1'')(r''1')} P_{r''1} + \delta_{(i'1'')(i'R'')} P_{i'R''} +$$

$$+ \delta_{(l'1'')(r'1'')} P_{r'1''} + \delta_{(i'1'')(i''R')} P_{i''R'} + \delta_{(i'1'')(r''1'')} P_{r''1''} +$$

$$+ \delta_{(i'1'')(i''R'')} P_{i''R''} = \Delta_{i'1''} ,$$

$$\delta_{(i''1')(l'1')} P_{l'1'} + \delta_{(i''1')(i1)} P_{i1} + \delta_{(i''i')(l''1')} P_{l''1'} +$$

$$+ \delta_{(i''i')(i'1'')} P_{i'1''} + \delta_{(i''1')(l'1'')} P_{l'1''} + \delta_{(i''1')(i'1)} P_{i'1} +$$

$$+ \delta_{(i''1')(l''1'')} + P_{l''1''} + \delta_{(i''1')(i''1')} P_{i''1'} + \ldots + \delta_{(i''1')(r'1')} P_{r'1'} +$$

$$+ \delta_{(i''1')(i'R')} P_{i'R'} + \delta_{(i''1')(r''1')} P_{r''1'} + \delta_{(i''1')(i'R'')} P_{i'R''} +$$

$$+ \delta_{(i''1')(r'1'')} P_{r'1''} + \delta_{(i''1')(i''R')} P_{i''R'} + \delta_{(i''1')(r''1'')} P_{r''1''} +$$

$$+ \delta_{(i''1')(i''R'')} P_{i''R''} = \Delta_{i''1'} ,$$

$$\delta_{(i''1'')(l'1')} P_{l'1'} + \delta_{(i''1'')(i1)} P_{i1} + \delta_{(i''1'')(l''1')} P_{l''1'} +$$

$$+ \delta_{(i''1'')(i'1')} P_{i'1'} + \delta_{(i''1'')(l'1'')} P_{l'1''} + \delta_{(i''1'')(i''1)} P_{i''1} +$$

$$+ \delta_{(i''1'')(l''1'')} P_{l''1''} + \delta_{(i''1'')(i''1'')} P_{i''1''} + \ldots + \delta_{(i''1'')(r'1')} P_{r'1'} +$$

$$+\delta_{(i''I'')(i'R')}P_{i'R'}+\delta_{(i''I'')(r''I')}P_{r''I'}+\delta_{(i''I'')(i'R'')}P_{i'R''}+$$

$$+\delta_{(i''I'')(r'I'')}P_{r'I''}+\delta_{(i''I'')(i''R')}P_{i''R'}+\delta_{(i''I'')(r''I'')}P_{r''I''}+$$

$$+\delta_{(i''I'')(i''R'')}P_{i''R''}=\Delta_{i''I''}\,,$$

$$(i=\overline{1,r};\ I=\overline{\mathbf{I},R}), \tag{9.a}$$

unde am notat

$$\delta_{(i'I')(i'I')}=\frac{a^3}{EI_I}\sum_m\frac{\sin^2\alpha_m x_{i'}}{m^4}+\frac{a\pi^2c_{I'}^2}{GJ_I}\sum_m\frac{\sin^2\alpha_m x_{i'}}{m^2}+$$

$$+\frac{b^3}{EI_i}\sum_n\frac{\sin^2\beta_n y_{I'}}{n^4}+\frac{b\pi^2c_{i'}^2}{GJ_i}\sum_n\frac{\sin^2\beta_n y_{I'}}{n^2}\,,$$

$$\delta_{(i'I')(i''I')}=\frac{a^3}{EI}\sum_m\frac{\sin\alpha_m x_{i'}\sin\alpha_m x_{i''}}{m^4}+\frac{a\pi^2c_{I'}^2}{GJ_I}\sum_m\frac{\sin\alpha_m x_{i'}\sin\alpha_m x_{i''}}{m^2}+$$

$$+\frac{b^3}{EI_i}\sum_n\frac{\sin^2\beta_n y_{I'}}{n^4}+\frac{b\pi^2c_{i'}c_{i''}}{GJ_i}\sum_n\frac{\sin^2\beta_n y_{I'}}{n^2}\,,$$

$$\delta_{(i'I')(i'I'')}=\frac{a^3}{EI_I}\sum_m\frac{\sin^2\alpha_m x_{i'}}{m^4}+\frac{a\pi^2c_{I'}c_{I''}}{GJ_I}\sum_m\frac{\sin^2\alpha_m x_{i'}}{m^2}+$$

$$+\frac{b^3}{EI_i}\sum_n\frac{\sin\beta_n y_{i'}\sin\beta_n y_{I''}}{n^4}+\frac{b\pi^2c_{i'}^2}{GJ_i}\sum_n\frac{\sin\beta_n y_{I'}\sin\beta_n y_{I''}}{n^2}$$

$$\delta_{(i'I')(i''I'')}=\frac{a^3}{EI_I}\sum_m\frac{\sin\alpha_m x_{i'}\sin\alpha_m x_{i''}}{m^4}+$$

$$+\frac{a\pi^2c_{I'}c_{I''}}{GJ_I}\sum_m\frac{\sin\alpha_m x_{i'}\sin\alpha_m x_{i''}}{m^2}+$$

$$+\frac{b^3}{EI_i}\sum_n\frac{\sin\beta_n y_{I'}\sin\beta_n y_{I''}}{n^4}+\frac{bc_{i'}c_{i''}\pi^2}{GJ_i}\sum_n\frac{\sin\beta_n y_{I'}\sin\beta_n y_{I''}}{n^2}\,,$$

$$\delta_{(i'I')(j'I')}=\frac{a^3}{EI_I}\sum_m\frac{\sin\alpha_m x_{j'}\sin\alpha_m x_{i'}}{m^4}+\frac{ac_{I'}^2\pi^2}{GJ_I}\sum_m\frac{\sin\alpha_m x_{j'}\sin\alpha_m x_{i'}}{m^2}\,,$$

$$\delta_{(i'I')(j''I')}=\frac{a^3}{EI_I}\sum_m\frac{\sin\alpha_m x_{j''}\sin\alpha_m x_{i'}}{m^4}+\frac{ac_{I'}^2\pi^2}{GJ_I}\sum_m\frac{\sin\alpha_m x_{j''}\sin\alpha_m x_{i'}}{m^2}\,,$$

$$\delta_{(i'I')(i'J')} = \frac{b^3}{EI_i} \sum_n \frac{\sin\beta_n y_{J'} \sin\beta_n y_{I'}}{n^4} + \frac{bc_{i'}^2 \pi^2}{GJ_i} \sum_n \frac{\sin\beta_n y_{J'} \sin\beta_n y_{I'}}{n^2},$$

$$\delta_{(i'I')(i'J'')} = \frac{b^3}{EI_i} \sum_n \frac{\sin\beta_n y_{J''} \sin\beta_n y_{I'}}{n^4} + \frac{bc_{i'}^2 \pi^2}{GJ_i} \sum_n \frac{\sin\beta_n y_{J''} \sin\beta_n y_{I'}}{n^2},$$

$$\Delta_{i'I'} = -\frac{a^4}{2EI_I} \sum_m \frac{p_{I',m} + p_{I'',m}}{m^4} \sin\alpha_m x_{i'} -$$

$$-\frac{a^2\pi^2}{2GJ_I} \sum_m \frac{c_I^2 \cdot p_{I',m} + c_{I'} c_{I''} p_{I'',m}}{m^2} \sin\alpha_m x_{i'} +$$

$$+\frac{b^4}{2EI_i} \sum_n \frac{p_{i',n} + p_{i'',n}}{n^4} \sin\beta_n y_{I'} +$$

$$+\frac{b^2\pi^2}{2GJ_i} \sum_n \frac{c_{i'}^2 \, p_{i',n} + c_{i'} c_{i''} p_{i'',n}}{n^2} \sin\beta_n y_{I'},$$

$$(m = \overline{1, M}\,;\; n = \overline{1, N}) \tag{9.b}$$

și constituie un sistem de $4rR$ ecuații algebrice liniare cu $4rR$ necunoscute a căror matrice coloană o notăm $\{P_{tT}\}$.

Sistemele de ecuații (7.a), (8.a) și (9.a) sînt simultane deoarece termenii liberi ai fiecărui sistem conțin necunoscutele aparținînd celorlalte două sisteme.

Rezolvarea practică a celor trei sisteme de ecuații simultane se poate face prin aproximații succesive care comportă următoarele etape :

1. Se consideră $\{p_{T,m}\} = \{0\}$, $\{P_{tT}\} = \{0\}$ și pentru $m = \overline{1, M}$ se rezolvă succesiv sistemul de ecuații (7.a) pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, N$, obținîndu-se $\{p_{t,n}\}^0$ în aproximația inițială ;

2. Se consideră $\{p_{t,n}\} = \{0\}$ $\{P_{tT}\} = \{0\}$ și pentru $n = \overline{1, N}$ se rezolvă succesiv sistemul de ecuații (8.a) pentru $m = 1, 2, 3, \ldots, M$, obținîndu-se $\{p_{T,m}\}^0$ în aproximația inițială ;

3. Se consideră $\{p_{T,m}\} = \{p_{T,m}\}^0$, $\{p_{t,n}\} = \{p_{t,n}\}^0$ și pentru $m = \overline{1, M}$, $n = \overline{1, N}$ se rezolvă sistemul de ecuații (9.a) obținîndu-se $\{P_{tT}\}^0$ în aproximația inițială ;

4. Se consideră $\{p_{T,m}\} = \{p_{T,m}\}^0$, $\{P_{tT}\} = \{P_{tT}\}^0$ și pentru $m = \overline{1, M}$ se rezolvă succesiv sistemul de ecuații (7.a) pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, N$ obținîndu-se $\{p_{t,n}\}^1$ în prima aproximație ;

5. Se consideră $\{p_{t,n}\} = \{p_{t,n}\}^0$, $\{P_{tT}\} = \{P_{tT}\}^0$ și pentru $n = \overline{1, N}$ se rezolvă succesiv sistemul de ecuații (8.a) pentru $m = 1, 2, 3, \ldots, M$ obținîndu-se $\{p_{T,m}\}^1$ în prima aproximație ;

6. Se consideră $\{p_{T,m}\} = \{p_{T,m}\}$,[1] $\{p_{t,n}\} = \{p_{t,n}\}^1$ și pentru $m = \overline{1, M}$, $n = \overline{1, N}$ se rezolvă sistemul de ecuații (9.a) obținîndu-se $\{P_{tT}\}^1$ în prima aproximație;

7. Se repetă ciclurile descrise mai sus pînă cînd valorile $\{p_{t,n}\}$, $\{p_{T,m}\}$, $\{P_{tT}\}$ se stabilizează relativ la o toleranță dinainte stabilită.

Observație. Convergența iterației poate fi substanțial îmbunătățită dacă:

— prin trecerea la următoarea etapă de calcul se ține seama în totalitate de valorile necunoscutelor obținute în etapa precedentă;

— se pornește de la valori inițiale $\{p_{t,n}\}^0$, $\{p_{T,m}\}^0$ mai apropiate de realitate și stabilite, în funcție de tipul încărcării exterioare $p_0(x, y)$, printr-un procedeu cunoscut de evaluare.

După rezolvarea sistemelor de ecuații simultane devin cunoscute expresiile săgeților plăcii și diafragmelor astfel că problema pusă este complet rezolvată.

Verificarea rezultatelor, în calculele numerice, se face controlînd dacă săgețile plăcii sînt identice cu săgețile muchiilor tălpilor superioare ale nervurilor precum și dacă săgețile nervurilor sînt identice în noduri.

Volumul de calcule impune utilizarea unui calculator electronic.

Primită la redacție la 7 noiembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. R. BAREŠ, CH. MASSONET, *Le calcul des grillages de poutre orthotropes selon la méthode Guyon-Massonet-Bareš*, Dunod, Paris, 1966.
2. I. BELEȘ, *Contribuții la calculul construcțiilor metalice hidrotehnice, cu elemente de rezistență din tablă și grinzi, ținînd seama de efectul de conlucrare spațială* (Teză de doctorat), Institutul de construcții București, 1971.
3. I. BELEȘ, *Placa ortotropă cu diafragme*, St. cerc. mec. apl., **33**, *3* (1976).
4. I. G. BUCĂ, *Contribuții la definirea stării limită de deformație a plăcilor ortotrope ale podurilor metalice* (Teză de doctorat), Institutul de construcții București, 1970.
5. D. G. POPA, *Contribuții la calculul plăcilor ortotrope, ținînd seama de legătura elastică dintre placă și nervuri* (Teză de doctorat), Institutul de construcții București, 1978.
6. D. G. POPA, *Aplicarea metodei seriilor simple trigonometrice la calculul plăcilor rigidizate cu nervuri dispuse pe o singură parte*, Buletinul științific al Institutului de construcții București, **20**, *3—4* (1977).
7. D. G. POPA, *Extinderea soluției prin serii duble trigonometrice pentru placa rigidizată cu nervuri dispuse pe o singură parte*, St. cerc mec. apl., **39**, *2* (1980).
8. D. G. POPA, *Metoda de calcul, utilizînd seriile duble trigonometrice, pentru placa rigidizată cu diafragme excentrice dispuse pe două direcții*. Buletinul științific I.C.B., **21**, *3—4* (1978)
9. V. M. SOARE, *Contribuții la calculul plăcilor ortotrope cu nervuri de rigidizare pe o singură parte*, St. cerc. mec. apl., **33**, *4* (1974), **34**, *1* (1975).
10. V. M. SOARE, *Plăci plane*. Secțiunea VI din Manual pentru calculul construcțiilor, Ed. a 2-a, Ed. tehnică, București, 1977.
11. WAH THEIN, L. R. CALCOTE, *Structural Analysis by Finite Difference Calculus*, Van Nostrand Rheinhold Company, New York, 1970.

ASUPRA INTEGRĂRII SISTEMULUI DE ECUAȚII DIFERENȚIALE AL VIBRAȚIILOR STRUCTURILOR CU UN NUMĂR FINIT DE GRADE DE LIBERTATE, EXCITATE SEISMIC

de ZAHARIA GHEORGHIU

I. P. I. U. București

Studiul dezvoltă problema integrării sistemului de ecuații diferențiale al vibrațiilor structurilor cu un număr finit de grade de libertate, prin transformarea acestuia într-un sistem cu un număr egal de ecuații diferențiale independente (descompunere modală). Considerînd, în continuare, ecuația de vibrație a structurii pe direcția gradului de libertate i în modul j și acceptînd că accelerația excitatoare pe direcția gradului de libertate respectiv este o funcție vibratorie oarecare, dată prin puncte, este propus un mod de conducere a calculului orientat spre abordarea numerică cu ajutorul calculatorului electronic.

Fie o structură oarecare pentru care definirea poziției deformate instantanee se realizează prin precizarea unui număr finit, n, de grade de libertate independente, supusă acțiunii unei mișcări impuse bazei sale de rezemare.

Fie FI matricea coloană a forțelor de inerție, FA matricea-coloană a forțelor de amortizare și FE matricea-coloană a forțelor elastice ce iau naștere pe direcțiile gradelor de libertate. Avem :

$$\begin{aligned} FI &= -M \cdot [U'' + U_0''], \\ FA &= -C \cdot U', \\ FE &= -R \cdot U, \end{aligned} \tag{1}$$

în care

$M = (m_{ij})$ reprezintă matricea coeficienților de inerție ; coeficientul m_{ij} reprezintă forța de inerție ce apare pe direcția gradului de libertate i, cînd pe direcția gradului de libertate j există o accelerație unitară, iar accelerațiile pe direcțiile celorlalte grade de libertate sînt nule. Situîndu-ne în cazul uzual al concentrării prealabile a masei totale a structurii într-un număr n_1 de mase discrete, ale căror n deplasări reținute pentru analiză ($n \geqslant n_1$) constituie gradele de libertate ale structurii, matricea M este diagonală.

$C = (c_{ij})$ — matricea coeficienților de amortizare vîscoasă ; coeficientul c_{ij} reprezintă forța de amortizare ce apare pe direcția gradului de libertate i, cînd pe direcția gradului de libertate j

există o viteză unitară, iar vitezele pe direcţiile celorlalte grade de libertate sînt nule.

Acceptăm că matricea C se poate exprima ca o combinaţie liniară a matricelor M şi R:

$$C = \alpha_M \cdot M + \alpha_R \cdot R. \tag{2}$$

$R = (r_{ij})$ — matricea coeficienţilor de rigiditate; coeficientul r_{ij} reprezintă forţa elastică ce apare pe direcţia gradului de libertate i, cînd pe direcţia gradului de libertate j există o deplasare unitară, iar deplasările pe direcţiile celorlalte grade de libertate sînt nule.

$U = (u_i(t))$, $U' = (u_i'(t))$, $U'' = (u_i''(t))$ reprezintă, respectiv, matricele-coloană ale deplasărilor, vitezelor, acceleraţiilor instantanee, toate relative la baza de rezemare, ce se produc pe direcţiile gradelor de libertate.

$U_0'' = (u_{0i}''(t))$ — matrice-coloană cuprinzînd proiecţiile acceleraţiei instantanee impuse bazei de rezemare pe direcţia fiecărui grad de libertate.

Situîndu-ne în cazul uzual al componentei de acceleraţie de translaţie orizontală unică impusă bazei de rezemare, fie ea $u_0''(t)$, şi al situaţiei cu $n_1 = n$, unde gradele de libertate reţinute pentru analiză sînt toate paralele cu direcţia de excitaţie, toate elementele matricei sînt egale cu $u_0''(t)$.

Condiţia de echilibru dinamic se scrie:

$$FI + FA + FE = 0,$$

ceea ce, ţinînd seama de (1), revine la

$$M \cdot U'' + C \cdot U' + R \cdot U = - M \cdot U_0'' \tag{3}$$

Am obţinut în acest fel sistemul de ecuaţii diferenţiale al problemei în scriere matriceală.

Efectuînd schimbarea de variabilă

$$\begin{aligned} U &= W \cdot Y, \\ U' &= W \cdot Y', \\ U'' &= W \cdot Y'', \end{aligned} \tag{4}$$

unde $W = (w_{ij})$ este o matrice nesingulară şi $Y = (y_i(t))$, $Y' = (y_i'(t))$, $Y'' = (y_i''(t))$, premultiplicînd (3) cu M^{-1}, apoi cu W^{-1} şi notînd

$$\Omega_1 = W^{-1} \cdot (M^{-1} \cdot C) \cdot W, \tag{5}$$

$$\Omega_2 = W^{-1} (M^{-1} \cdot R) \cdot W,$$

obţinem

$$Y'' + \Omega_1 \cdot Y' + \Omega_2 \cdot Y = - W^{-1} \cdot U_0''. \tag{3'}$$

Prin urmare, dacă reușim să găsim soluția generală Y a sistemului (3'), soluția generală U a sistemului (3) se obține prin transformarea (4).
Desigur însă că schimbarea de variabilă (4) se justifică numai dacă integrarea sistemului (3') se face mai ușor, în particular dacă el este format din ecuații diferențiale independente. Este deci necesar ca matricele Ω_1, Ω_2 să fie diagonale.
Ținînd seama de (2), avem însă

$$\Omega_1 = \alpha_M \cdot E + \alpha_R \cdot \Omega_2, \tag{6}$$

astfel încît necesitatea diagonalizării se restrînge asupra matricei Ω_2; am notat prin E matricea unitate.

Ajungem în acest fel la problema valorilor și vectorilor proprii ai matricei $M^{-1} \cdot R$; într-adevăr, dacă W este matricea vectorilor proprii (matricea modală), atunci Ω_2 — în baza enunțului matriceal de definiție al problemei — este matricea valorilor proprii (matricea spectrală).

Proprietățile care ne interesează sînt :

1) Dacă valorile proprii sînt distincte, matricea Ω_2 este diagonală.

2) Situîndu-ne în cazul în care matricele M și R sînt reale, simetrice și pozitiv definite :

· vectorii proprii sînt reali și se bucură de proprietatea de ortogonalitate prin raport cu matricea M, adică

$$\mathcal{M} = W^T \cdot M \cdot W \tag{7}$$

reprezintă o matrice diagonală.

· valorile proprii sînt reale și pozitive.

Relațiile (4) și transformarea reușită a sistemului (3) în sistemul (3'), acesta din urmă alcătuit din ecuații diferențiale independente, exprimă descompunerea stării de vibrație reală a structurii în n stări (moduri) de vibrație elementare, distincte, numite moduri principale, fiecare dintre acestea fiind caracterizat de o funcție principală — componenta corespunzătoare a matricei coloană Y. Funcția $y_j(t)$ și derivatele sale precizează scara la care coloana j a matricei W (vectorul propriu j) reprezintă mărimile deplasărilor, vitezelor, accelerațiilor relative instantanee ale structurii după direcțiile gradelor de libertate, în modul de vibrație j. Putem scrie

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, y_j(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}(t), \\ u_i'(t) &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot y_j'(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}'(t), \\ u_i''(t) &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot y_j''(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}''(t), \end{aligned} \tag{4'}$$

unde $u_{ij}(t)$, $u_{ij}'(t)$, $u_{ij}''(t)$ reprezintă, respectiv, deplasarea, viteza și accelerația relativă instantanee după direcția gradului de libertate i în modul de vibrație j.

În continuare din (7) deducem

$$W^{-1} = \mathcal{M}^{-1} \cdot W^T \cdot M$$

şi dacă ne situăm în cazul cu

$$M = \operatorname{diag}(m_i),$$

avem

$$\mathcal{M} = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=1}^{n} w_{ki}^2 m_k\right),$$

$$W^{-1} = \left(\frac{w_{ji} \cdot m_j}{\sum_{k=1}^{n} w_{ki}^2 \cdot m_k}\right).$$

Punînd apoi

$$\Omega_1 = \operatorname{diag}(\alpha_M + \alpha_R \cdot \omega_i^2) = \operatorname{diag}(2\nu_i \omega_i),$$

$$\Omega_2 = \operatorname{diag}(\omega_i^2),$$

ecuaţia j a sistemului (3′) se poate scrie

$$y_j''(t) + 2\nu_j \omega_j \cdot y_j'(t) + \omega_j^2 \cdot y_j(t) = -\frac{\sum_{k=1}^{n} w_{kj} \cdot m_k \cdot u_{0k}''(t)}{\sum_{k=1}^{n} w_{kj}^2 \cdot m_k}. \tag{8}$$

Multiplicînd (8) cu w_{ij}, ţinînd seama de (4′) şi notînd

$$\eta_{ij} \cdot u_{0i}''(t) = w_{ij} \frac{\sum_{k=1}^{n} w_{kj} \cdot m_k \cdot u_{0k}''(t)}{\sum_{k=1}^{n} w_{kj}^2 \cdot m_k}, \tag{9}$$

obţinem

$$u_{ij}''(t) + 2\nu_j \omega_j \cdot u_{ij}'(t) + \omega_j^2 \cdot u_{ij}(t) = -\eta_{ij} \cdot u_{0i}''(t), \tag{8′}$$

care reprezintă ecuaţia de vibraţie a structurii pe direcţia gradului de libertate i în modul j. Ea este formal similară ecuaţiei de vibraţie a oscilatorului simplu, supus acţiunii unei fracţiuni din componenta acceleraţiei excitatoare paralelă cu gradul de libertate i. Aceasta înseamnă că trebuie să avem

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} = 1, \tag{10}$$

adică suma fracțiunilor repartizate fiecărui mod de vibrație trebuie să reprezinte întregul.
Pentru a dovedi aceasta, pornim de la identitatea

$$U_0'' = W \cdot W^{-1} \cdot U_0''.$$

Ținînd seama de expresia stabilită pentru W^{-1}, avem

$$(u_{0i}''(t)) = (w_{ij}) \cdot \left(\frac{w_{ji} \cdot m_j}{\sum_{k=1}^{n} w_{ki}^2 \cdot m_k} \right) \cdot (u_{0i}''(t)) =$$

$$= (w_{ij}) \cdot \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} w_{ki} \cdot m_k \cdot u_{0k}''(t)}{\sum_{k=1}^{n} w_{ki}^2 \cdot m_k)} \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} w_{kj} \cdot m_k \cdot u_{0k}''(t)}{\sum_{k=1}^{n} w_{kj}^2 \cdot m_k} \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} \, u_{0i}''(t) \right) = \left(u_{0i}''(t) \cdot \sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} \right),$$

de unde decurge proprietatea enunțată.
În sfîrșit, trebuie să precizăm că ν_j are semnificația fracțiunii (adimensionale) din valoarea amortizării la care structura nu mai vibrează (critică) în timp ce ω_j reprezintă frecvența circulară (pulsația) proprie, ambele în modul de vibrație j.

În continuare ne vom ocupa de integrarea ecuației diferențiale (8') considerând accelerația excitatoare $u_{0i}''(t)$ o funcție vibratorie oarecare, dată prin puncte.
Efectuînd schimbările de variabilă:

$$u_{ij}(t) = \frac{a_{0max}}{\omega_j^2} \cdot f(z), \qquad (11)$$

$$t = z \cdot P_{a_{0max}}$$

notînd

$$x_j = \omega_j \cdot P_{a_{0max}} = 2\pi \frac{P_{a_{0max}}}{P\omega_j}$$

$$x_j^* = x_j \cdot \sqrt{1 - \nu_j^2} \qquad (12)$$

$$n(z) = \frac{u_{0i}''(t)}{a_{0max}}$$

avem după transformări simple

$$f''(z) + 2\nu_j \cdot x_j \cdot f'(z) + x_j^2 \cdot f(z) = -\eta_{ij} \cdot x_j^2 \cdot n(z), \qquad (8'')$$

unde

a_{0max} — valoarea maximă (în valoare absolută) a funcţiei $u_{0i}''(t)$.

$P_{a_{0max}}$ — valoarea perioadei funcţiei $u_{0i}''(t)$ la momentul producerii valorii a_{0max}.

$P_{\omega j}$ — perioada proprie corespunzătoare pulsaţiei proprii ω_j.

Toate elementele care intervin în (8'') şi ecuaţia în ansamblu sînt adimensionale.

Pe intervalul k situat între punctele k şi $k+1$ acceptăm variaţia liniară a funcţiei excitatoare şi notînd

$$Dn_k = n_{k+1} - n_k,$$

$$Dz_k = z_{k+1} - z_k, \qquad (13)$$

$$n(z) = n_k + \frac{Dn_k}{Dz_k} \cdot (z - z_k),$$

avem soluţia generală

$$f(z) = e^{-\nu_j x_j z}(k_1 \cdot \cos x_j^* z + k_2 \cdot \sin x_j^* z) - \eta_{ij}\left[n_k + \frac{Dn_k}{Dz_k} \cdot \left(z - z_k - \frac{2\nu_j}{x_j}\right)\right],$$

$$f'(z) = e^{-\nu_j x_j z} \cdot [(-\nu_j x_j \cdot k_1 + x_j^* \cdot k_2) \cdot \cos x_j^* z -$$

$$-(x_j^* \cdot k_1 + \nu_j x_j \cdot k_2) \cdot \sin x_j^* z)] - \eta_{ij} \frac{Dn_k}{Dz_k}, \qquad (14)$$

$$f''(z) = e^{-\nu_j x_j z} \cdot \{[(\nu_j^2 x_j^2 - x_j^{*2}) \cdot k_1 - 2\nu_j x_j x_j^* \cdot k_2] \cdot \cos x_j^* z +$$

$$+ [2\nu_j x_j x_j^* \cdot k_1 + (\nu_j^2 x_j^2 - x_j^{*2}) \cdot k_2] \cdot \sin x_j^* z\}.$$

Determinînd constantele de integrare k_1 şi k_2, astfel încît variabila independentă z să se măsoare faţă de începutul intervalului $z = 0$ şi notînd $f(0) = f_{k0}$, $f'(0) = f'_{k0}$, avem

$$f(z) = f_{k0} \cdot F_1(z) - f'_{k0} \cdot \frac{F_3(z)}{x_j} + \eta_{ij} \cdot \left\{n_k \cdot [F_1(z) - 1] + \frac{Dn_k}{Dz_k} \cdot \left[\frac{F_5(z)}{x_j} - z + \frac{2\nu_j}{x_j}\right]\right\}$$

$$f'(z) = f_{k0} \cdot x_j \cdot F_3(z) - f'_{k0} \cdot F_2(z) + \eta_{ij}\left\{n_k \cdot x_j \cdot F_3(z) + \frac{Dn_k}{Dz_k} \cdot [F_1(z) - 1]\right\}, \qquad (14')$$

$$f''(z) = f_{k0} \cdot x_j^2 \cdot F_2(z) - f'_{k0} \cdot x_j F_4(z) + \left\{n_k \cdot x_j^2 \cdot F_2(z) + \frac{Dn_k}{Dz_k} \cdot x_j \cdot F_3(z)\right\},$$

unde am notat

$$F_1(z) = e^{-\nu_j x_j z}\left[\cos x_j^* z + \frac{\nu_j x_j}{x_j^*}\cdot \sin x_j^* z\right],$$

$$F_2(z) = e^{-\nu_j x_j z}\cdot\left[-\cos x_j^* z + \frac{\nu_j x_j}{x_j^*}\cdot \sin x_j^* z\right],$$

$$F_3(z) = -e^{-\nu_j x_j z}\cdot\frac{x_j}{x_j^*}\cdot \sin x_j^* z, \tag{15}$$

$$F_4(z) = e^{-\nu_j x_j z}\cdot\left[2\nu_j\cdot\cos x_j^* z + (1-2\nu_j^2)\cdot\frac{x_j}{x_j^*}\cdot \sin x_j^* z\right],$$

$$F_5(z) = e^{-\nu_j x_j z}\left[-2\nu_j\cdot\cos x_j^* z + (1-2\nu_j^2)\cdot\frac{x_j}{x_j^*}\cdot \sin_j^* z\right],$$

cu observația că

$$\begin{aligned} F_5'(z) &= x_j\cdot F_1(z),\\ F_1'(z) &= x_j\cdot F_3(z),\\ F_3'(z) &= x_j\cdot F_2(z),\\ F_2'(z) &= x_j\cdot F_4(z). \end{aligned} \tag{16}$$

Pentru organizarea calculului numeric, notăm cu V_{k0} și V_{kf} două matrice-coloană care conțin ca elemente valorile $f(z), f'(z), f''(z)$ la începutul $(z=0)$, respectiv sfîrșitul $(z=Dz_k)$ intervalului considerat, sub forma

$$V_{k0} = \begin{bmatrix} f_{k0}\\ f'_{k0}\\ f''_{k0}\\ 1\end{bmatrix}; \qquad V_{kf} = \begin{bmatrix} f_{kf}\\ f'_{kf}\\ f''_{kf}\\ 1\end{bmatrix}.$$

Conform (14′) avem

$$V_{kf} = T_k\cdot V_{k0}, \tag{17}$$

unde

$$T_k = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline F_1(Dz_k) & -\dfrac{F_3(Dz_k)}{x_j} & 0 & \eta_{ij}\cdot\left\{n_k\cdot[F_1(Dz_k)-1]+\dfrac{Dn_k}{Dz_k}\cdot\right.\\ & & & \left.\cdot\left[\dfrac{F_5(Dz_k)}{x_j}-Dz_k+\dfrac{2\nu_j}{x_j}\right]\right\}\\ \hline x_j F_3(Dz_k) & -F_2(Dz_k) & 0 & \eta_{ij}\cdot\left\{n_k\cdot x_j\cdot F_3(Dz_k)+\dfrac{Dn_k}{Dz_k}\cdot[F_1(Dz)-1]\right\}\\ \hline x_j^2\cdot F_2(Dz_k) & -x_j\cdot F_4(Dz_k) & 0 & \eta_{ij}\cdot\left\{n_k\cdot x_j^2\cdot F_2(Dz_k)+\dfrac{Dn_k}{Dz_k}\cdot x_j\cdot F_3(Dz_k)\right\}\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline\end{array} \tag{18}$$

În acest mod, valorile funcției $f(z)$ și derivatelor sale la sfîrșitul intervalului k (care vor fi utilizate în continuare ca valori inițiale pentru intervalul $k+1$) se obțin pornind de la valorile funcției $f(z)$ și derivatelor sale la începutul intervalului respectiv (acestea fiind obținute ca valori finale pe intervalul $k-1$), folosind (17).

Trecerea de la $f(z)$ și derivatele sale la $u_{ij}(t)$ și derivatele sale, trebuie să se facă, ținînd seama de (11), cu

$$u_{ij}(t) = \frac{a_{0max}}{\omega_j^2} \cdot f(z),$$

$$u'_{ij}(t) = \frac{a_{0max}}{\omega_j} \cdot \frac{f'(z)}{x_j}, \tag{11'}$$

$$u''_{ij}(t) = a_{0max} \cdot \frac{f''(z)}{x_j^2},$$

iar accelerația absolută pe direcția gradului de libertate i în modul de vibrație j va fi $\eta_{ij} \cdot u''_{0i}(t) + u''_{ij}(t)$.

În sfîrșit, elementele vibrației totale pe direcția gradului de libertate i se obțin cu (4'), iar accelerația absolută totală va fi $u''_{0i}(t) + \sum_{j=1}^{n} u''_{ij}(t)$.

BIBLIOGRAFIE

1. R. W. CLOUGH, *Earthquake response of structures* în Earthquake engineering (editor R. L. Wiegel), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, ew Jersey, 1966.
2. B. DEMIDOVICI, I. MARON, *Elements de calcul numerique*, Editions Mir, Moscou, 1973.
3. A. T. DERECHO, M. FINTEL, *Earthquake — resistant structures* în Handbook of concrete engineering (editor M. Fintel), Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1974.
4. AL. GHEORGHIU, *Concepții moderne în calculul structurilor*, Edit. tehnică, București, 1975.
5. Z. GHEORGHIU, *Asupra calculului static al barei drepte*, St. cerc. mec. apl., **35**, *3* (1976).
6. W. C. HURTY, M. F. RUBINSTEIN, *Dinamics of structures*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964
7. M. IFRIM, *Analiza dinamică a structurilor și inginerie seismică*, Edit. didactică și pedagogică, București.
8. CH. MASSONET, G. DEPREZ, ș.a., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Edit. tehnică, București, 1974.
9. P. MAZILU, H. SANDI, *Dinamica Construcțiilor* în Manual pentru calculul construcțiilor (coordonator A. D. Caracostea), Editura Tehnică, București, 1977.
10. J. H. WILKINSON, *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.

ASPECTE PRIVIND CALCULUL EFORTURILOR ŞI DEPLASĂRILOR ARBORILOR

de MAGDALENA POSEA
Institutul de construcţii Bucureşti

Lucrarea prezintă anumite procedee matriceale pentru calculul eforturilor şi deplasărilor arborilor drepţi pentru trasmisii mecanice. Procedeele dezvoltate ţin seama de influenţa deformării produse de forţele tăietoare care, în multe situaţii, nu trebuie neglijată la arbori. Forma matriceală adoptată şi sintetiza realizată, atît prin matricele de transmitere, cît şi prin matricele de rigiditate ale tronsoanelor, au condus la algoritme uşor de transpus în programe pentru calculatoare electronice.
În plus, pe baza algoritmelor elaborate se vor dezvolta într-o lucrare ulterioară, anumite procedee pentru calculul vibraţiilor flexionale la arbori.

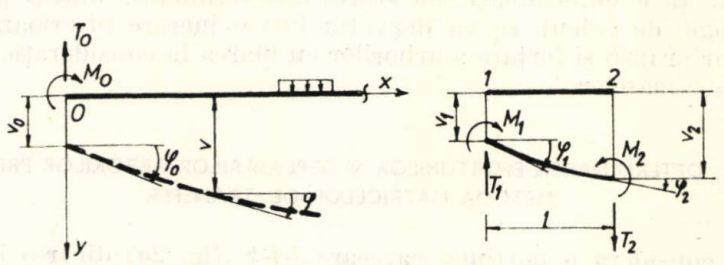
1. CONSIDERAŢII GENERALE

În cele mai multe cazuri metodele pentru calculul deformărilor barelor încovoiate ţin seama de influenţa momentelor încovoietoare şi ele pornesc de la ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate de ordinul II, $EI\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} = -M$, sau de ordinul IV, $EI\dfrac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}x^4} = q$.

Integrala ecuaţiei de ordinul IV, pentru bare cu secţiune constantă, se scrie în funcţie de parametrii în origine v_0, φ_0, M_0, T_0 a căror semnificaţie rezultă din figura 1*a* şi are forma [4], [6];

$$v = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2EI} - \frac{T_0 x^3}{6EI} + \bar{v}, \tag{1.1}$$

în care $\bar{v}$ reprezintă soluţia particulară.



a) b)

Fig. 1

Pentru un tronson 1—2 (fig. 1*b*) fără sarcini în interval, aplicînd expresia (1.1) și grupînd parametrii din 1 și 2 în matricele coloane :

$$\underset{\sim}{Q}_1 = [v_1\ \varphi_1\ M_1\ T_1]^t;\ \underset{\sim}{Q}_2 = [v_2\ \varphi_2\ M_2\ T_2]^t, \tag{1.2}$$

se obține expresia matriceală :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ M_2 \\ T_2 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{Q}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2EI} & -\frac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI} & -\frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ M_1 \\ T_1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{Q}_1}, \tag{1.3}$$

în care $\underset{\sim}{A}$ poartă denumirea de matrice de tronson.

Scrierea succesivă a relației (1.3) pentru toate tronsoanele unei bare și introducerea atît a sarcinilor de la noduri considerate a fi punctele de legătură dintre tronsoane, cît și a condițiilor la limită, permite obținerea mărimilor v, φ, M, T în toate secțiunile de la capetele tronsoanelor [2], [7]. Evident, aplicarea relației (1.1) la fiecare dintre tronsoane permite determinarea deplasărilor în orice secțiune a tronsonului respectiv.

Ținînd seama că forma matriceală de mai sus este aplicabilă practic prin folosirea mașinilor de calcul, metodele analitice clasice pentru calculul deplasărilor arborilor folosesc, de regulă, metoda grinzii conjugate, sub formă analitică sau grafică [1], [3]. Rezolvarea se face în două etape distincte și anume se determină mai întîi eforturile și apoi deplasările.

Datorită condițiilor constructive și funcționale, arborii au în multe cazuri rapoarte d/l (între diametru și lungime) cu valori relativ mari, ceea ce necesită luarea în considerare a influenței forței tăietoare.

În acest scop, se dezvoltă în lucrarea de față două procedee de calcul, unul bazat pe matricea de transmitere și altul pe baza matricei de rigiditate, pentru calculul eforturilor și deplasărilor arborilor cu secțiune variabilă, static determinați sau static nedeterminați. Bazați pe aceeași metodologie de calcul, se va dezvolta într-o lucrare ulterioară, studiul vibrațiilor proprii și forțate a arborilor cu luarea în considerație a inerției de rotație a maselor.

2. DETERMINAREA EFORTURILOR ȘI DEPLASĂRILOR ARBORILOR PRIN METODA MATRICELOR DE TRANSFER

Se consideră o porțiune oarecare *i-j-k* (fig. 2*a*) dintr-o bară și se izolează tronsonul *i-j* (fig. 2*b*) la capetele căruia se introduc, cu semnele pozitive, parametrii v_i, φ_i, M_i, T_i, aranjați în vectorul coloană

$$\underset{\sim}{Z}_{ij} = [v_i\ \varphi_i\ M_i\ T_i\ 1]^t, \tag{2.1}$$

unde indicele superior t marchează operaţia de transpunere. S-a adăugat o linie în plus, notată cu 1, pentru ca acţiunile exterioare de la noduri să fie strînse, după cum se va vedea ulterior, într-o coloană separată.

Pentru a preciza vectorul coloană la capătul j-i al tronsonului

$$Z_{ji} = [v_j \; \varphi_j \; M_j \; T_j \; 1]', \tag{2.1'}$$

în situaţia cînd între i şi j nu există forţe exterioare, trebuie stabilită ecuaţia fibrei medii a tronsonului respectiv. Dacă se ţine seama numai de

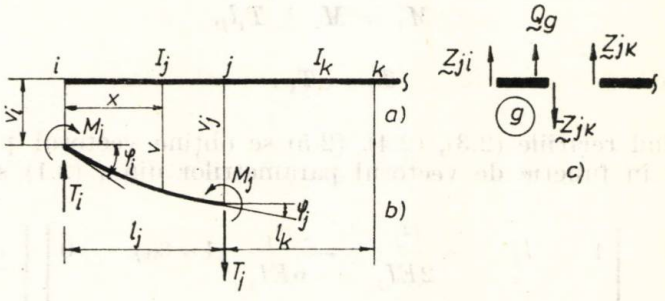


Fig. 2

deformarea produsă de momentele încovoietoare, expresia fibrei medii, dedusă din (1.1), este

$$v^M = v_i + \varphi_i x - \frac{M_i x^2}{2EI_j} - \frac{T_i x^3}{6EI_j}. \tag{2.2}$$

Lungimea elementului $i-j$, (l_j) se notează numai cu indicele capătului din dreapta. La fel se procedează cu momentul de inerţie I_j.

Pentru a lua în considerare deformarea din forţele tăietoare, pornind de la relaţia cunoscută [1], [6]:

$$\frac{dv^T}{dx} = \frac{T_i}{GA'}, \tag{a}$$

unde A' este o arie convenţională ($A' = \frac{5}{6}A$ la dreptunghi, $A' = \frac{9}{10}A$ la cerc), se determină expresia săgeţii produsă de forţele tăietoare:

$$v^T = \frac{T_i x}{GA'_j} + C. \tag{b}$$

Întrucît săgeata în i, v_i s-a ales ca parametru, $v^T = 0$ pentru $x = 0$ şi din (b) se obţine $C = 0$. Săgeata totală fiind $v = v^M + v^T$, din (2.2) şi (b) rezultă

$$v = v_i + \varphi_i x - \frac{M_i x^2}{2EI_j} - \frac{T_i x^3}{6EI_j}\left(1 - 6\frac{EI_j}{GA'_j}\cdot\frac{1}{x^2}\right). \tag{2.3}$$

Deoarece rotirea dată de forţa tăietoare, formula (a) reprezintă numai o rotire a axei barei şi nu şi a secţiunii transversale [1], [6], expresia rotirilor pe intervalul $i-j$ (fig. 2 *b*) se consideră numai cea dată de momentele încovoietoare :

$$\varphi = \varphi_i - \frac{M_i x}{EI_j} - \frac{T_i x^2}{2EI_j}. \tag{2.4}$$

Din ecuaţiile de echilibru ale elementului $i-j$ (fig. 2 *b*) se obţin relaţiile :

$$M_j = M_i + T_i l_j, \tag{2.5}$$

$$T_j = T_i .$$

Folosind relaţiile (2.3), (2.4), (2.5) se obţine vectorul parametrilor din j (2.1′) în funcţie de vectorul parametrilor din i (2.1) sub forma :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_j \\ \varphi_j \\ M_j \\ T_j \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{Z}_{ji}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & l_j & -\frac{l^2_j}{2EI_j} & -\frac{l^3_j}{6EI_j} \text{ (1—6a)} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l_j}{EI_j} & -\frac{l^2_j}{2EI_j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{A}_{ij}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{Z}_{ij}} \tag{2.6}$$

în care s-a notat

$$a = \frac{EI_j}{G A'_j l^2_j}. \tag{2.7}$$

Matricea A_{ij} din (2.6) reprezintă matricea de tansmitere pe tronsonul $i-j$, stabilită prin luarea în consideraţie atît a deformaţiilor produse de momentele încovoietoare, cît şi a celor produse de forţele tăietoare. Prin intermediul ei forma matriceală condensată a relaţiei (2.6) este

$$\underset{\sim}{Z}_{ji} = \underset{\sim}{A}_{ij}\, \underset{\sim}{Z}_{ij}. \tag{2.8}$$

În nodul j se consideră vectorul coloană

$$\underset{\sim}{Q}_j = [\Delta v \; \Delta\varphi \; \Delta \mathfrak{M} \; \Delta t 1]^t, \tag{2.9}$$

şi matricea de nod 5×5 :

$$B_j = [\underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{Q}_j], \tag{2.10}$$

care face posibilă exprimarea vectorului $\underset{\sim}{Q}_j$ în funcție de vectorul $\underset{\sim}{Z}_{ij}$ (2.1) prin relația

$$\underset{\sim}{Q}_j = \underset{\sim}{B}_j \underset{\sim}{Z}_{ij}. \tag{2.11}$$

Din izolarea nodului j (fig. 2c), pe baza relațiilor de continuitate și a ecuațiilor de echilibru, este evidentă relația

$$\underset{\sim}{Z}_{jK} = \underset{\sim}{Z}_{ji} + \underset{\sim}{Q}_j,$$

care, ținînd séama de (2.8) și (2.11), devine

$$\underset{\sim}{Z}_{jK} = (\underset{\sim}{A}_{ij} + \underset{\sim}{B}_j)\, \underset{\sim}{Z}_{ij} = \underset{\sim}{C}_j \cdot \underset{\sim}{Z}_{ij}. \tag{2.12}$$

Matricea (5 × 5)

$$\underset{\sim}{C}_j = \underset{\sim}{A}_{ij} + \underset{\sim}{B}_j \tag{2.13}$$

reprezintă matricea de transmitere de la capătul din stînga al tronsonului $i-j$ la capătul din stînga al tronsonului următor $j-k$. Se observă că matricele $\underset{\sim}{A}_{ij}$ (2.6) și $\underset{\sim}{B}_j$ (2.10) au fost aranjate astfel încît adunarea să fie posibilă, iar în matricea $\underset{\sim}{C}$ valorile de la noduri să intervină numai în ultima coloană. Dealtfel, dacă pe intervalul $i-j$ ar fi anumite încărcări, termenii corespunzători ar interveni în matricea $\underset{\sim}{A}$ numai în coloana a 5-a și s-ar stabili pe baza soluției particulare din (1.1).

În scopul precizării algoritmului general pentru calculul eforturilor și deplasărilor prin utilizarea matricelor de transmitere, se consideră arborele static nedeterminat, cu variația în trepte a secțiunilor transversale,

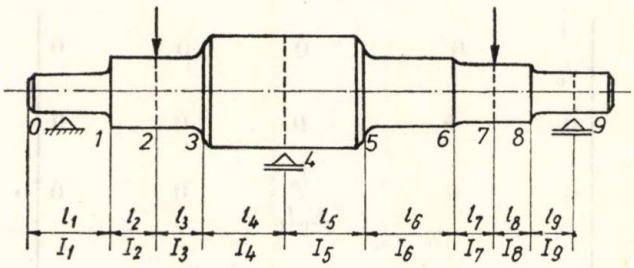


Fig. 3

din figura 3. Se admit ca noduri atît secțiunile în care se schimbă diametrul, cît și cele în care se aplică sarcini exterioare și se pornește de la vectorul parametrilor în origine

$$\underset{\sim}{Z}_0 = [v_0\ \varphi_0\ M_0\ T_0\ 1]^t$$

și aplicînd succesiv expresia (2.12) se obțin relațiile:

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{Z}_{1.2} = \underset{\sim}{C}_1 \underset{\sim}{Z}_0, \\
&\underset{\sim}{Z}_{2.3} = \underset{\sim}{C}_2 \underset{\sim}{Z}_{12} = \underset{\sim}{C}_2 \underset{\sim}{C}_1 \underset{\sim}{Z}_0, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\underset{\sim}{Z}_{8.9} = \underset{\sim}{C}_8 \underset{\sim}{Z}_{7.8} = \underset{\sim}{C}_8 \underset{\sim}{C}_7 \cdots \underset{\sim}{C}_1 \underset{\sim}{Z}_0, \\
&\underset{\sim}{Z}_9 = \underset{\sim}{A}_{8.9} \underset{\sim}{Z}_{8.9} = (\underset{\sim}{A}_{8.9} \underset{\sim}{C}_8 \underset{\sim}{C}_7 \cdots \underset{\sim}{C}_1) \underset{\sim}{Z}_0 .
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Pentru ultima relație din (2.14) s-a aplicat (2.8), iar pentru calculul matricelor $\underset{\sim}{C}$ se folosește (2.13).

Dacă toate matricele $\underset{\sim}{B}$ corespunzătoare nodurilor intermediare sînt cunoscute, ceea ce presupune rezemarea arborelui numai la capete, ultima relație din (2.14) exprimă legătura dintre vectorul $\underset{\sim}{Z}_0$ și $\underset{\sim}{Z}_n$, unde prin n s-a notat ultimul reazem din dreapta. Întrucît fiecare reazem presupune două condiții limită cunoscute înseamnă că cele două componente necunoscute ale lui $\underset{\sim}{Z}_0$ se determină din ecuațiile corespunzătoare componentelor cunoscute ale vectorului $\underset{\sim}{Z}_n$. După precizarea componentelor vectorului Z_0, succesiunea operațiilor (2.14) dă posibilitatea obținerii deplasărilor și eforturilor în toate secțiunile de capăt ale tronsoanelor. Pentru secțiunile curente de pe fiecare tronson se aplică relațiile (2.3), (2.4), (2.5), în funcție de mărimea ce se calculează.

Dacă există și rezemări intermediare, cum este cazul arborelui din figura 3, unde nodul 4 este un reazem simplu, ceea ce presupune $v_4 = 0$ și o reacțiune R_4 necunoscută, atunci în afara condițiilor de la capete se introduc și condițiile de rezemare intermediare și se obține un sistem de ecuații din care se determină parametrii necunoscuți, inclusiv componentele lui $\underset{\sim}{Z}_0$. După obținerea acestora se aplică relațiile (2.14) și se determină eforturile și deplasările reale pentru toate secțiunile.

Pentru calculele numerice, în scopul unificării din punct de vedere dimensional a tuturor componentelor matricelor $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$, se introduce matricea

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_0}{E_0 I_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l_0^2}{E_0 I_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

în care l_0, E_0, I_0 sînt mărimi arbitrare sau elementele corespunzătoare unui tronson oarecare al barei. Definind, în continuare, mărimile adimensionale

$$\bar{v} = \frac{v}{l_0}; \bar{\varphi} = \varphi; \bar{M} = M \frac{l_0}{E_0 I_0}; \quad T = \bar{T} \frac{l_0^2}{E_0 I_0}, \tag{2.16}$$

ceea ce conduce la relația matriceală

$$\underset{\sim}{\bar{Z}} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{Z} \text{ sau } \underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{L}^{-1}\,\underset{\sim}{\bar{Z}}, \tag{2.17}$$

expresia (2.8) devine

$$\bar{\underset{\sim}{Z}}_{ji} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{A}_{ij}\,\underset{\sim}{L}^{-1}\bar{\underset{\sim}{Z}}_{ij} = \bar{\underset{\sim}{A}}_{ij}\bar{\underset{\sim}{Z}}_{ij}\,. \tag{2.18}$$

Folosind relațiile

$$\frac{l_j}{l_0} = b_j\,; \quad \frac{E_0 I_0}{E_j I_j} = c\,, \tag{2.19}$$

expresia dezvoltată a matricei $\bar{\underset{\sim}{A}}_{ij}$ este

$$\bar{\underset{\sim}{A}}_{ij} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{A}_{ij}\,\underset{\sim}{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b_j & -\frac{1}{2}b_j^2 c_j & -\frac{1}{6}b_j^3 c_j(1-6a_j) & 0 \\ 0 & 1 & -b_j c_j & -\frac{1}{2}b_j^2 c_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Matricea $\underset{\sim}{B}_j$ avînd numai coloana a 5-a cu termeni diferiți de zero, prin transformarea aplicată matricei A, rămîne neschimbată :

$$\bar{\underset{\sim}{B}}_j = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{B}_j\,\underset{\sim}{L}^{-1} = \underset{\sim}{B}_j, \tag{2.21}$$

ceea ce se verifică cu ușurință.
Cu ajutorul matricelor (2.20) și (2.21) se calculează matricele

$$\bar{\underset{\sim}{C}}_j = \bar{\underset{\sim}{A}}_{ij} + \bar{\underset{\sim}{B}}_j \; (j = 1, 2 \ldots, n) \tag{2.22}$$

și procesul de recurență păstrează forma (2.14) :

$$\bar{\underset{\sim}{Z}}_{12} = \bar{\underset{\sim}{C}}_1\,\bar{\underset{\sim}{Z}}_0\,; \ldots \bar{\underset{\sim}{Z}}_{n-1.\,n} = (\bar{\underset{\sim}{C}}_{n-1} \cdot \ldots \bar{\underset{\sim}{C}}_1)\,\bar{\underset{\sim}{Z}}_0\,; \; \bar{\underset{\sim}{Z}}_n = \bar{\underset{\sim}{A}}_{n-1}\,\bar{\underset{\sim}{C}}_{n-1.n}, \ldots \bar{\underset{\sim}{C}}_1)\bar{\underset{\sim}{Z}}_0\,. \tag{2.23}$$

Se introduc condițiile la limită, corespunzătoare vectorilor $\bar{\underset{\sim}{Z}}_0$, $\bar{\underset{\sim}{Z}}_n$ sau oricăror vectori intermediari și se obține un sistem algebric cu tot atîtea necunoscute. Din rezolvarea acestui sistem rezultă parametrii necunoscuți ai vectorului $\bar{\underset{\sim}{Z}}_0$ și apoi a tuturor vectorilor intermediari cu relațiile (2.23). Valorile reale din punct de vedere dimensional ale parametrilor se determină prin folosirea relației (2.17).

3. UN PROCEDEU MATRICEAL PENTRU CALCULUL EFORTURILOR ŞI DEPLASĂRILOR ARBORILOR BAZAT PE MATRICEA DE RIGIDITATE

În metoda matricelor de transfer, dezvoltată anterior, necunoscutele sînt atît forţe (forţe şi cupluri), cît şi deplasări (translaţii şi rotiri). În multe situaţii, mai ales în cazul structurilor static nedeterminate, este mai avantajos să se aleagă ca parametrii independenţi deplasările (tran-

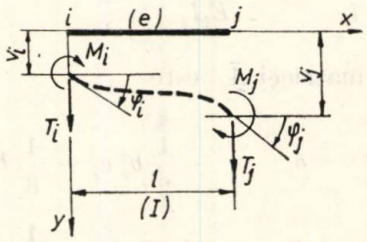


Fig. 4

slaţii şi rotiri), să se alcătuiască un sistem de ecuaţii pentru determinarea acestora şi apoi să se calculeze eforturile pornind de la deplasări [6], [4], [5]. Dependenţa dintre eforturile de la capetele unei bare (fig. 4) asamblate într-un vector coloană

$$\underset{\sim}{Q}^e = [M_i T_i \; M_j T_j)]^t \tag{3.1}$$

şi deplasările capetelor, asamblate, de asemenea, într-un vector coloană

$$\underset{\sim}{\Delta}^e = [v_i \varphi_i \; v_j \varphi_j]^t, \tag{3.2}$$

se realizează sub forma

$$\underset{\sim}{Q}^e = \underset{\sim}{K}^e \underset{\sim}{\Delta}^e, \tag{3.3}$$

în care matricea $K^e(4 \times 4)$ reprezintă matricea de rigiditate a elementului e.

Matricea $\underset{\sim}{K}^e$ pentru o bară dreaptă cînd se ţine seama numai de deplasarea dată de matricele încovoietoare, are forma

$$\underset{\sim}{K}^M = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ 6 & 3 & -6 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

şi este cunoscută din lucrările [2], [4], [5].

3.1. MATRICEA DE RIGIDITATEA UNEI BARE ŢINÎND SEAMA DE DEPLASAREA PRODUSĂ DE FORŢELE TĂIETOARE

Se consideră elementul din figura 4 cu valorile pozitive ale parametrilor consideraţi: momentele şi rotirile de la ambele capete sînt pozitive cînd rotesc în sens orar, iar săgeţile şi forţele cînd sînt dirijate în

sensul axei y. În această situaţie, particularizînd în mod corespunzător expresiile (2.3), (2.4), şi (2.5), se obţin relaţiile :

$$\begin{aligned} v_j &= v_i + \varphi_i l - \frac{M_i l^2}{2EI} + \frac{T_i l^3}{6EI}(1-a), \\ \varphi_j &= \varphi_i - \frac{M_i l}{EI} + \frac{T_i l^2}{2EI}, \\ M_j &= -M_i + T_i \cdot l, \\ T_j &= -T_i, \end{aligned} \tag{3.5}$$

în care mărimea a este precizată de formula (2.7).
Din rezolvarea primelor două ecuaţii în raport cu M_i, T_i rezultă expresiile

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{2EI}{l^3(1-12a)}[3l\,v_i + 2l^2(1+3a)\varphi_i - 3l\,v_j + l^2(1-6a)\varphi_j], \\ T_i &= \frac{2EI}{l^3(1+12a)}(6v_i + 3l\,\varphi_i - 6v_j + 3l\varphi_j). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Introducînd aceste expresii în ultimele două relaţii din (3.5) se obţine

$$\begin{aligned} M_j &= \frac{2EI}{l^3(1+12a)}[3l\,v_i + l^2(1-6a)\,\varphi_i - 3l\,v_j + 2l^2(1+3a)\varphi_j\,], \\ T_j &= \frac{2EI}{l^3(1+12a)}[-6\,v_i - 3l\,\varphi_i + 6v_j - 3l\,\varphi_j\,]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Asamblînd expresiile (3.6), (3.7) în forma matriceală (3.3), se obţine matricea de rigiditate a barei cu luarea în consideraţie a deformărilor produse de forţele tăietoare :

$$\underset{\sim}{K} = \frac{2EI}{l^3(1+12a)} \begin{bmatrix} 3l & 2l^2(1+3a) & -3l & l^2(1-6a) \\ 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & l^2(1-6a) & -3l & 2l^2(1+3a) \\ -6 & -3l & 6 & -3l \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Dacă în (3.8) se face $a = 0$, se obţine matricea (3.4) corespunzătoare numai deformaţiilor produse de momentele încovoietoare.
Matricea (3.8) este obţinută în lucrarea [8] printr-un procedeu energetic mult mai laborios.

3.2. STABILIREA SISTEMULUI DE ECUAȚII PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR

Folosind componentele

$$\underset{\sim}{Q}_i^e = [M_i \; T_i]^t \; ; \quad \underset{\sim}{Q}_j^e = [M_j \; T_j]^t \tag{3.9}$$

și

$$\underset{\sim}{\Delta}_i^e = [v_i \varphi_i]^t \; ; \quad \underset{\sim}{\Delta}_j^e = [v_j \; \varphi_j]^t , \tag{3.10}$$

vectorii (3.1), (3.2) devin :

$$\underset{\sim}{Q}^e = [\underset{\sim}{Q}_i^e \; \underset{\sim}{Q}_j^e]^t \; ; \quad \underset{\sim}{\Delta}^e = [\underset{\sim}{\Delta}_i^e \; \underset{\sim}{\Delta}_j^e]^t . \tag{3.11}$$

Partiționînd conform acestor componente relația (3.3), se obține forma :

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{Q}_i^e \\ \underset{\sim}{Q}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}_{ii}^e & \underset{\sim}{k}_{ij}^e \\ \underset{\sim}{k}_{ji}^e & \underset{\sim}{k}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Delta}_i^e \\ \underset{\sim}{\Delta}_j^e \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

în care termeni $\underset{\sim}{k}_{ii}^e$, k_{ij}^e sînt matrice 2×2 care se determină pentru fiecare element din (3.8).

Din (3.12) rezultă expresia componentelor eforturilor de la fiecare capăt de bară în funcție de deplasările capetelor :

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{Q}_i^e &= \underset{\sim}{k}_{ii}^e \, \underset{\sim}{\Delta}_i^e + \underset{\sim}{k}_{ij}^e \, \underset{\sim}{\Delta}_j^e , \\ \underset{\sim}{Q}_j^e &= \underset{\sim}{k}_{ji}^e \, \underset{\sim}{\Delta}_i^e + k_{jj}^e \, \underset{\sim}{\Delta}_j^e . \end{aligned} \tag{3.13}$$

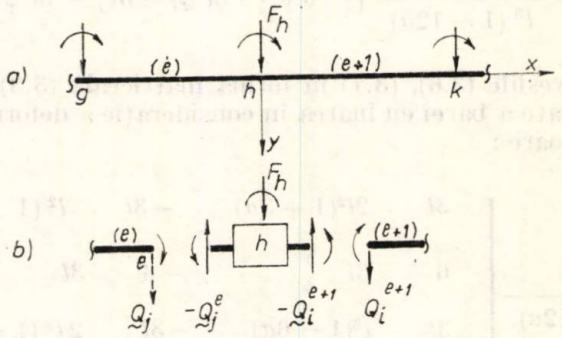


Fig. 5

Se consideră porțiunea de arbore $g - h - k$ (fig. 5 *a*) și se izolează nodul h (fig. 5*b*). Evident, vectorii eforturilor de la capetele barelor adiacente vor fi $-\underset{\sim}{Q}_j^e$ și $\underset{\sim}{Q}_i^{e+1}$ (j este capătul din dreapta al elementului e și i capătul din stînga al elementului $e + 1$).

Se notează

$$\underset{\sim}{F}_h = [\mathfrak{M}_h \; \mathfrak{F}_h]^t \tag{3.14}$$

vectorul forţelor exterioare din nodul h. Componenta moment $\mathfrak{M}_h$ este pozitivă cînd roteşte orar, iar forţa $\mathfrak{F}_h$ cînd are sensul axei Y.

Din echilibrul nodului h (fig. 5*b*) se obţine relaţia matriceală

$$\underset{\sim}{Q}_j^e - \underset{\sim}{Q}_i^{e+1} + \underset{\sim}{F}_h = 0\,,$$

care, ţinînd seama de (3.13) şi de faptul că în general pot exista mai multe bare în nodul h şi că deplasările Δ_h, Δ_g sînt aceleaşi pentru toate barele din nodul respectiv, devine :

$$\left(\sum_e \underset{\sim}{k}^e_{hh}\right) \Delta_h + \sum_e \underset{\sim}{k}^e_{hg}\, \Delta_g = \underset{\sim}{F}_h. \tag{3.15}$$

Dacă se scrie ecuaţia (3.15) pentru toate nodurile h ale structurii, se obţine sistemul de ecuaţii

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{11} & \underset{\sim}{k}_{12} \cdots \underset{\sim}{k}_{1h} \cdots \underset{\sim}{k}_{1n} \\ \underset{\sim}{k}_{21} & \underset{\sim}{K}_{22} \cdots \underset{\sim}{k}_{2h} \cdots \underset{\sim}{k}_{2n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \underset{\sim}{k}_{i1} & \underset{\sim}{k}_{i2} \cdots \underset{\sim}{K}_{hh} \cdots \underset{\sim}{k}_{in} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \underset{\sim}{k}_{n1} & \underset{\sim}{k}_{n2} \cdots \underset{\sim}{k}_{nh} \cdots \underset{\sim}{K}_{nn} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{K}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Delta}_1 \\ \underset{\sim}{\Delta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{\Delta}_h \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{\Delta}_n \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\Delta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{F}_1 \\ \underset{\sim}{F}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{F}_h \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{F}_n \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{F}}, \tag{3.16}$$

din rezolvarea căruia rezultă valorile deplasărilor.

Termenul

$$\underset{\sim}{K}_{hh} = \sum_e \underset{\sim}{k}_{hh} \tag{3.17}$$

însumează matricele de rigiditate pentru toate capetele de bare din nodul respectiv. La această însumare trebuie să se ţină seama dacă capătul este din stînga (i) sau din dreapta (j).

Forma condensată a sistemului (3.16) este

$$\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{F}, \tag{3.18}$$

în care : K reprezintă matricea de rigiditate a întregii structuri şi are dimensiunea $2n \times 2n$; $\underset{\sim}{\Delta}$ este vectorul deplasărilor ($2n \times 1$) şi $\underset{\sim}{F}$ vectorul forţelor exterioare ($2n \times 1$).

Pentru arborele din figura 6, sistemul (3.18) are optsprezece ecuații și se prezintă sub forma :

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}^1_{ii} & \underset{\sim}{k}^1_{ij} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \underset{\sim}{k}^1_{ji} & (\underset{\sim}{k}^1_{jj}+\underset{\sim}{k}^2_{ii}) & \underset{\sim}{k}^2_{ij} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{k}^2_{ji} & (\underset{\sim}{k}^2_{jj}+\underset{\sim}{k}^3_{ii}) & \underset{\sim}{k}^3_{ij} & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \underset{\sim}{k}^7_{ji} & (\underset{\sim}{k}^7_{jj}+\underset{\sim}{k}^8_{ij}) & \underset{\sim}{k}^8_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \underset{\sim}{k}^8_{ji} & \underset{\sim}{k}^8_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Delta}_1 \\ \underset{\sim}{\Delta}_2 \\ \underset{\sim}{\Delta}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{\Delta}_8 \\ \underset{\sim}{\Delta}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F}_1 \\ \underset{\sim}{F}_2 \\ \underset{\sim}{F}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{F}_8 \\ \underset{\sim}{F}_9 \end{bmatrix} . \tag{3.19}$$

Matricele $\underset{\sim}{k}_{ii}$, $\underset{\sim}{k}_{ij}$, $\underset{\sim}{k}_{ji}$, $\underset{\sim}{k}_{jj}$ se stabilesc cu ușurință din (3.8) pe baza partiționării indicată de (3.12).

Se observă că sistemul (3.19) este de tip bandă, iar coeficienții matricei $\underset{\sim}{K}$ au expresii simple dependente de submatricele elementelor adiacente fiecărui nod. Aceste caracteristici conferă procedeului avantaje deosebite pentru transpunerea lui într-un program pentru orice calculator electronic, a cărui aplicare să fie dintre cele mai ușoare.

Se remarcă faptul că vectorul termenilor liberi are necunoscute componentele corespunzătoare legăturilor. Aceasta înseamnă că la rezolvarea sistemului (3.19) se elimină ecuațiile corespunzătoare deplasărilor

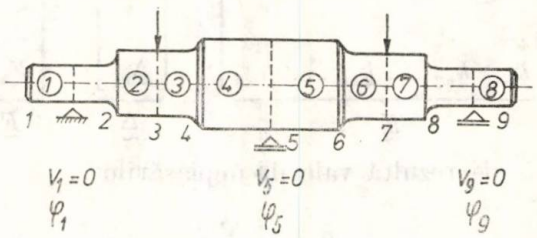


Fig. 6

nule, care pentru exemplul luat au fost notate direct pe figura 6. Ecuațiile respective se folosesc după determinarea deplasărilor la determinarea reacțiunilor.

După aflarea deplasărilor cu relațiile (3.13) se determină eforturile pe fiecare element.

3.3. SISTEMATIZĂRI PENTRU CALCULUL NUMERIC

Dacă se folosesc notațiile (2.16), vectorii (3.1) și (3.2) se scriu sub forma

$$\underset{\sim}{Q}^e = \underset{\sim}{L}_1\bar{\underset{\sim}{Q}}^e ; \underset{\sim}{\Delta}^e = \underset{\sim}{L}_2\bar{\underset{\sim}{\Delta}}^e , \tag{3.20}$$

unde

$$\underset{\sim}{L}_1 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{L}_0 & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{L}_0 \end{bmatrix} \quad ; \qquad \underset{\sim}{L}_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{EI_0}{l_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{EI_0}{l_0^2} \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

$$\underset{\sim}{L}_2 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{L}_{20} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{L}_{20} \end{bmatrix}; \qquad \underset{\sim}{L}_{20} = \begin{bmatrix} l_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Introducînd mărimile adimensionale $\underset{\sim}{\bar{Q}}^e$, $\underset{\sim}{\bar{\Delta}}^e$, relaţia (3.3) devine

$$\underset{\sim}{\bar{Q}}^e = \underset{\sim}{L}_1^{-1} \underset{\sim}{K}^e \underset{\sim}{L}_2 \underset{\sim}{\bar{\Delta}}^e = \underset{\sim}{\bar{k}}^e \underset{\sim}{\bar{\Delta}}^e \ , \tag{3.23}$$

din care cu notaţiile (2.19) pentru un element oarecare h, se obţine matricea de rigiditate adimensională $\underset{\sim}{\bar{k}}^h$

$$\underset{\sim}{\bar{k}}^h = \underset{\sim}{L}_1^{-1} \underset{\sim}{k}^h \underset{\sim}{L}_2 = \frac{2}{c_h(1+12a_h)} \times \tag{3.24}$$

$$\times \begin{bmatrix} 3/b_h^2 & 2(1+3a_h)/b_h & -3/b_h^2 & (1-6a_h)/b_h \\ 6/b_h^3 & 3/b_h^2 & -6/b_h^3 & 3/b_h^2 \\ 3/b_h^2 & (1-6a_h)/b_h & -3/b_h^2 & 2(1+3a_h)/b_h \\ -6/b_h^3 & -3/b_h^2 & 6/b_h^2 & -3/b_h^2 \end{bmatrix},$$

care înlocuieşte pe (3.8).

Scriind şi componentele termenilor liberi (3.17) sub formă adimensională

$$\underset{\sim}{F}_h = \underset{\sim}{L}_0 \underset{\sim}{\bar{F}}_h \ , \tag{3.25}$$

sistemul ecuaţiilor de condiţie (3.18) devine

$$\underset{\sim}{\bar{K}} \underset{\sim}{\bar{\Delta}} = \underset{\sim}{\bar{F}} \ . \tag{3.26}$$

În consecinţă, alcătuirea sistemului de ecuaţii şi rezolvarea lui păstrează caracteristicile menţionate anterior. Avantajul constă în faptul că toţi termenii au valori comparabile.

După obţinerea parametrilor $\underset{\sim}{\bar{\Delta}}$ se determină parametrii reali cu relaţiile (3.20) şi eforturile cu expresiile (3.13).

3.4. CALCULUL EFORTURILOR ŞI DEPLASĂRILOR CÎND EXISTĂ SARCINI ŞI PE ELEMENTE

Dacă între noduri există încărcări (forţe, cupluri), atunci relaţia (3.3) se completează cu eforturile de la capete produse de încărcările respective în situaţia deplasărilor capetelor i, j nule, adică în situaţia tronsonului încastrat la capete.

Se notează vectorul acestor eforturi în convenţia de semne din figura 4, cu $\underset{\sim}{Q}^{*e}$ şi se adună relaţiei (3.3) care devine :

$$\underset{\sim}{Q}^{e} = \underset{\sim}{Q}^{*e} + \underset{\sim}{K}^{e}\underset{\sim}{\Delta}^{e} . \tag{3.27}$$

Prin aceasta expresiile (3.13) care dau eforturile de la capetele tronsonului sînt :

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{Q}_i^e &= \underset{\sim}{Q}_i^{*e} + \underset{\sim}{K}_{ii}^e\underset{\sim}{\Delta}_i^e + \underset{\sim}{K}_{ij}^e\underset{\sim}{\Delta}_j^e , \\ \underset{\sim}{Q}_j^e &= \underset{\sim}{Q}_j^{*e} + \underset{\sim}{k}_{ji}^*\underset{\sim}{\Delta}_i^e + \underset{\sim}{k}_{jj}^e\underset{\sim}{\Delta}_j^e . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Sistemul de ecuaţii (3.18) păstrează aceeaşi formă, dar componentele termenului liber se vor calcula cu expresia

$$\underset{\sim}{F}_h = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_h \\ \mathfrak{F}_h \end{bmatrix} - \underset{\sim}{Q}_{hg}^{*e} - \underset{\sim}{Q}_{hk}^{*,e+1} , \tag{3.29}$$

care rezultă din echilibrul nodului h (fig. 5).
În rest, metodologia de calcul este cea descrisă anterior, inclusiv pentru cazul cînd termenii se introduc cu valori adimensionale (3.26).

Observaţie. Eforturile de încastrare perfectă pentru sarcini şi cupluri pot fi luate din [4] [6] pentru cazul cînd se neglijează efectul forţelor tăietoare şi se determină cu (2.6), după completarea acesteia cu soluţiile particulare, pentru situaţiile cînd trebuie luate în consideraţie deformaţiile din forţele tăietoare.

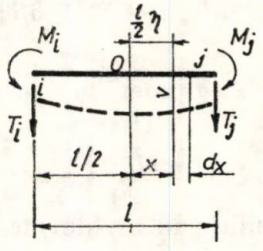


Fig. 7

3.5. MATRICEA DE RIDIGITATE PENTRU UN TRONSON CU SECŢIUNE VARIABILĂ

Se consideră tronsonul $i-j$ (fig. 7) avînd secţiunea variabilă şi se alege originea axei x în centrul lui. Alegînd variabila adimensională η, astfel încît $\frac{l}{2}\eta = x$, coordonatele capetelor tronsonului sînt :

$\eta = -1$, nodul i şi $\eta = 1$, nodul j.

Eforturile de la capete (M_i, T_i, M_j, T_j) se grupează în vectorul $\underset{\sim}{Q}$ (3.1), iar deplasările capetelor (v_i , φ_i, v_j , φ_j) în vectorul $\underset{\sim}{\Delta}$ (3.2).

Se alege funcţia v (fig. 7) a deplasării transversale de gradul trei, dependentă de patru constante :

$$v = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3 .$$

Notînd matriceal funcţia

$$\underset{\sim}{\xi} = [\,1 \;\; \eta \;\; \eta^2 \;\; \eta^3] \tag{3.30}$$

şi vectorul constantelor

$$\underset{\sim}{b} = [\,b_0 \; b_1 \; b_2 \; b_3]^t, \tag{3.31}$$

expresia săgeţii transversale devine

$$v = \underset{\sim}{\xi}\,\underset{\sim}{b}\,. \tag{3.32}$$

Folosind condiţiile la limită:

$$v = v_i \;;\; \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\eta} = \frac{l}{2}\,\varphi_i\,, \text{ la } \eta = -1,$$

$$v = v_j \;;\; \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\eta} = \frac{l}{2}\,\varphi_j, \text{ la } \eta = 1,$$

se obţine expredia v (3.32), dependentă de vectorul deplasărilor de la capete, sub forma

$$v = \underset{\sim}{\xi}\,\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\Delta}\,, \tag{3.33}$$

în care

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

În funcţie de v se determină momentul încovoietor

$$M = -EI\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = -EI\,\frac{4}{l^2}\,[0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 6\eta]\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{\Delta}\,,$$

care, notînd

$$\underset{\sim}{\alpha} = [2 \;\; 6\eta]\,; \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

devine

$$M = -\frac{EI}{l^2}\,\underset{\sim}{\alpha}\,\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\Delta} = -EI\cdot\frac{1}{\rho} \tag{3.36}$$

(Matricea $\underset{\sim}{B}$ este alcătuită din ultimele două linii ale matricei $\underset{\sim}{A}$).

Dacă se aplică principiul lucrului mecanic virtual în varianta deplasărilor virtuale ($L_{ex} = L_{ef}$), pentru bara din figura 7, se obține

$$\delta \underset{\sim}{\Delta}^t \underset{\sim}{Q} = \int_{-1}^{+1} \delta \frac{1}{\rho} M \frac{l}{2} \, d\eta. \tag{a}$$

Din (3.36) se identifică expresia

$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{l^2} \underset{\sim}{\alpha} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\Delta}$, care, întrucît $\frac{1}{\rho}$ este un scalar, face posibilă relația

$$\delta \left(\frac{1}{\rho} \right) = \delta \left(\frac{1}{\rho} \right)^t = \frac{1}{l^2} \delta \underset{\sim}{\Delta}^t \underset{\sim}{L}^t \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{\alpha}^t. \tag{b}$$

Deoarece lucrul mecanic al momentelor în deplasarea considerată este pozitiv, prin introducerea mărimilor (3.36) și (b) în (a), se obține

$$\delta \underset{\sim}{\Delta}^t \underset{\sim}{Q} = \delta \underset{\sim}{\Delta}^t \left[\frac{1}{2l^3} \underset{\sim}{L}^t \underset{\sim}{B}^t \left(\int_{-1}^{+1} EI \, \underset{\sim}{\alpha}^t \, d\eta \right) \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{L} \right] \underset{\sim}{\Delta}. \tag{c}$$

Notînd

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} EI \underset{\sim}{\alpha}^t \underset{\sim}{\alpha} d\eta \,, \tag{3.37}$$

$$\underset{\sim}{K} = \frac{1}{l^3} \underset{\sim}{L}^t \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{J} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{L} \tag{3.38}$$

și ținînd seama că egalitatea (c) trebuie să existe pentru orice deplsare virtuală, rezultă relația

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\Delta} \,, \tag{3.39}$$

care pune în evidență matricea de rigiditate $\underset{\sim}{K}$ a barei (3.38) pentru orice variație a momentelor de inerție.

Dacă se pornește de la produsul

$$\underset{\sim}{\alpha}^t \underset{\sim}{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6\eta \end{bmatrix} [2 \quad 6\eta] = \begin{bmatrix} 4 & 12\eta \\ 12\eta & 36\eta^2 \end{bmatrix}$$

și se fac notațiile

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} EI \, d\eta \,; \quad J_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} EI \eta \, d\eta \,; \quad J_2 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} EI \, \eta^2 \, d\eta, \tag{3.40}$$

matricea $\underset{\sim}{J}$ (3.37) devine :

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} 4J_0 & 12J_1 \\ 12J_1 & 12J_2 \end{bmatrix}. \tag{3.41}$$

Cu precizările de mai sus matricea de rigiditate a barei $i - j$ cu

secțiune variabilă, efectuînd produsele indicate în (3.38), ia forma:

$$\underset{\sim}{K}=\begin{vmatrix} \frac{6}{l^2}(J_2-J_1) & \frac{1}{l}(J_0-6J_1+3J_2) & \frac{6}{l^2}(J_1-J_2) & \frac{1}{l}(-J_0+3J_2) \\ \frac{12}{l^3}J_2 & \frac{6}{l^2}(J_2-J_1) & -\frac{12}{l^3}J_2 & \frac{6}{l^2}(J_1+J_2) \\ \frac{6}{l^2}(J_1+J_2) & \frac{1}{l}(-J_0+3J_2) & -\frac{6}{l^2}(J_1+J_2) & \frac{1}{l}(J_0+6J_1+3J_2) \\ \frac{12}{l^3}J_2 & \frac{6}{l^2}(J_1-J_2) & \frac{12}{l^3}J_2 & -\frac{6}{l^2}(J_1+J_2) \end{vmatrix} . \quad (3.42)$$

Pentru EI = const., rezultă $J_0 = EI$, $J_1 = 0$, $J_2 = EI$ și matricea (3.42) devine identică cu (3.4).

4. CONCLUZII

Arborii sînt organe de mașini cu largă utilizare în construcția mașinilor și mecanismelor și calculul exact al eforturilor și deformațiilor constituie o problemă importantă.

În această lucrare sînt prezentate două algoritme generale care permit calculul deplasărilor cu luarea în considerare a deformărilor produse de forțele tăietoare. Se precizează că influența acestora, neglijabilă în cazul grinzilor, în multe cazuri concrete la arbori nu mai poate fi neglijată.

Procedeele dezvoltate, unul folosind matricele de transfer, celălalt folosind matricele de rigiditate sînt aplicabile atît arborilor încovoiați static determinați, cît și celor static nedeterminați.

Ambele procedee se pot transpune cu ușurință în programe pentru calculatoare electronice, a căror folosire în proiectare contribuie la o proiectare optimă.

Pornind de la aceste procedee de calcul static, se pot analiza vibrațiile de încovoiere ale arborilor drepți cu secțiune variabilă. În acest scop au fost precizate în mod distinct matricele de transfer și matricele de rigiditate atît ținînd seama de influența deformărilor produse de forțele tăietoare, cît și fără această influență.

Primită la redacție la 17 noiembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. GH. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*, Edit. tehnică, București, 1980.
2. R. K. LIVESLEY, *Matrix methods of structural analysis*, Pergamon Press, Oxford. 1975.
3. GH. MANEA, *Organe de mașini*, Edit. tehnică, București, 1975.
4. GH. MASSONNET și alții, *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Edit. tehnică, București, 1974.
5. PING CHUN WANG, *Metode numerice și matriceale în mecanica construcțiilor*, Edit. tehnică, București, 1970.
6. N. POSEA, *Rezistența materialelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
7. A. RIPIANU, I. CRĂCIUN, *Osii, arbori drepți și arbori cotiți*, Edit. tehnică, București, 1977.
8. R. ZURMÜHL, *Ein Matrizenverfahren zur Behandlung von Biegeschwingungen nach der deformations Methode*, Inginieur—Archive XXXII (1963).

ASPECTE CINEMATICE ÎN PROBLEMA TRAGERII

de CRISTIAN FĂCIU
INCREST, București

În lucrare se determină liniile de curent ale curgerii vîscoplastice în focarul de deformație în problema tragerii barelor cilindrice circulare.

1. INTRODUCERE

Este cunoscut faptul că în practica industrială viteza la care se desfășoară procesele de tragere a sîrmelor a crescut foarte mult. Pentru a putea lua în considerare influența vitezei de tragere asupra forței de tragere în [1, 2, 3, 4, 5] au fost folosite ecuațiile constitutive ale teoriei vîscoplasticității.

Soluțiile obținute pentru estimarea forței de tragere sînt în bună concordanță cu datele experimentale.

Recent, în [4, 5] pornindu-se de la legile locale de bilanț au fost rezolvate problemele tragerii benzilor precum și a tragerii sîrmelor la viteze mari ca probleme la limită în regiunea curgerii vîscoplastice, folosindu-se metoda perturbațiilor prin introducerea unui parametru mic, numărul lui Bingham.

Pornindu-se de la aceste două lucrări, în care pentru prima dată s-a considerat un cîmp de viteze neradial, în lucrarea de față se determină funcția de curent și totodată liniile de curent în problema tragerii barelor cilindrice. Pe baza acestor calcule sînt puse în evidență particularitățile cinematice ale modelului pentru diferite condiții de desfășurare a procesului de tragere.

2. CALCULUL FUNCȚIEI DE CURENT

Cu notațiile și ipotezele utilizate în [5] se consideră : R_1 raza de intrare și R_2 raza finală a barei, reducerea fiind obținută prin trecerea printr-o matriță conică. Se presupune că proprietățile mecanice ale materialului pot fi descrise cu ajutorul unui model Bingham rigid-vîscoplastic. Admitem că în zonele I și II are loc o mișcare rigidă, iar în zona III, delimitată de matriță și de două suprafețe S_1 și S_2, se produce curgerea materialului.

Presupunem mișcarea staționară, incompresibilă, axial-simetrică, în absența forțelor masice.

Problema se rezolvă pornind de la ecuațiile lui Cauchy, ecuația de continuitate și ecuațiile constitutive scrise în coordonate sferice (r, θ, φ).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 2, 1981, P. 265—274

Prin introducerea variabilelor adimensionale, notate cu indicele „0"

$$r = r^0 R_2\,; \quad v_r = v_r^0\, v_2\,; \quad v_\theta = v_\theta^0\, v_2\,,$$

se pun în evidenţă parametrii adimensionali

$$\mathcal{B}g = \frac{k\,R_2}{\eta\, v_2}, \qquad \text{numărul lui Bingham;}$$

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho v_2 R_2}{\eta} \qquad \text{numărul lui Reynolds.}$$

Se presupune că $\mathcal{R}e \ll 1$ şi $\mathcal{B}g < 1$ ceea ce corespunde vitezelor mari de tragere.

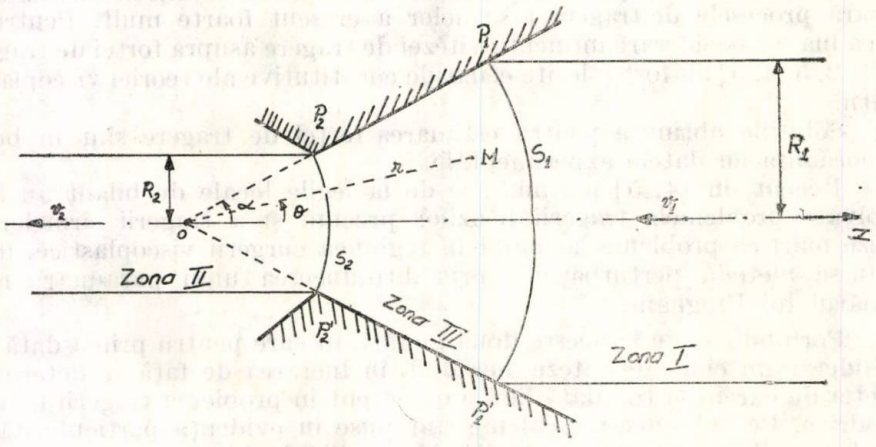


Fig. 1

Se exprimă cele două componente adimensionale ale vitezei v_r^0 şi v_θ^0 cu ajutorul funcţiei de curent $\psi = \psi\,(r,\,\theta) = R_2^2\, v_2\, \psi^0\,(r^0,\,\theta)$ prin relaţiile:

$$v_r^0 = -\frac{1}{r^{0\,2}\sin\theta}\,\frac{\partial \psi^0}{\partial\,\theta},$$

$$v_\theta^0 = \frac{1}{r^0\,\sin\theta}\,\frac{\partial \psi^0}{\partial r^0}. \tag{2.1}$$

Funcţia de curent adimensională se exprimă în serie de puteri de forma:

$$\psi^0\,(r^0\,,\theta) = \psi_0^0\,(\theta) + \mathcal{B}g\;\psi_1^0\,(r^0,\;\theta) + \frac{\mathcal{B}g^2}{2}\;\psi_2^0\,(r^0,\,\theta) + \ldots\;. \tag{2.2}$$

Pentru determinarea funcţiei de curent $\psi^0(r^0, \theta)$ vom utiliza relaţiile :

$$\psi_1^0(r^0, \theta) = r^{03}\,\varphi(\theta), \tag{2.3}$$

$$u(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\psi_0^0}{d\theta}, \tag{2.4}$$

$$v(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\varphi}{d\theta}, \tag{2.5}$$

unde funcţiile u şi v verifică următoarele ecuaţii :

$$u''' + \operatorname{ctg}\theta u'' + \left(6 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)u' = 0, \tag{2.6}$$

$$v''' + \operatorname{ctg}\theta v'' + \left(6 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)v' =$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{12u - \operatorname{ctg}\theta u'}{2\sqrt{3u^2 + \frac{u'^2}{4}}}\right) - \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{u'}{2\sqrt{3u^2 + \frac{u'^2}{4}}}\right). \tag{2.7}$$

Soluţiile acestor ecuaţii sînt date de :

$$u(\theta) = a + b\cos 2\theta, \tag{2.8}$$

$$v(\theta) = \frac{A}{6} + B\left(\frac{1}{3} + \cos 2\theta\right) + K_1(\theta)\chi(\theta) + K_2(\theta)\mu(\theta), \tag{2.9}$$

unde a, b, A, B, sînt constante.

$$K_1(\theta) = -\frac{9}{16}\int_0^\theta f(t)\sin t\,\mu(t)\,dt, \tag{2.10}$$

$$K_2(\theta) = \frac{9}{16}\int_0^\theta f(t)\sin t\,\chi(t)\,dt, \tag{2.11}$$

unde

$$\mu(\theta) = \left(\frac{1}{3} + \cos 2\theta\right)\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) - (1 - 3\cos\theta)(1 + \cos\theta), \tag{2.12}$$

$$\chi(\theta) = \left(\frac{1}{3} + \cos 2\theta\right) \tag{2.13}$$

şi

$$f(\theta) = \frac{12u - u' \operatorname{ctg}\theta}{2\sqrt{3u^2 + \frac{u'^2}{4}}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{u'}{2\sqrt{3u^2 + \frac{u'^2}{4}}}\right). \tag{2.14}$$

Deci funcţia de curent adimensională capătă forma,

$$\psi^0(r^0, \theta) = \psi_0^0(\theta) + \mathscr{B}g\, r^{03}\, \varphi(\theta) + O(\mathscr{B}g^2), \tag{2.15}$$

iar componentele vitezei sînt :

$$v_r^0(r^0, \theta) = -\frac{1}{r^{02}} u(\theta) - \mathscr{B}g\, r^0\, v(\theta) + O(\mathscr{B}g^2), \tag{2.16}$$

$$v_\theta^0(r^0, \theta) = 3\mathscr{B}g\, \frac{\varphi(\theta)}{\sin\theta} + O(\mathscr{B}g^2). \tag{2.17}$$

Din relaţiile (2.4) şi (2.5) se obţine cu uşurinţă :

$$\psi_0^0(\theta) = a - \frac{b}{3} + \left(\frac{b}{2} - a\right)\cos\theta - \frac{b}{6}\cos 3\theta, \tag{2.18}$$

$$\varphi(\theta) = \int_0^\theta \sin t \left[\frac{A}{6} + B\left(\frac{1}{3} + \cos 2t\right) + \chi(t)\, K_1(t) + \mu(t)\, K_2(t)\right] \mathrm{d}t. \tag{2.19}$$

Cu următoarele notaţii :

$$\lambda_1(a, b) = \frac{12ab + 8b^2}{3(a+b)^2}\,;\ \lambda_2(a, b) = \frac{8b^2}{3(a+b)^2}, \tag{2.20}$$

$$\alpha_1(a, b) = \frac{6a + 8b}{\sqrt{3}\,(a+b)}\,; \qquad \alpha_2(a,b) = -\frac{14\,b}{\sqrt{3}(a+b)}$$

$$\alpha_3(a, b) = -\frac{b}{\sqrt{3}(a+b)} \tag{2.21}$$

funcţia (2.14) capătă forma :

$$f(\theta) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\,(\lambda_1 - \lambda_2 \sin^2\theta)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\alpha_3 \sin 2\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\,(\lambda_1 - \lambda_2 \sin^2\theta)}}\right). \tag{2.22}$$

Din relația (2.19) se obține :

$$\varphi(\theta) = \frac{A}{6}(1 - \cos\theta) + \frac{2B}{3}\cos\theta \sin^2\theta +$$

$$+ \frac{9}{16}\int_0^\theta\int_0^t f(s)\sin s \sin t[\chi(s)\,\mu(t) - \chi(t)\,\mu(s)]\,ds\,dt. \qquad (2.23)$$

Un calcul elementar ne conduce la :

$$\varphi(\theta) = \frac{A}{6}(1 - \cos\theta) + \frac{2B}{3}\cos\theta \sin^2\theta +$$

$$+ \frac{9}{16}\int_0^\theta f(s)\sin s\left[\chi(s)\int_s^\theta \mu(t)\sin t\,dt - \mu(s)\int_s^\theta \chi(t)\sin t\,dt\right]ds. \qquad (2.24)$$

Se găsește cu ușurință :

$$\int_0^\theta \sin t\ \chi(t)\,dt = -\frac{1}{6}\chi'(\theta)\sin\theta, \qquad (2.25)$$

$$\int_0^\theta \sin t\ \mu(t)\,dt = -\frac{1}{6}\mu'(\theta)\sin\theta + \frac{2}{9}\cdot \qquad (2.26)$$

Atunci, din (2.24) se obține

$$\varphi(\theta) = \frac{A}{6}(1 - \cos\theta) + \frac{2B}{3}\cos\theta \sin^2\theta +$$

$$+ \frac{3}{32}\int_0^\theta f(s)\left[\frac{16}{9}\sin s - \sin\theta\mu'(\theta)\sin s\chi(s) + \sin\theta\chi'(\theta)\sin s\,\mu(s)\right]ds. \qquad (2.27)$$

Cu următoarele notații

$$I_k(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin^{2k-1} t}{\sqrt{1 - \sin^2 t\,(\lambda_1 - \lambda_2 \sin^2 t)}}\,dt, \qquad k = 1, 2, 3, \qquad (2.28)$$

$$J_k(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin^{2k-1} t \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2 t\,(\lambda_1 - \lambda_2 \sin^2 t)}}\,dt, \qquad k = 1, 2, 3, \qquad (2.29)$$

funcția de curent adimensională capătă forma :

$$\psi^0(r^0,\ \theta) = a - \frac{b}{3} + \left(\frac{b}{2} - a\right)\cos\theta - \frac{b}{6}\cos 3\theta +$$

$$+\mathscr{B}gr^{03}\left\{\frac{A}{6}(1-\cos\theta) + \frac{2B}{3}\cos\theta\sin^2\theta + \left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_3\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}M(\theta)\right)I_1(\theta) + \right.$$

$$+\left[\frac{3}{16}\alpha_1 M(\theta) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}M(\theta)\right)\alpha_2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{11}{8}M(\theta)\ \alpha_3\right)\right]I_2(\theta) +$$

$$+\frac{3}{8}\left(\frac{\alpha_2}{2} - 3\alpha_3\right)M(\theta)I_3(\theta) - \left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_3\right)\cos\theta\ \sin^2\theta\, J_1(\theta) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 - 11\alpha_3\right)\cos\theta\ \sin^2\theta\, J_2(\theta) -$$

$$-\frac{3}{2}\left(3\alpha_3 - \frac{\alpha_2}{2}\right)\cos\theta\ \sin^2\theta\, J_3(\theta) +$$

$$+\left(\frac{3\alpha_1}{4} + \frac{5}{2}\alpha_2\right)\cos\theta\ \sin^2\theta\ \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta\,(\lambda_1 - \lambda_2\sin^2\theta)} - 1}{\lambda_1} +$$

$$+\frac{3}{4}\left[6\alpha_3 - \alpha_2 - \frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\left(\alpha_1 + \frac{10}{3}\alpha_3\right)\right]\sin^2\theta\ \cos\theta\left[\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta(\lambda_1-\lambda_2\sin^2\theta)}-1}{2\lambda_2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\lambda_1}{4\lambda_2\sqrt{\lambda_2}}\ln\left|\frac{2\lambda_2\sin^2\theta - \lambda_1 + 2\sqrt{\lambda_2}\cdot\sqrt{1-\sin^2\theta\,(\lambda_1 - \lambda_2\sin^2\theta)}}{2\sqrt{\lambda_2} - \lambda_1}\right|\right]\right\} \quad (2.30)$$

unde

$$M(\theta) = \frac{4}{3} - 4\sin^2\theta - 2\sin\theta\sin 2\theta\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right). \quad (2.31)$$

Constantele a, b, A, B, se determină din condițiile cinematice și la limită ale problemei [5] și anume :

a) Componenta v_θ a vitezei este nulă pe suprafața matriței.

b) Suprafață de discontinuitate S_1 trece prin punctele P_1 și P'_1.

c) Se consideră o lege de frecare de forma :

$$t_{r\theta}\,|_{\theta=\alpha} = m\sqrt{\mathrm{II}_{t'}}\,|_{\theta=\alpha}\,, \quad (2.32)$$

unde $\mathrm{II}_{t'}$, este al doilea invariant al deviatorului tensorului tensiune și m este coeficient de frecare cuprins între 0 și 1.

Cu aceste condiții se obțin :

$$a = \frac{\sqrt{3}\ (\sin 2\alpha - \gamma\sqrt{3}\cos 2\alpha)}{2(1-\cos\alpha)[2\gamma(1-\cos\alpha)(1+2\cos\alpha)+\sqrt{3}\sin 2\alpha]}, \tag{2.33}$$

$$b = \frac{3\gamma}{2(1-\cos\alpha)[2\gamma(1-\cos\alpha)\ (1+2\cos\alpha)+\sqrt{3}\ \sin 2\alpha]}, \tag{2.34}$$

unde

$$\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}, \tag{2.35}$$

$$A = 6\ \frac{-\frac{m}{3}\cos\alpha\sin^2\alpha + \sin\alpha\left(\gamma\sin\alpha - 2\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}}\right) I_1(\alpha)}{(1-\cos\alpha)\left[\sin 2\alpha - \frac{\gamma}{\sqrt{3}}(1-\cos\alpha)\ (1+2\cos\alpha)\right]} +$$

$$+6\ \frac{\gamma[\sqrt{3}\ \sin 2\alpha + 6\gamma\cos 2\alpha - 4\gamma\ ]I_2(\alpha) + 4\gamma^2 I_3(\alpha)}{\sqrt{3}\ \sin 2\alpha + 6\gamma\ \sin^2\alpha} \cdot \tag{2.36}$$
$$(1+\cos\alpha)\left[\sin 2\alpha - \frac{\gamma}{\sqrt{3}}(1-\cos\alpha)\ (1+2\cos\alpha)\right]$$

Din condiția $\varphi(\alpha) = 0$, se determină valoarea constantei B sub forma :

$$B = -\frac{3}{2\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}\left\{\frac{A}{6}(1-\cos\alpha) + \left(\frac{\alpha_1}{2}+\alpha_3\right)\left(1+\cos\alpha\ln\left(\operatorname{tg}\frac{2}{\alpha}\right)\right)\sin^2\alpha I_1(\alpha) +\right.$$

$$+\left[(3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 22\alpha_3)\left(\frac{1}{12} - \frac{\sin^2\alpha}{4} - \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{4}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \frac{\alpha_2 - 2\ \alpha_3}{6}\right] I_2(\alpha) +$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{\alpha_2}{2} - 3\alpha_3\right)\left[\frac{1}{3} - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\right] I_3(\alpha) -$$

$$-\left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_3\right)\cos\alpha\sin^2\alpha J_1(\alpha) - \frac{1}{4}(2\alpha_2 - 3\alpha_1 - 22\alpha_3)\cos\alpha\sin^2\alpha J_2(\alpha) -$$

$$-\frac{3}{2}\left(3\alpha_3 - \frac{\alpha_2}{2}\right)\cos\alpha\sin^2\alpha J_3(\alpha) +$$

$$\left.+\left(\frac{3\alpha_1}{4} + \frac{5}{2}\alpha_3\right)\cos\alpha\sin^2\alpha\ \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha\ (\lambda_1 - \lambda_2\ \sin^2\alpha)} - 1}{\lambda_1} +\right.$$

$$+\frac{3}{4}\left[6\alpha_3-\alpha_2-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\left(\alpha_1+\frac{10}{3}\alpha_3\right)\right]\sin^2\alpha\cos\alpha\left[\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha(\lambda_1-\lambda_2\sin^2\alpha}-1}{2\lambda_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_1}{4\lambda_2\sqrt{\lambda_2}}\ln\left|\frac{2\lambda_2\sin^2\alpha-\lambda_1+2\lambda_2\sqrt{\lambda_2}\sqrt{1-\sin^2\alpha(\lambda_1-\lambda_2\sin^2\alpha)}}{2\sqrt{\lambda_2}-\lambda_1}\right|\right]\Bigg\} \quad (2.37)$$

În cazul limită, $m \to 0$ cînd frecarea este absentă se obține:

$$a^* = \frac{1}{2(1-\cos\alpha)}; \qquad b^* = 0; \qquad A^* = -2\sqrt{3},$$

$$\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0. \quad (2.38)$$

În acest caz, funcția de curent capătă forma:

$$\psi^0(r^0,\theta) = \frac{1-\cos\theta}{2(1-\cos\alpha)} + \mathscr{B}g r^{03}\sin^2\theta\cos\theta\left(2B-\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (2.39)$$

Din condiția $\varphi(\alpha) = 0$ rezultă $B^* = \frac{\sqrt{3}}{4}$ deci $\varphi(\theta) = 0$ pentru $\theta \in [0, \alpha]$

Consecință:

$$\psi^0(r^0, \theta) = \frac{1-\cos\theta}{2(1-\cos\alpha)}. \quad (2.40)$$

3. DETERMINĂRI NUMERICE. CONCLUZII

Rezolvarea numerică a problemei și determinarea liniilor de curent s-a făcut pentru coeficientul de frecare $\gamma = 0{,}05$ și pentru semiunghiul matriței $\alpha = 30°$.

Integralele I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3 care apar în expresia funcției de curent adimensionale $\psi^0(r^0,\theta)$ au fost calculate numeric.

Ecuațiile liniilor de curent sînt:

$$\psi^0(r^0,\theta) = \psi_0^0(\theta) + \mathscr{B}g\, r^{03}\varphi(\theta) = c, \quad (3.1)$$

unde c este o constantă, $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Se pun în evidență următoarele aspecte cinematice (Fig. 2)

În cazul $c = 0$, linia de curent este OZ ($\theta = 0$), iar pentru $c = 0{,}5$ linia de curent este chiar generatoarea suprafeței matriței $\theta = \alpha$. Celelalte linii de curent vor corespunde valorilor constantei $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

S-au trasat liniile de curent corespunzătoare constantelor $c = 0{,}01$; $c = 0{,}1$; $c = 0{,}25$ pentru diferite valori ale parametrului $\mathcal{B}g$ și ale coeficientului de frecare γ.

Din relația (2.40) se observă că în cazul ideal fără frecare ($\gamma = 0$), liniile de curent sînt radiale.

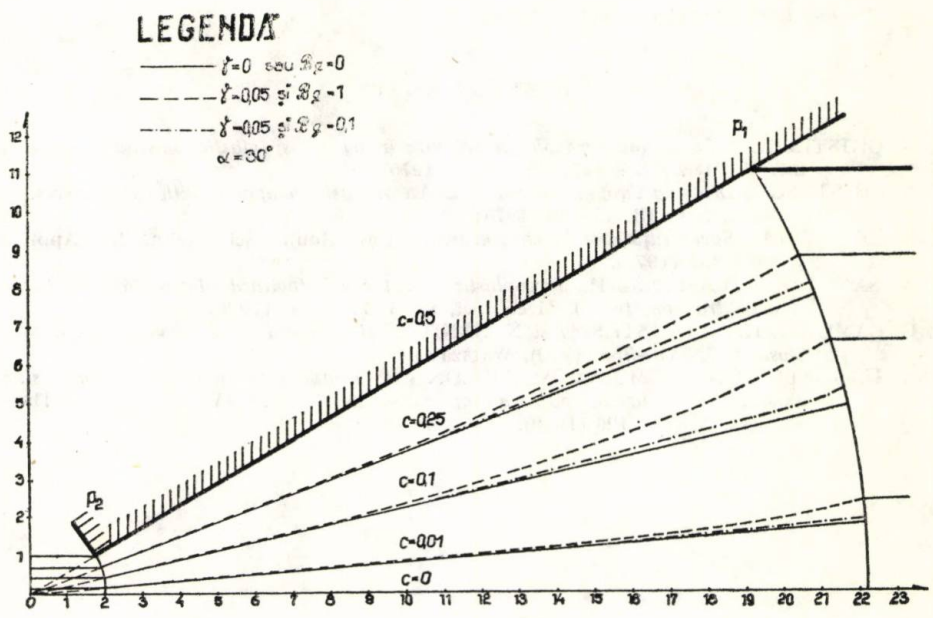


Fig. 2. — Linii de curent.

De asemenea, în cazul limită $\mathcal{B}g \to 0$, deci cînd materialul are numai proprietăți vîscoase, liniile de curent sînt radiale.

Liniile de curent trasate pentru $\mathcal{B}g = 0{,}1$ și $\mathcal{B}g = 1$ pun în evidență o curbură a acestora care se accentuează odată cu creșterea parametrului adimensional $\mathcal{B}g$ (deci odată cu scăderea vitezei de tragere) sau o dată cu creșterea coeficientului de frecare γ.

Datorită valorilor apropiate de zero pe care le ia funcția $\varphi(\theta)$, $\theta \in [0{,}30°]$ (vezi tab. 1), liniile de curent obținute se confundă practic cu liniile radiale în special pentru reduceri în arie mici, cum ar fi $r\% = 10\%$ sau $r\% = 20\%$ care sînt folosite în practica industrială, unde

Tabela 1

$\theta°$	$\psi_0^0(\theta)$	$\varphi(\theta)$
0°	0,000000	0,000000
5°	0,011784	−0,000001
10°	0,057946	−0,000004
15°	0,129507	−0,000006
25°	0,352205	−0,000005
30°	0,5	0,000000

$$r\% = 100\left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}\right). \tag{3.2}$$

Existența unei curburi, deși relativ mică, modelează mult mai bine fenomenul real așa cum s-a constatat în experiențele de visioplasticitate [6].

În concluzie se desprinde faptul că factorii care influențează curbura liniilor de curent sînt viteza de tragere v_2 și coeficientul de frecare γ.

Primită la redacție la 4 octombrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. N. CRISTESCU, *Plastic flow through conical dies using a viscoplastic constitutive equation*, Int. J. Mech. Sci., **17**, 425—433 (1975).
2. N. CRISTESCU, *Drawing through conical dies. An analysis compared with experiments*, Int. J. Mech. Sci., **18**, 45—49 (1976).
3. N. CRISTESCU, *Speed influence in wire drawing*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl., **22**, *3*, 391—399 (1977).
4. N. ȘANDRU, G. CAMENSCHI, *Viscoplastic flow through inclined planes with application to strip drawing*, Int. J. Mech. Sci, **17**, *6*, 773—784 (1979).
5. G. CAMENSCHI, N. CRISTESCU și N. ȘANDRU *High speed wire drawing*, *Arch. Mech. Stos*, **31**, *5*, 741—755 (1979), Warszawa.
6. A. U. SULIJOADIKUSUMO, O. W. DILLON JR. *Temperature distribution for a steady axisymetric extrusion, with an application to Ti-6, Al-4V ; Part. 2*, J. Therm. Stresses, **2**, 113—126 (1979).

O METODĂ DE DETERMINARE A LEGII DEPLASĂRII PISTONULUI-SERTAR AL POMPELOR DE INJECȚIE

de T. TURCOIU, N. APOSTOLESCU
Institutul Național de Motoare Termice București, Institutul politehnic București

Se prezintă o metodă de determinare a legii de deplasare a pistonului-sertar al pompelor de injecție, utilizînd metoda celor mai mici pătrate. În acest sens, se folosește un ansamblu de 20 de puncte, determinate experimental, ale înălțimii de ridicare pe cama unei pompe de injecție, pentru a stabili prin metoda celor mai mici pătrate un polinom de aproximare cît mai exactă a legii deplasării pistonului-sertar. S-a elaborat un program de calcul pentru precizarea coeficienților polinomului de aproximare și calculul înălțimii de ridicare a pistonului-sertar, cu polinomul respectiv, în punctele în care s-au făcut măsurători.

1. INTRODUCERE

În cazul modelării pe calculator a procesului de injecție, condițiile curente de precizie a calculului impun adoptarea unor intervale de calcul suficient de mici, de ordinul 0,005...0,2 grade de rotație a arborelui pompei (°rap) [3], [4]. În acest sens, la declanșarea calculului la pompă de pildă, este necesar ca pentru evaluarea înălțimii de ridicare a pistonului-sertar să se cunoască legea de deplasare a acestuia. Deplasarea pistonului în funcție de unghiul rap se obține inițial sub formă discretă, prin măsurători ale înălțimii de ridicare pe cama pompei de injecție. Pe baza rezultatelor măsurătorilor, se determină în continuare legea aproximativă de deplasare a pistonului pompei de injecție.

Aproximarea deplasării pistonului-sertar se face, în mod curent, printr-un polinom de gradul n (polinomul lui Newton) care, în cazul general, are forma [3],

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}\, y_i, \qquad (1)$$

unde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt punctele în care valoarea polinomului este identică celei măsurate, iar $y_0, y_1, \ldots, y_n$), reprezintă valorile măsurate. Polinomul (1), se construiește pe principiul corespondenței exacte într-un număr de puncte. Cu cît numărul de puncte este mai mare, cu atît polinomul aproximează mai bine deplasarea pistonului-sertar. Folosind relația (1) însă, cu creșterea numărului de puncte de corespondență crește gradul polinomului de aproximare, ceea ce complică determinarea coeficienților acestuia.

În acest sens, lucrarea de față propune o metodă de stabilire a polinomului de aproximare a deplasării pistonului-sertar al pompei de

injecție, folosind un număr mare de puncte experimentale, fără ca gradul polinomului să crească proporțional cu numărul de puncte. Utilizînd metoda celor mai mici pătrate s-a elaborat un program de calcul care precizează valorile coeficienților polinomului de aproximare și valorile deplasării pistonului-sertar în punctele considerate calculate cu polinomul respectiv.

2. CONSIDERAȚII TEORETICE

În general, rezultatele unei experiențe (fizice) oarecare sînt trecute într-un tabel de valori, ale cărui elemente conțin erori aleatoare. Aceste erori aleatoare se pot prezice în mod obișnuit cu un grad rezonabil de certitudine deoarece sînt repartizate după o lege statistică [1].

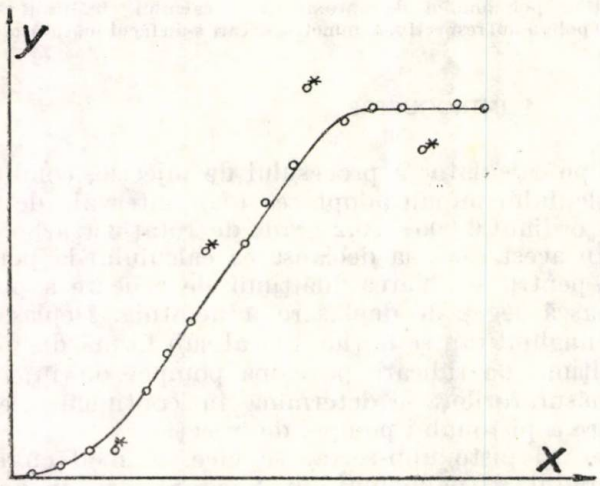


Fig. 1. — Reprezentarea grafică a ridicării pistonului-sertar pe cama unei pompe de injecție.

De exemplu, măsurătorile ridicării pistonului-sertar pe cama unei pompe de injecție extrase din tabelul de valori, pot avea reprezentarea grafică din figura 1. Se constată că punctele marcate cu asterisc conțin erori importante pentru valorile ordonatelor lor chiar dacă se supun aceleiași reguli ca și celelalte puncte.

Dacă se dorește obținerea unei relații analitice între x și y trebuie atenuată pe cît posibil influența erorilor aleatoare.

Lucrarea de față propune ca dispunînd de valorile tabelate ale ridicării pe camă (y) în funcție de unghiul de rotație al acesteia (x), să se calculeze o curbă care să treacă printre punctele reprezentate grafic. Se folosește metoda celor mai mici pătrate [2], care presupune însumarea pătratelor abaterilor minime.

Dacă în tabelul de valori experimentale, x_1, x_2, ... x_m sînt punctele în care s-au realizat măsurătorile, cărora le corespund y_1, y_2, ..., y_m valori măsurate, se poate decide, după examinarea datelor, asupra gradului curbei care ar putea aproxima valorile reprezentate grafic. Se presupune că aceasta ar fi un polinom de gradul n și că valorile y conțin

erori aleatoare. În acest caz, curba aproximată polinomial prin metoda celor mai mici pătrate este

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{2}$$

Se notează cu $\bar{y}_i$ valoarea expresiei din dreapta egalității (2) pentru $x = x_i$, astfel încît

$$\bar{y}_i = a_n x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + \ldots + a_1 x_i + a_0, \tag{3}$$

unde bara de deasupra lui y_i arată că este vorba despre o aproximație a valorii acestuia. Valoarea „adevărată" a lui y_i se află în tabel. Abaterea (eroarea) se definește ca fiind diferența dintre valoarea adevărată și valoarea aproximativă, adică $y_i - \bar{y}_i$. Metoda celor mai mici pătrate presupune minimizarea sumei pătratelor abaterilor valorilor lui y, adică

$$S = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_n x_i^n - a_{n-1}x_i^{n-1} - \ldots - a_p x_i^p - \ldots - a_1 x_i - a_0)^2 \mid \min \tag{4}$$

Minimizarea lui S se obține prin anularea derivatelor parțiale în raport cu $a_0, a_1, \ldots a_p, \ldots, a_n$. Rezultă, după ordonarea termenilor,

$$\begin{gathered}
m a_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^k\right) a_k + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^n\right) a_n = \sum_{i=1}^{m} y_i, \\
\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k+1}\right) a_k + \ldots + \\
+ \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1}\right) a_n = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^p\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{p+1}\right) a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k+p}\right) a_k + \ldots + \\
+ \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+p}\right) a_n = \sum_{i=1}^{m} x_i^p y_i, \qquad (5) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^n\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1}\right) a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k+n}\right) a_k + \ldots + \\
+ \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{2n}\right) a_n = \sum_{i=1}^{m} x_i^n y_i.
\end{gathered}$$

Sistemul (5) conține $(n+1)$ ecuații liniare cu $n+1$ necunoscute $a_0, a_1 \ldots, a_n$, care se rezolvă prin eliminarea gaussiană [2]. Aceste ecuații se numesc ecuațiile normale pentru regresia polinomială de gradul n. După rezolvarea lor, valorile $a_0, a_1 \ldots, a_n$ se înlocuiesc în (2), rezultînd

regresia polinomială de gradul n în x a lui y ,sau curba celor mai mici pătrate pentru un polinom de gradul n.

3. CALCULUL DEPLASĂRII PISTONULUI-SERTAR

În figura 2 este prezentat desenul camei tangenţiale utilizată pentru acţionarea pistonului-sertar al pompei de injecţie RO-PES4A90C410, iar în tabelul 1 valorile ridicării pe camă măsurate cu rolă de 17 mm.

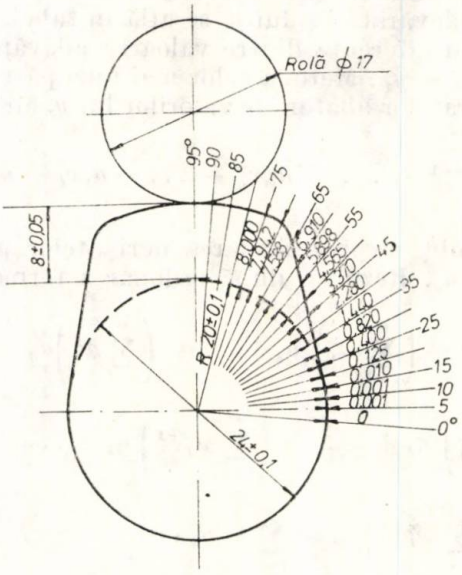


Fig. 2. — Cama pompei de injecţie RO-PES4A 90C410.

Tabelul 1

$x(\alpha)$ (°rap)	y măs (mm)	x (α) (°rap)	y măs (mm)	x (α) (°rap)	y măs (mm)	$x(\alpha)$ (°rap)	y măs (mm)
0	0,000	25	0,400	50	4,565	75	8,000
5	0,001	30	0,820	55	5,898	80	8,000
10	0,001	35	1,440	60	6,910	85	8,000
15	0,010	40	2,280	65	7,588	90	8,000
20	0,125	45	3,370	70	7,942	95	8,000

3.1. CALCULUL DEPLASĂRII PISTONULUI CU POLINOMUL LUI NEWTON

Aproximarea deplasării pistonului-sertar prin polinomul lui Newton (relaţia 1), presupune stabilirea unui număr de puncte de corespondenţă. Alegînd, spre exemplu, şase puncte de corespondenţă (căsuţele însemnate

din tab. 1), şi ţinînd seama de (1), rezultă un polinom de gradul şase care aproximează deplasarea pistonului sertar,

$$y^{(N)} = -0{,}7315952 \cdot 10^{-9} \cdot \alpha^6 + 1{,}5363499 \cdot 10^{-7} \cdot \alpha^5 - \\ - 1{,}3736616 \cdot 10^{-5} \cdot \alpha^4 + 0{,}6407404 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha^3 - \\ - 0{,}12049671 \cdot 10^{-1} \cdot \alpha^2 + 0{,}07638892 \cdot \alpha, \qquad (6)$$

Calculul deplasării pistonului cu polinomul (6), reprezintă o bună aproximare a curbei trasată prin punctele corespunzătoare măsurătorilor, numai pe intervalul de mijloc al acesteia. Spre capete, erorile cresc substanţial. În plus, determinarea coeficienţilor polinomului implică un volum însemnat de calcul.

3.2. CALCULUL DEPLASĂRII PISTONULUI-SERTAR CU METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

La această metodă, polinomul de aproximare se construieşte luînd în consideraţie toate punctele în care s-au realizat măsurătorile ($m = 20$).

Înainte de a începe procedura celor mai mici pătrate, se precizează gradul polinomului. Întrucît la metoda precedentă s-a obţinut un polinom de gradul şase, se consideră şi aici, mai întîi, tot un polinom de gradul şase ($n = 6$).

Pentru aceasta s-a elaborat un program de calcul care rezolvă matricea coeficienţilor ecuaţiilor normale la metoda celor mai mici pătrate. Programul apelează la două subrutine; subrutina GGAASS de rezolvare a sistemului de ecuaţii liniare prin eliminarea gaussiană şi subrutina VERFY care verifică valorile aproximării polinomiale găsite.

În urma rulării programului s-a obţinut următorul polinom :

$$y^{(6)} = 0{,}1674 \cdot 10^{-9} \cdot \alpha^6 - 0{,}1869 \cdot 10^{-7} \cdot \alpha^5 - 0{,}1799 \cdot 10^{-5} \cdot \alpha^4 + \\ + 0{,}2759 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha^3 - 0{,}7290 \cdot 10^{-2} \cdot \alpha^2 + 0{,}5775 \cdot 10^{-1} \cdot \alpha - \\ - 0{,}5479 \cdot 10^{-1}. \qquad (7)$$

Aproximarea curbei de deplasare a pistonului-sertar cu acest polinom este mai bună decît a polinomului (6), însă, la capete erorile se menţin încă la valori apreciabile.

Cu programul elaborat s-a încercat şi un polinom de gradul opt ($n = 8$). A rezultat,

$$y^{(8)} = -0{,}3273 \cdot 10^{-12} \cdot \alpha^8 + 0{,}1093 \cdot 10^{-9} \cdot \alpha^7 - 0{,}1404 \cdot 10^{-7} \cdot \alpha^6 + \\ + 0{,}8750 \cdot 10^{-6} \cdot \alpha^5 - 0{,}2855 \cdot 10^{-4} \cdot \alpha^4 + 0{,}5409 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha^3 - \\ - 0{,}4755 \cdot 10^{-2} \cdot \alpha^2 + 0{,}1280 \cdot 10^{-1} \cdot \alpha + 0{,}2157 \cdot 10^{-2}. \qquad (8)$$

Se constată că polinomul de gradul opt (fig. 6 şi tab. 2) aproximează foarte bine curba trasată prin punctele corespunzătoare măsurătorilor.

În figurile 3, 4 şi 5 sînt prezentate instrucţiunile de calcul ale programului şi subrutinelor pentru polinomul de gradul opt. Prin metoda celor mai mici pătrate s-a încercat şi un polinom de gradul patru. Aproximarea este mulţumitoare şi în acest caz.

```
C
C     PROG. FORMEAZA MATRICEA COEF.ECUATIILOR NORMALE
C           LA METODA CELOR MAI MICI PATRATE
C
C
      PARAMETER N=8,KW=6,K=20
      PARAMETER M=N+1,N2=M+1
      PARAMETER N1=2*N                    @ LIMITA DE EXTENSIE A PUTERILOR = N1
      REAL*8 SUM,RGT,A,S,ALFA
      DIMENSION SUM(N1),RGT(M) @ N=GRADUL POL.DE APROX.
      DIMENSION A(M,N2),X(K),Y(K),S(M)
C S(1)--->C0 ; S(N+1)--->CN  (CO...CN=POL.CF)
      DATA Y/ .001, .001, .001, .01 , .125, .4  , .82 ,1.44 ,2.28 ,
     *        3.37 ,4.565,5.898,6.91 ,7.588,7.942,8.   ,8.   ,8.   ,
     *        8.   ,8.   /
      DO 111 I=1,K
  111 X(I)=(I-1)*5.0
      DO 10 I=1,N1                        @ M=EXTENSIA NR.DE EC. N2=RANG TER.LIB
   10 SUM(I)=0.D0                         @ K=NR.DE PUNCTE
      DO 11 I=1,M
   11 RGT(I)=0.D0
      DO 40 J=1,K
      DO 50 I=1,N1
   50 SUM(I)=SUM(I)+X(J)**I
      DO 40 I=1,M
      IF(X(J).EQ.0.) GO TO 51
      ALFA=Y(J)*X(J)**(I-1)
      GO TO 40
   51 ALFA=0.D0
   40 RGT(I)=RGT(I)+ALFA
      A(1,1)=K*1.D0
      DO 100 I=1,M
      A(I,N2)=RGT(I)
      DO 100 J=1,M
      KK=I+J
      IF(KK.NE.2) A(I,J)=SUM(KK-2)
  100 CONTINUE
      WRITE(KW,6)
    6 FORMAT('1',15X,'*COEFICIENTII POL.DE APROXIMARE**//)
      CALL GGAASS(A,S,M,N2)
      WRITE(KW,5) (S(I),I=1,M)
    5 FORMAT(5X,10D12.4)
      CALL VERFYT(S,M,X,Y,K)
      END
```

Fig. 3. — Program de calcul al coeficienților polinomului de aproximare (ex : gradul polinomului de aproximare $N = 8$).

```
      SUBROUTINE GGAASS (A,X,N,NP1)
C
CC
C     REZ.UNUI SIST.DE EC.LINEARE PRIN ELIMINARE GAUSSIANA
C     A=MATR.COEF. X=VECT. SOL. N=NR.LINII NP1=NR.COL NP1=N+1
C        DIMENSIUNEA LUI A ESTE A(N,NP1) SI X(N)
CC
C
      REAL*8 A,TEMP,FACTOR,X,SUM
      DIMENSION A(N,NP1), X(N)
      NM1 = N - 1
      DO 600 K = 1, NM1
      KP1 = K + 1
      L =K
      DO 400 I = KP1, N
  400 IF(DABS(A(I,K)).GT.DABS(A(L,K))) L=I
      IF (L .EQ. K) GO TO 500
      DO 410 J = K, NP1
      TEMP = A(K, J)
      A(K, J) = A(L, J)
  410 A(L, J) = TEMP
  500 DO 600 I = KP1, N
      FACTOR = A(I, K) / A(K, K)
      DO 600 J = KP1, NP1
  600 A(I, J) = A(I, J) - FACTOR * A(K, J)
      X(N) = A(N, NP1) / A(N, N)
      I = NM1
  710 IP1 = I + 1
      SUM = 0.D0
      DO 700 J = IP1, N
  700 SUM = SUM + A(I, J) * X(J)
      X(I) = ( A(I, NP1) - SUM) / A(I, I)
      I = I - 1
      IF (I .GE. 1) GO TO 710
      RETURN
      END
```

Fig. 4. — Subrutina GGAASS.

În tabelul 2 s-au trecut valorile ridicării pe camă măsurate și calculate cu cele patru polinoame, precum și erorile care apar față de valorile ridicării pe camă măsurate.

```
      SUBROUTINE VERFY(S,M,X,Y,N)
C
C     VERIFICAREA VALORICA A UNEI APROX.POLINOMIALE GASITE
C      S=MATR.COEF.   M=DIM.EI   S(M)
C      X,Y COORD.PCT    P(X)=Y ??
C      N=DIM.LUI X SI Y     X(N),Y(N)
C
      PARAMETER KW=6
      REAL*8 S,POL,DIF,ALFA
      DIMENSION S(M),X(N),Y(N)
      DO 1 J=1,N
      POL=0.D0
      DO 2 I=1,M
      IF(X(J).EQ.0) GO TO 4
      ALFA=X(J)**(I-1)
      GO TO 2
    4 ALFA=1.D0
    2 POL=POL+ALFA*S(I)
      DIF=DABS(POL-Y(J))
      WRITE(KW,3) X(J),Y(J),POL,DIF
    3 FORMAT(7X,2(F12.6,3X),2(D16.4))
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Fig. 5. — Subrutina VERFY.

Tabelul 2

x (α) ° rap	y măs mm	$y^{(N)}_{calc}$ mm	$\varepsilon^{(N)}$ * %	$y^{(8)}_{calc}$ mm	$\varepsilon^{(8)}$ %	$y^{(6)}_{calc}$ mm	$\varepsilon^{(6)}$ %	$y^{(4)}_{calc}$ mm	$\varepsilon^{(4)}$ %
25	0,400	0,34611	13,5	0,3857	3,57	0,2996	25,1	0,4443	9,97
30	0,820	0,820	0	0,7920	3,41	0,7773	5,20	1,089	24,7
35	1,440	1,49533	3,70	1,422	1,25	1,493	3,50	1,861	22,62
40	2,280	2,35171	3,05	2,301	0,91	2,417	5,66	2,724	16,29
45	3,370	3,370	0	3,397	0,79	3,489	3,41	3,641	7,44
50	4,565	4,51373	1,12	4,620	1,19	4,629	1,38	4,575	0,22
55	5,898	5,73928	2,69	5,829	1,16	5,741	2,66	5,490	6,91
60	6,910	6,910	0	6,866	0,64	6,726	2,66	6,347	8,14
65	7,588	7,89671	3,90	7,600	0,15	7,498	1,18	7,110	6,29
70	7,942	8,45453	5,50	7,976	0,43	7,994	0,65	7,739	2,55
75	8,000	8,000	0	8,046	0,57	8,192	2,34	8,197	2,40
80	8,000	6,04836	24,4	7,968	0,40	8,129	2,34	8,446	5,28
85	8,000	7,63478	4,56	7,943	0,71	7,926	0,92	8,446	5,28
90	8,000	—6,48738	181	8,056	0,69	7,802	2,47	8,159	1,94
95	8,000	—19,98397	140,3	7,986	0,17	8,104	1,28	7,546	5,67

* Eroarea ε s-a calculat cu relația,

$$\varepsilon = \frac{y_{max} - y_{min}}{y_{max}} \cdot 100, \ \%.$$

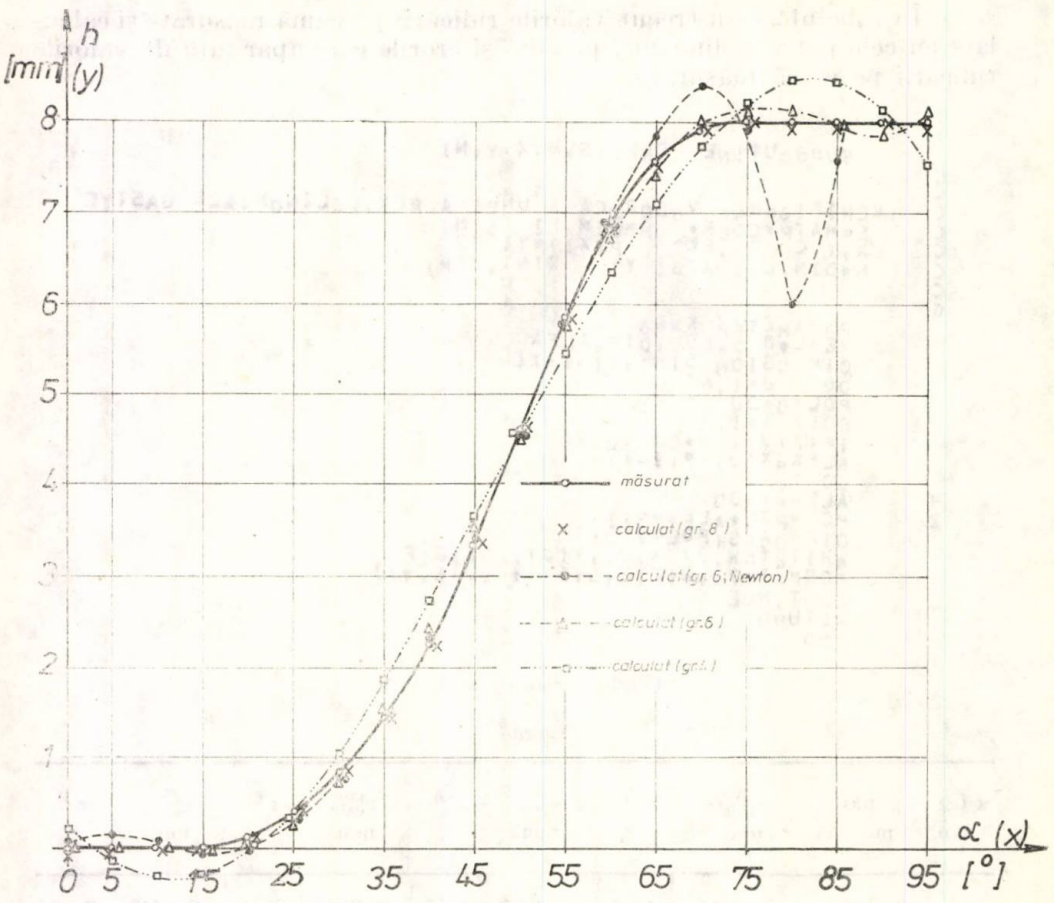


Fig. 6. — Legea de ridicare a pistonului-sertar trasată prin punctele măsurate și calculate cu cele patru polinoame de aproximare.

În figura 6, se prezintă legea de ridicare a pistonului-sertar, în funcție de unghiul de rotație al axului pompei, ținînd seama de valorile măsurate și calculate.

4. CONCLUZII

Utilizînd metoda celor mai mici pătrate rezultă, pentru necesitățile de calcul al procesului de injecție, o posibilitate de determinare a legii deplasării pistonului-sertar simplă, precisă și rapidă.

Curba de deplasare obținută realizează o corectare a valorilor determinate experimental, afectate de erori aleatoare.

Programul de calcul elaborat pentru determinarea coeficienților polinomului de aproximare este eficient; în exemplele de calcul considerate, pentru un ansamblu de 20 de puncte determinate experimental, execuția programului pe un calculator tip UNIVAC nu a depășit 30 de secunde.

Primită la redacție la 10 aprilie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. N. APOSTOLESCU, D. TARAZA, *Bazele cercetării experimentale a mașinilor termice*, Edit. did. ped., Buc., 1979.
2. W. S. DORN, D. D. McCRACKEN, *Numerical Methods with FORTRAN IV. Case Studies*, John Wiley and Sons, Inc., London, 1972.
3. A. MANEA, *Contribuții la studiul caracteristicii de injecție în condițiile apariției golurilor pe traseul pompă-injector*, Teză de doctorat, I. P. București, 1975.
4. A. MANOLE, *Contribuții la studiul fenomenelor dinamice din instalația de injecție*, Teză de doctorat, I. P. București, 1973.

CRITERII PENTRU APRECIEREA CONFORTULUI ŞI ADERENŢEI ROATĂ-SOL LA AUTOMOBILE

de T. SIRETEANU şi S. PĂRĂIAN
Institutul de fizică şi tehnologia materialelor, Bucureşti

În lucrare sînt prezentaţi o serie de parametri pentru aprecierea confortului şi aderenţei roată-sol la automobile. Pornind de la rezultatele obţinute prin studierea răspunsului subiectiv al omului supus la excitaţii periodice este propus un nou criteriu de apreciere a confortului bazat pe mărimea energiei cinetice specifice a oscilaţiilor aleatoare ale masei suspendate. Pentru determinarea caracteristicilor de lucru optime ale suspensiei este utilizată o metodă bazată pe minimizarea unei funcţii de optimizare care sintetizează cerinţele de confort şi aderenţă. Metoda de optimizare prezentată este aplicată pentru suspensia autoturismului Dacia 1300.

1. INFLUENŢA VIBRAŢIILOR ASUPRA ORGANISMULUI UMAN

Actualmente există o vastă literatură de specialitate consacrată studierii influenţei vibraţiilor periodice asupra organismului uman, sinteze ale rezultatelor obţinute în această direcţie de diferiţi cercetători găsindu-se în lucrările [1], [2]. Se ştie că efectele vibraţiilor asupra omului depind de amplitudinea şi frecvenţa vibraţiei, durata şi modul de aplicare a acesteia.

Dacă se notează prin X şi f amplitudinea, respectiv frecvenţa vibraţiei periodice,

$$x(t) = X \sin 2\pi ft, \tag{1}$$

valorile maxime ale vitezei, acceleraţiei şi acceleraţiei de ordinul al doilea (derivata acceleraţiei) sînt date, respectiv, de expresiile

$$\dot{x}_{max} = 2\pi fX, \quad \ddot{x}_{max} = 4\pi^2 f^2 X, \quad \dddot{x}_{max} = 8\pi^3 f^3 X. \tag{2}$$

Studiile experimentale efectuate de DIECKMANN [3] au condus la concluzia că efectele neplăcute ale vibraţiilor asupra omului se datoresc, în cazul în care excitaţia este aplicată pe verticală, valorilor maxime ale acceleraţiei pentru frecvenţe pînă la 5 Hz, ale vitezei pentru frecvenţe cuprinse între 5 şi 40 Hz şi ale deplasării pentru frecvenţe peste 40 Hz. Pentru vibraţiile orizontale efectele trebuie puse în legătură cu valorile maxime ale acceleraţiei pentru frecvenţe pînă la 2 Hz, ale vitezei pentru frecvenţe cuprinse între 2 şi 25 Hz şi ale deplasării pentru frecvenţe peste 25 Hz.

Analizînd un număr mare de lucrări consacrate studierii influenţei vibraţiilor asupra oragnismului uman, STEFFENS [2] a propus următoarea formulă empirică pentru determinarea amplitudinii unei vibraţii

care produce senzația de disconfort :

$$X = 7{,}62 \cdot 10^{-3}(1 + 125/f^2), \tag{3}$$

unde f se exprimă în Hz, iar X rezultă în cm.

ZELLER [4] a propus clasificarea vibrațiilor în funcție de nivelul de percepere ξ, măsurat în Pal, considerînd că efectul fiziologic al vibrațiilor este descris cel mai bine de energia cinetică specifică E a oscilației, definită ca raportul între energia cinetică maximă și produsul dintre masa m a corpului și perioada T a oscilației. Ținînd seama de relațiile(2), rezultă

$$E = 0{,}5\ m\dot{x}^2_{max}/mT = \ddot{x}^2_{max}/8\pi^2 f, \tag{4}$$

unde $\ddot{x}_{max}$ se exprimă în cm/s^2, iar f în Hz.

Nivelul de percepere ξ se definește prin relația

$$\xi = 10 \lg (E/E_0), \tag{5}$$

unde $E_0 = 1/16\ \pi^2$ cm^2/s^3 reprezintă energia cinetică specifică a oscilației la limita de percepere a acesteia de către organism.

Din (4) și (5) rezultă

$$\xi = 10 \lg (2\ddot{x}^2_{max}/f), \tag{6}$$

unde $\ddot{x}_{max}$ se exprimă în cm/s^2, f în Hz, iar ξ rezultă în Pal. După KOCH [5] , $\xi = 0 - 10$ Pal indică vibrații perceptibile, în funcție de poziția corpului, $\xi = 20 - 30$ Pal vibrații (inadmisibile) în clădiri datorită traficului rutier, $\xi = 30 - 40$ Pal — vibrații în vehicule cu mers liniștit, $\xi = 40 - 50$ Pal — trepidații în unele vehicule și ascensoare. Pentru frecvențe mai mari decît 15 Hz pragul durerii este desemnat de un nivel de vibrație $\xi = 70$ Pal. Pentru frecvențe mai mici decît 15 Hz (vibrațiile autovehiculelor, navelor) această limită este de 55 Pal.

Cercetările experimentale au arătat că organismul uman este mai sensibil la acțiunea vibrațiilor în anumite benzi de frecvență decît în altele Pentru vibrații cu frecvențe în domeniul 1 — 80 Hz, ISO [6] recomandă utilizarea unei funcții de ponderare a accelerațiilor, dată de relația

$$p(f) = \begin{cases} 0{,}5\sqrt{f} & , \quad 1\ \text{Hz} \leqslant f \leqslant 4\text{Hz}, \\ 1 & , \quad 4\ \text{Hz} \leqslant f \leqslant 8\ \text{Hz}, \\ 8/f & , \quad 8\ \text{Hz} \leqslant f \leqslant 80\ \text{Hz}. \end{cases} \tag{7}$$

Pentru frecvențe mai mici de 1 Hz, ALLEN [7] a propus completarea funcției pondere prin expresia

$$p(f) = 0{,}5\ f^{-0{,}69}\ , \quad 0{,}1\ \text{Hz} \leqslant f \leqslant 1\ \text{Hz}. \tag{8}$$

Funcția pondere $p(f)$ dată de relațiile (7) și (8) este reprezentată grafic în figura 1.

Mărimile și limitele de toleranță utilizate în studiul influenței vibrațiilor asupra omului au fost stabilite pentru regimuri de vibrații sinusoi-

dale. În cazul vibraţiilor aleatoare, evaluarea intensităţii regimurilor de vibraţii se face cu ajutorul unor caracteristici statistice, ca, de exemplu,

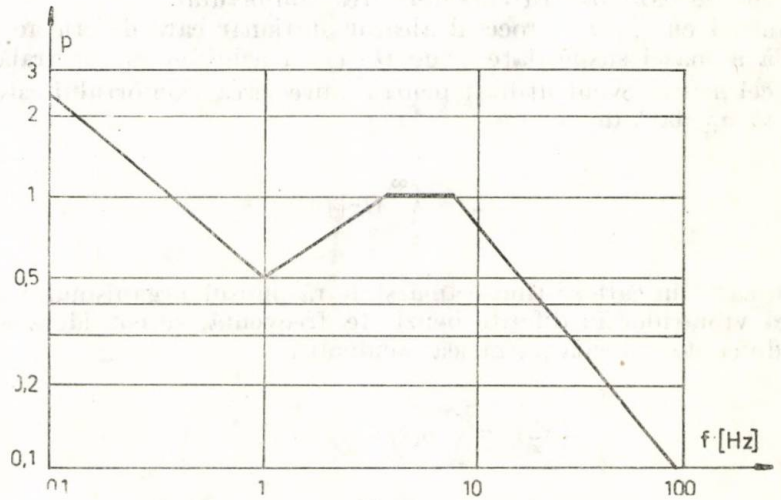


Fig. 1

media pătratică, probabilitatea depăşirii unor nivele admisibile sau valoarea medie a nivelelor maxime într-un anumit interval de timp. Aceste evaluări permit o caracterizare globală a intensităţii vibraţiilor în funcţie de spectrul de frecvenţă şi durata lor de acţiune.

2. PARAMETRII PENTRU APRECIEREA CONFORTULUI ŞI ADERENŢEI LA AUTOMOBILE

Pentru definirea parametrilor de apreciere a confortului şi aderenţei roată-sol la automobile se consideră modelul cu două grade de libertate reprezentat în figura 2. Extinderea acestor definiţii la modele mai complexe

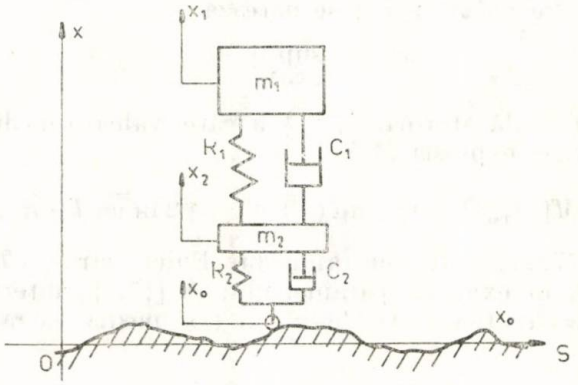


Fig. 2

nu prezintă nici un fel de dificultate întrucît parametrii de confort şi aderenţă se exprimă în raport cu mărimi ce caracterizează vibraţiile verticale ale automobilelor. Acţiunea drumului asupra automobilelor este modelată prin procese aleatoare staţionare gaussiene.

Parametrii pentru aprecierea confortului. Majoritatea autorilor [1], [8—12] consideră accelerația verticală a masei suspendate a automobilului ca mărime de bază pentru caracterizarea confortului.

Notînd cu $\{\ddot{x}_1(t)\}$ procesul aleator staționar care descrie accelerația verticală a masei suspendate și cu $G_{\ddot{x}_1}(f)$ densitatea sa spectrală, parametrul cel mai frecvent utilizat pentru aprecierea confortului este media pătratică $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ dată de relația

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \int_0^\infty G_{\ddot{x}_1}(f)\mathrm{d}f. \tag{9}$$

În cazul în care se ține seama și de răspunsul organismului uman la acțiunea vibrațiilor în diferite benzi de frecvență, se consideră ca parametru de confort media pătratică ponderată

$$(\sigma^2_{\ddot{x}_1})_p = \int_0^\infty p(f)\, G_{\ddot{x}_1}(f)\, \mathrm{d}f, \tag{10}$$

unde $p(f)$ este funcția pondere definită de formulele (7) și (8). Operația (10) revine la o filtrare a accelerației verticale cu un filtru al cărui factor de amplificare este reprezentat în figura 1.

Trebuie menționat că integralele (9) și (10) se calculează, în general pe un interval finit $[f_1, f_2]$ corespunzînd domeniului de frecvențe de interes practic pentru vibrațiile masei suspendate a automobilului.

Pornind de la faptul că valorile mari ale accelerației verticale sînt cele care provoacă, în principal, senzația de disconfort, DAHLBERG [13] propune ca parametru de apreciere a confortului, valoare medie a maximelor absolute ale procesului aleator $\{\ddot{x}_1(t)\}$ într-un anumit interval de timp T. Dacă pentru o realizare oarecare $\ddot{x}_1(t)$ a procesului aleator staționar și normal (cu medie nulă) $\{\ddot{x}_1(t)\}$ se notează

$$\ddot{x}_{1m} = \sup_{t\in[0,T]} |\ddot{x}_1(t)|, \tag{11}$$

se obține o variabilă aleatoare $\{\ddot{x}_{1m}\}$ a cărei valoare medie are, pentru T suficient de mare, expresia [13]:

$$M[\{\ddot{x}_{1m}\}] = (\sqrt{2\ln\mu(T)} + \gamma/\sqrt{2\ln\mu(T)})\sigma^2_{\ddot{x}_1}, \tag{12}$$

unde $\gamma = 0{,}5772\ldots$ este constanta lui Euler, iar $\mu(T) = \sigma_{\dddot{x}_1} T/2\pi\sigma_{\ddot{x}_1}$. Se observă că în expresia parametrului $M[\{\ddot{x}_{1m}\}]$ intervine atît media pătratică a accelerației verticale $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$, cît și media pătratică a derivatei acesteia

$$\sigma^2_{\dddot{x}_1} = 4\pi^2 \int_0^\infty f^2 G_{\ddot{x}_1}(f)\mathrm{d}f. \tag{13}$$

Derivata accelerației este proporțională cu viteza de variație a forței care acționează asupra masei suspendate a automobilului, fiind considerată

de unii autori ca o mărime utilizabilă pentru aprecierea confortului. În acest caz, parametrul de confort ar fi media pătratică $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ sau media pătratică ponderată

$$(\sigma^2_{\ddot{x}_1})_p = 4\pi^2 \int_0^\infty f^2 p(f) G_{\ddot{x}_1}(f)\, df. \tag{14}$$

Trebuie menţionat că parametrul de confort (12) poate fi exprimat şi în raport cu mediile pătratice ponderate (10) şi (14).

Pentru obţinerea unui parametru de confort bazat pe energia cinetică specifică (vezi relaţiile (4)), introducem noţiunea de energie cinetică specifică a unei oscilaţii aleatoare $\{x_1(t)\}$ într-o bandă de frecvenţă de lăţime infinitezimală Δf, definită prin relaţia

$$E_{x_1}(f, \Delta f) = \sigma^2_{\ddot{x}_1}(f, \Delta f)/4\pi^2 f, \tag{15}$$

unde $\sigma^2_{\ddot{x}_1}(f, \Delta f)$ reprezintă media pătratică a procesului aleator $\{\ddot{x}_1(t; f, \Delta f)\}$ ale cărei realizări se obţin prin filtrarea realizărilor lui $\{\ddot{x}_1(t)\}$ cu un filtru trece bandă ideal în domeniul de frecvenţe $[f - \Delta f/2, f + \Delta f/2]$.

Întrucît $E_{x_1}(f, \Delta f)$ este o mărime pozitivă pentru orice $f > 0$, se poate defini densitatea spectrului energiei cinetice specifice prin relaţia

$$\widetilde{G}_E(f) = \lim_{\Delta f \to 0} E_{x_1}(f, \Delta f)/\Delta f. \tag{16}$$

Introducînd (15) în (16) şi ţinînd seama că densitatea spectrală a procesului aleator $\{\ddot{x}_1(t)\}$ se defineşte prin relaţia

$$G_{\ddot{x}_1}(f) = \lim_{\Delta f \to 0} \sigma^2_{\ddot{x}_1}(f, \Delta f)/\Delta f, \tag{17}$$

rezultă

$$\widetilde{G}_E(f) = G_{\ddot{x}_1}(f)/4\pi^2 f. \tag{18}$$

Definind acum noţiunea de energie cinetică specifică a unei oscilaţii aleatoare $\{x_1(t)\}$ într-un domeniu de frevenţe $[f_1, f_2]$ prin relaţia

$$E_{x_1}(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} \widetilde{G}_E(f)\, df = (1/4\pi^2) \int_{f_1}^{f_2} (1/f) G_{\ddot{x}_1}(f) df, \tag{19}$$

se obţine un parametru de confort care reprezintă o extindere la vibraţii aleatoare a energiei cinetice specifice a oscilaţiilor armonice. De asemenea, se poate considera ca parametru de confort şi valoarea ponderată a energiei cinetice specifice, dată de relaţia

$$[E_{x_1}(f_1, f_2)]_p = (1/4\pi^2) \int_{f_1}^{f_2} (p(f)/f) G_{\ddot{x}_1}(f)\, df. \tag{20}$$

Se observă că operaţiile (19) şi (20) revin la filtrări ale acceleraţiei verticale cu filtre a căror factori de amplificare sînt, respectiv, $1/f$ şi $p(f)/f$, în gama de frecvenţe $[f_1, f_2]$.

Trebuie menţionat, că toţi parametrii de confort definiţi mai sus pot fi determinaţi cunoscînd numai densitatea spectrală $G_{\ddot{x}_1}(f)$ a acceleraţiei verticale a masei suspendate a automobilului.

Parametrii pentru aprecierea aderenţei roată-sol. Pentru caracterizarea obiectivă a aderenţei roată-sol majoritatea autorilor [8], [10—12], consideră ca mărime de bază forţa dinamică F care acţionează asupra masei nesuspendate a automobilului. Referindu-ne la modelul din figura 2, această forţă poate fi exprimată în două moduri :

$$F = -[k_2(x_2 - x_0) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_0)], \tag{21}$$

$$F = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2, \tag{22}$$

aşa cum rezultă imediat din ecuaţiile de mişcare ale sistemului [12].

Notînd cu F_s forţa statică ce acţionează asupra masei nesuspendate (greutatea masei suspendate la care se adaugă greutatea masei nesuspendate şi greutatea elementelor suspensiei), forţa de contact dintre roată şi suprafaţa drumului în timpul mersului este procesul aleator $\{F_c(t)\} = F_s + \{F(t)\}$. Întrucît $\{F(t)\}$ este staţionar şi normal (cu medie nulă), rezultă că şi $\{F_c(t)\}$ este un proces aleator staţionar şi normal, a cărui medie şi dispersie sînt

$$\mu_{F_c} = F_s, \quad \sigma^2_{F_c} = \sigma^2_F. \tag{23}$$

Aderenţa pneului pe sol fiind proporţională cu sarcina portantă a roţii, variaţiile forţelor dinamice la roţi conduc la micşorarea aderenţei şi implicit la mărirea pericolului de derapaj. Intensitatea variaţiei forţelor dinamice este caracterizată de media pătratică σ^2_F, care constituie parametrul cel mai des utilizat pentru aprecierea aderenţei roată -sol [10—12].

Un alt parametru pentru aprecierea aderenţei roată-sol este frecvenţa desprinderilor roţilor de drum. Dacă pentru forţe se consideră sensul pozitiv în direcţia axei OX, desprinderile apar atunci cînd $\{F_c(t)\} > 0$. Frecvenţa acestor desprinderi poate fi caracterizată de valoarea medie N a numărului de treceri cu pantă pozitivă ale realizărilor procesului aleator $\{F_c(t)\}$ prin nivelul zero în unitatea de timp, dată de relaţia [14] :

$$N = (1/2\pi)(\sigma_{\dot{F}_c}/\sigma_{F_c}) \exp(-\mu_{F_c}/2\sigma^2_{F_c}), \tag{24}$$

unde μ_{F_c} şi σ_{F_c} se obţin din (23), iar $\sigma_{\dot{F}_c} = \sigma_{\dot{F}_c}$.

Un al treilea parametru pentru aprecierea aderenţei roată-sol se poate defini ca media valorilor maxime absolute ale procesului aleator $\{F(t)\}$ într-un anumit interval de timp T [13]. Analog cu (12), se obţine

$$M[\{F_m\}] = [\sqrt{2\ln\mu(T)} + \gamma/\sqrt{2\ln\mu(T)}]\,\sigma_F, \tag{24}$$

unde

$$\{F_m\} = \sup_{t\in[0,T]} |\{F(T)\}|, \quad \mu(T) = \sigma_{\dot{F}} T/2\pi\sigma_F. \tag{26}$$

Din punct de vedere practic, mediile pătratice σ_F^2 și $\sigma_{\dot{F}}^2$, care intervin în expresiile parametrilor de aderență se pot exprima prin relațiile aproximative

$$\sigma_F^2 \simeq m_1^2\sigma_{\ddot{x}_1}^2 + m_2^2\sigma_{\ddot{x}_2}^2, \quad \sigma_{\dot{F}}^2 \simeq m_1^2\sigma_{\dddot{x}_1}^2 + m_2^2\sigma_{\dddot{x}_2}^2, \tag{27}$$

care rezultă din (22) considerînd că oscilațiile caroseriei și roților sînt statistic necorelate [12]. Prin urmare, toți parametrii pentru aprecierea aderenței roată-sol, definiți mai sus, pot fi determinați cunoscînd numai densitățile spectrale ale accelerațiilor verticale ale maselor suspendate și nesuspendate ale automobilului.

3. OPTIMIZAREA SUSPENSIILOR DE AUTOMOBILE ÎN RAPORT CU CRITERII DE CONFORT ȘI ADERENȚĂ ROATĂ-SOL

Una din problemele cele mai importante care stau în fața constructorilor de automobile constă în alegerea caracteristicilor de rigiditate și amortizare ale suspensiei astfel încît să fie satisfăcute cerințele de confort și aderență roată-sol. Aceasta este o problemă de optimizare impunînd condiții de minim pentru parametrii de apreciere a confortului și aderenței roată-sol precizați în §2. Practic, satifacerea simultană a condițiilor de minim pentru parametri de confort și aderență este imposibilă, ceea ce impune alegerea acelor caracteristici elastice și disipative care realizează un compromis optim între cerințele de confort și aderență [10—13]. Pentru automobile echipate cu suspensii convenționale (fără elemente reglabile sau active) satisfacerea condițiilor de optim pentru toate tipurile de drumuri și diferite încărcări și viteze de deplasare este, de asemenea, practic imposibilă. Din această cauză la optimizarea suspensiilor se iau în considerare cele mai probabile condiții de exploatare pentru tipul de automobil proiectat [9]. Abordarea problemei de optimizare se face de obicei pe sistemul oscilant cu două grade de libertate avînd caracteristici elastice și disipative liniare (vezi fig. 2). Problema optimizării suspensiilor cu caracteristici neliniare se reduce la cazul liniar prin utilizarea unor metode de echivalare statistică [9].

În practica construcției de automobile alegerea caracteristicilor de rigiditate se face în primul rînd pe baza unor considerente funcționale și constructive, ca, de exemplu, realizarea unei frecvențe proprii a masei suspendate de aproximativ 1—2 Hz, menținerea gardei la sol cu creșterea sarcinii utile și a săgeților dinamice în limite ce nu afectează stabilitatea automobilului. Astfel, problema optimizării suspensiilor revine, în principal la alegerea coeficientului ζ de amortizare relativă definit prin relația

$$\zeta = c_1/2\sqrt{k_1 m_1}, \tag{28}$$

astfel încît să fie satisfăcute condițiile de minim absolut

$$P_C(\zeta) = \min, P_A(\zeta) = \min, \tag{29}$$

unde prin $P_C(\zeta)$ și $P_A(\zeta)$ s-au notat generic parametrii de confort și aderență precizați în §2.

Pentru suspensiile de automobile, ζ se găsește în intervalul [0,1; 0,9], valorile $0{,}15 \leqslant \zeta \leqslant 0{,}35$ întîlnindu-se la majoritatea tipurilor de automobile [1]. Funcţiile $P_C(\zeta)$ și $P_A(\zeta)$ fiind continue și intervalul de variaţie a lui ζ fiind compact, există întotdeauna cel puţin două valori ζ_C^0 și ζ_A^0 astfel încît pentru o anumită categorie de drum și viteză de deplasare să fie satisfăcute condiţiile

$$P_C(\zeta_C^0) = P_C^0 = \inf_{\zeta \in [0,1;0,9]} P_C(\zeta), \quad P_A(\zeta_A^0) = P_A^0 = \inf_{\zeta \in [0,1;0,9]} P_A(\zeta). \tag{30}$$

Calculele numerice și determinările experimentale au pus în evidenţă atît unicitatea valorilor ζ_C^0 și ζ_A^0, cît și faptul că valoarea optimă pentru confort ζ_C^0 este mai mică decît valoarea optimă pentru aderenţă ζ_A^0 [10—13].

Pentru formularea unui criteriu obiectiv de optimizare prin care să se realizeze un anumit compromis între valorile optime pentru confort și aderenţă ale coeficientului de amortizare relativă ζ, se introduce funcţia de optimizare [13]:

$$\mathcal{F}(\zeta) = \alpha P_C(\zeta)/P_C^0 + (1 - \alpha)\, P_A(\zeta)/P_A^0 . \tag{31}$$

unde α este un factor pondere ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) a cărui mărime se stabilește în funcţie de tipul automobilului. Astfel, pentru automobilele destinate transportului de pasageri se poate acorda o pondere mai mare confortului ($\alpha \geqslant 0{,}5$) în timp ce pentru automobilele destinate competiţiilor sportive ponderea cea mai mare trebuie să revină aderenţei roată-sol ($\alpha < 0{,}5$). Valoarea optimă ζ^0 a coeficientului de amortizare relativă se obţine impunînd condiţia de minim absolut

$$\mathcal{F}(\zeta) = \min. \tag{32}$$

Funcţia $\mathcal{F}(\zeta)$ fiind continuă și intervalul de variaţie a lui ζ fiind compact, există cel puţin o valoarea ζ^0 astfel încît

$$\mathcal{F}(\zeta^0) = \inf_{\zeta \in [0,1;0,9]} \mathcal{F}(\zeta). \tag{33}$$

Așa cum se va vedea din exemplele de calcul ce vor fi date în continuare, în toate cazurile analizate a rezultat o valoare optimă unică ζ^0 a coeficientului de amortizare relativă, care satisface condiţia(33). În mod evident, această valoare depinde de tipul de drum și viteza de deplasare pentru care se calculează funcţia de optimizare $\mathcal{F}(\zeta)$ dată de (31). Dacă $\zeta_i^0\,(v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ reprezintă valorile optime ale coeficientului de amortizare relativă a suspensiei unui automobil pentru n tipuri de drumuri parcurse cu vitezele cele mai probabile v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, iar p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sînt ponderile pe care drumurile respective le au în exploatarea automobilului considerat, se poate determina un coeficient de amortizare relativă a suspensiei pe baza prognozei de exploatare a automobilului, conform formulei [9]:

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} p_i \zeta_i^0(v_i), \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{34}$$

4. EXEMPLE DE CALCUL. CONCLUZII

Se consideră sistemul oscilant al suspensiei faţă a autoturismului Dacia 1300 (vezi fig. 2) caracterizat de parametrii

$$m_1 = 265\,\text{kg},\ m_2 = 31{,}5\,\text{kg},\ k_1 = 1137\ \text{daN/m},\ k_2 = 16700\ \text{daN/m}. \tag{35}$$

Pentru ca proprietăţile disipative ale pneului să fie prinse într-un mod cît mai apropiat de realitate, coeficientul de amortizare c_2 a fost exprimat printr-o funcţie depinzînd de frecvenţă, utilizîndu-se formula indicată de Mitschke [8]:

$$c_2(f) = 0{,}1\, k_2/2\pi f. \tag{36}$$

Exemplificarea metodei de optimizare se face pentru drumuri asfaltate la vitezele uzuale de circulaţie ($v = 50-90$ km/h). Pentru densitatea spectrală $G_{x_0}^v(f)$ a acţiunii drumului s-a utilizat expresia indicată de PARHILOVSKI [15]:

$$G_{x_0}^v(f) = 4\sigma_{x_0}^2 \frac{av\,[(2\pi f)^2 + (a^2 + b^2)v]}{[(2\pi f)^2 - (a^2 + b^2)v^2]^2 + 4a^2v^2\,(2\pi f)^2}, \tag{37}$$

în care $\sigma_{x_0} = 0{,}012$ m, $a = 0{,}22\ \text{m}^{-1}$, $b = 0{,}44\ \text{m}^{-1}$, iar v se exprimă în m/s.

Pentru calculul funcţiei de optimizare s-a determinat variaţia în raport cu ζ a parametrilor de confort $\sigma_{\ddot{x}_1}$, $M\,[\{\ddot{x}_{1m}\}]$ şi $E_{x_1}(f_1, f_2)$ şi a parametrului de aderenţă σ_F în domeniul de frecvenţe 0—30 Hz. Rezultatele obţinute sînt reprezentate în figurile 3—6.

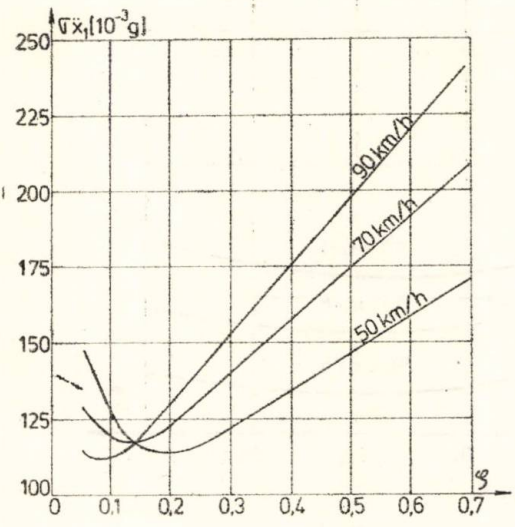


Fig. 3

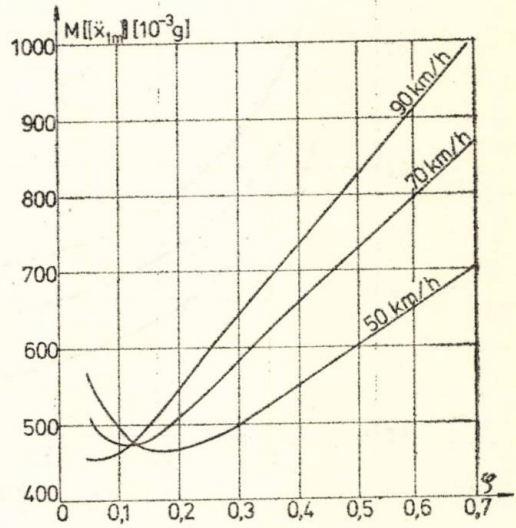


Fig. 4

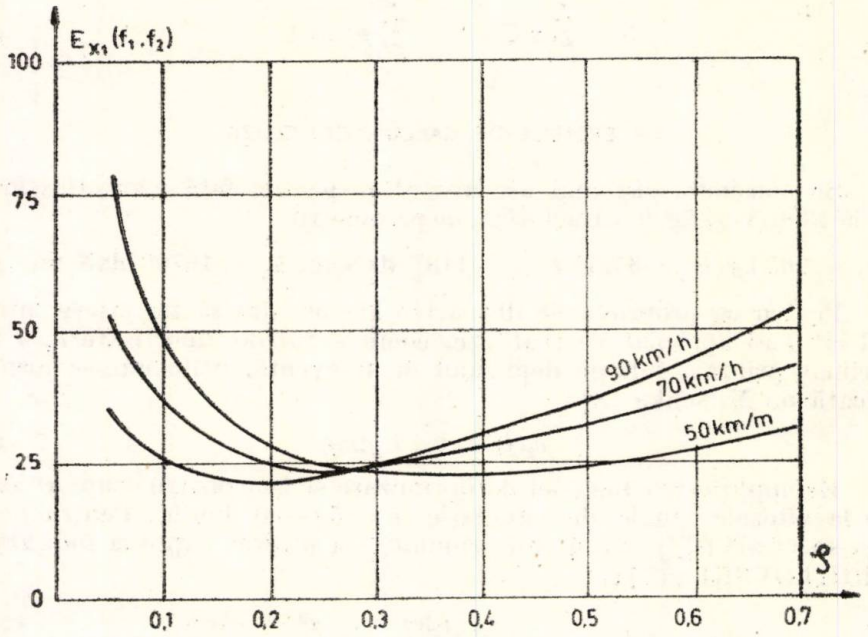


Fig. 5

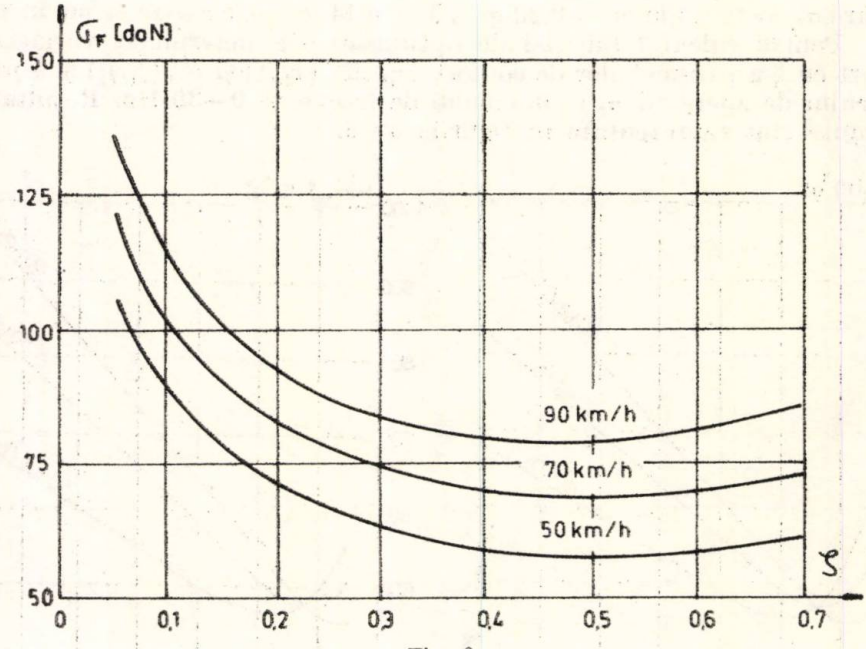


Fig. 6

Din figurile 3—6 se desprind următoarele cncluzii :

— valorile ζ_C^0 și ζ_A^0 care minimizează parametrii de confort și aderență consideraţi sînt unice în toate cazurile analizate ;

— valorile lui ζ care optimizează confortul (0,1—0,35) sînt mai mici decît cele care optimizează aderenţa (0,45 — 0,55);

— valorile lui ζ care minimizează parametrii de confort $\sigma_{\ddot{x}_1}$ şi

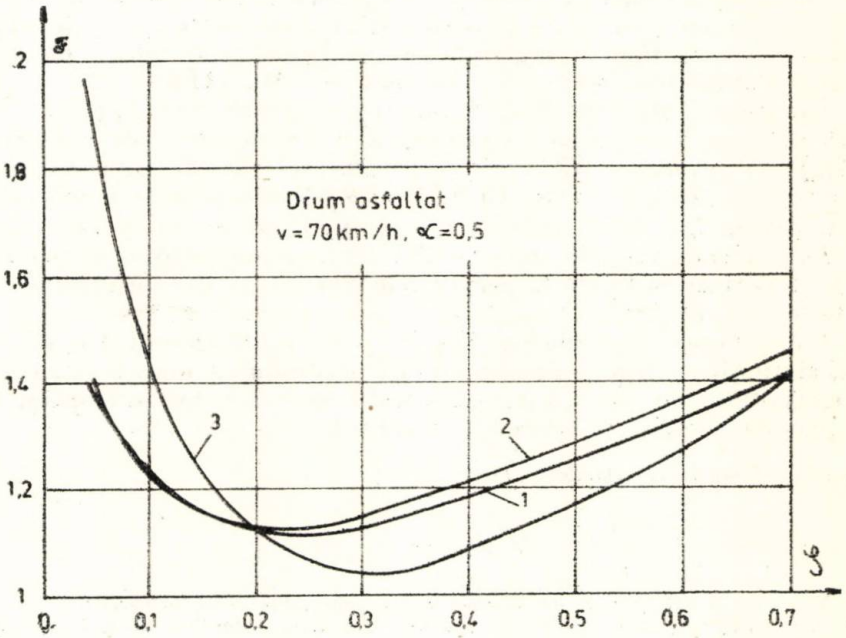


Fig. 7

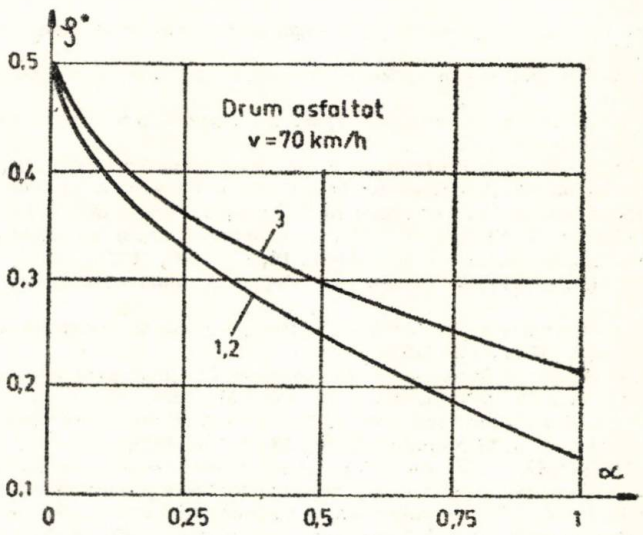


Fig. 8

$M[\{\ddot{x}_{1m}\}]$ sînt practic aceleaşi (0,1—0,2) fiind mai mici decît cele care minimizează parametrul $(E(f_1, f_2)$ (0,25 — 0,35);

— pentru $\zeta > 0{,}3$ variația parametrului de aderență σ_F în raport cu ζ este practic neglijabilă ($< 6\%$);

— valorile ζ_C^0 sînt funcții descrescătoare de viteza de deplasare a automobilului, în timp ce valorile ζ_A^0 sînt practic independente de aceasta;

Trebuie menționat că experimentările efectuate pe autovehicule echipate cu amortizoare reglabile au confirmat din punct de vedere practic valabilitatea concluziilor de mai sus [9], [11].

În figura 7 sînt reprezentate funcțiile de optimizare $\mathcal{F}_i(\zeta)$ $i = 1, 2, 3$, calculate cu formula (31) corespunzător parametrilor de confort $\sigma_{\ddot{x}_1}$, $M[\{\ddot{x}_{1m}\}]$ și respectiv, $E(f_1, f_2)$ și parametrul de aderență σ_F pentru $\alpha = 0{,}5$ și $v = 70$ km/h. Curbele $\mathcal{F}_1(\zeta)$ și $\mathcal{F}_2(\zeta)$ sînt practic identice avînd minim pentru $\zeta = 0{,}25$, iar curba $\mathcal{F}_3(\zeta)$ prezintă un minim la $\zeta = 0{,}3$.

Dependența valorilor optime ζ^0 în funcție de factorul de pondere α este reprezentată în figura 8, pentru cele trei funcții de optimizare considerate și $v = 70$ km/h.

Cunoașterea diagramelor $\zeta^0(\alpha, v)$ pentru un anumit tip de automobil și diferite categorii de drumuri dă posibilitatea determinării rapide a coeficientului de amortizare care realizează compromisul optim între cerințele de confort și aderență roată-sol.

Primită la redacție la 27 octombrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. R. V. ROTENBERG, *Podveska avtomobilia*, Mașinostroenie, Moskva, 1972.
2. R. J. STEFFENS, *Some aspects of structural vibration*, Vibration in civil engineering, Buttterworth, London, 1966.
3. D. DIECKMANN, *A study of the influence of vibration on man*, Ergonomics, **1**, *4*, p. 347 (1958).
4. W. ZELLER, *Units of measurement for strength and sensitivity of vibrations*, ATZ, **51**, *95*, (1949).
5. H. W. KOCH, *Determining the effects of vibration in buildings*, V.D.I.Z., **95**, *21*, 744 (1953).
6. * * * *Guide fot the evaluation of human exposure to whole body vibration*, ISO International standard 2631—1974 (E).
7. G. R. ALLEN, *Evaluation of exposure to whole-body vibration below 1Hz*, V. K. Group Meeting on Human Response to Vibration, University of Southampton, 1975.
8. M. MITSCHKE, *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Springer Verlag, Berlin, 1972
9. T. SIRETEANU, F. DINCĂ, I. RUGINĂ, *Optimum damping in automobile suspensions*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **19**, *4*, p. 793, (1974).
10. H.J. BRUNS, R. RONITZ, *Optimizing ride comfort*, Automobile Eng., **61**, *3*, 26, *4*, 4. (1971)
11. F. DINCĂ ș.a., *Optimizarea confortului și aderenței roată-sol pentru automobile*, St. cerc. mec. apl., **37**, *2*, 241, (1978).
12. S. PĂRĂIAN, *Aplicarea teoriei proceselor aleatoare la optimizarea suspensiilor de autovehicule*, Teză de doctorat, București, I.F.T.M., 1980.
13. T. DAHLBERG, *Ride comfort and road holding of 2—DOF vehicle travalling on a randomly profiled road*, J. of Sound and Vib., **58**, *2*, 179 (1978).
14. I. G. PARHILOVSKI, N. F. ZATEVA, *Statisticeskoe issledovania kolebanii avtomobilia na electronoi modeliruiușcei mașine*, Avtomobilnaia promișlennosti, **30**, *1*, 9, (1964).
15. I. G. PARHILOVSKI, *Spectralnaia plotnosti raspredelenia neravnostei microprofilia dorog i kolebania avtomobilia*, Avtomobilnaia promișlenosti, **27**, *10*, 25 (1961).

ASUPRA UNOR CONDIȚII DE REGIM HIDRODINAMIC LA PRELUCRAREA PRIN ELECTROEROZIUNE CU ELECTROD CONIC

de I. SPULBER

Ministerul Educației și Învățămîntului, CEPEIT

C. SPULBER

Întreprinderea Optică Română, București

În lucrare se prezintă o metodă de îmbunătățire a calității suprafețelor prelucrate cu scîntei electrice pe bază dependenței dinamice dintre caracteristicile de lucru electrice ale generatorului de impulsuri ale unei mașini de prelucrat prin electroeroziune și caracteristicile hidrodinamice ale sistemului de alimentare cu lichid dielectric.
Totodată, se propune o soluție de optimizare a parametrilor hidrodinamici, ținîndu-se seama atît de necesitățile obținerii unor abateri de formă minime ale profilului piesei de prelucrat, cît și de fidelitatea mașinii care execută prelucrarea.

Din lucrările studiate [1] se constată faptul că prelucrarea prin electroeroziune nu poate fi urmărită cantitativ decît pe baza unor relații mai mult sau mai puțin empirice datorită numărului mare de variabile aleatoare care influențează procesul de prelucrare propriu-zis. Dependența parametrilor de lucru electrici cu cei hidraulici ai dielectricului a fost urmărită mai mult printr-o supraestimare a influenței celor dintîi asupra calității suprafețelor, deși se constată existența unor legături cantitative [4] și [5].

În cele ce urmează ne vom referi la un caz particular de prelucrare și anume la prelucrarea unui profil trunconic și vom căuta să punem în evidență consecințele proiectării clasice a electrodului sculă.

Tehnologia prelucrării prin electroeroziune presupune proiectarea electrodului astfel încît cotele de profil ale acestuia să fie în strînsă concordanță cu regimul electric și cu regimul de curgere al dielectricului.

Pentru calculul diametrului D al găurii de prelucrat vom folosi relația

$$D = d + 2i, \tag{1}$$

unde d este diametrul electrodului, iar i este interstițiul tehnologic de circulație al dielectricului, adoptat în funcție de cerințele de calitate ale suprafeței de prelucrat. Astfel, D și d reprezintă dimensiunile unor lungimi și se aplică de la caz la caz și pentru alte forme de profil, în afară de cele circulare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 2, 1981, P. 297–306

La prelucrarea găurilor conice se poate folosi un electrod de profil identic, modificat dimensional ca în figura 1, iar pentru calculul acestuia vom utiliza relaţia

$$D(x)=d(x)+\frac{2i}{\cos\alpha}. \tag{2}$$

Spre deosebire de prelucrarea suprafeţelor cu generatoare paralele cu axa de simetrie, la prelucrarea clasică a suprafeţelor conice prin electroeziune apare o suprafaţă cu rugozitate neuniformă de-a lungul generatoarei datorită modificării vitezei de curgere a dielectricului în interstiţiul

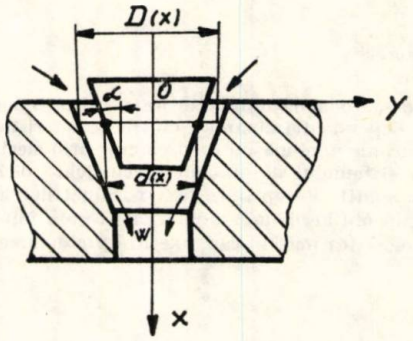


Fig. 1

tehnologic. Cu toate că regimul electric de lucru rămîne acelaşi, dar viteza de curgere a dielectricului variază în lungul axei sale aşa cum rezultă din figura 1 şi are ca efect o antrenare neuniformă a particulelor de metal topite şi dislocate din procesul prelucrării. Ca urmare, densitatea particulelor aflate în suspensie în dielectric variază în sens crescător în lungul

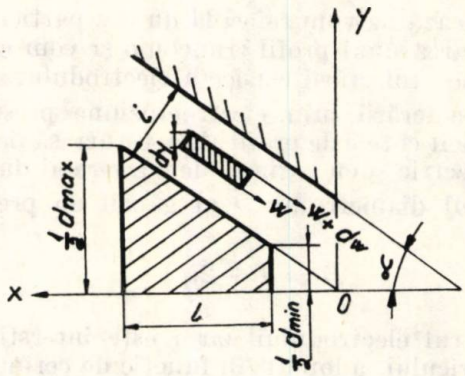


Fig. 2

axei Ox, şi în aceeaşi direcţie creşte posibilitatea de apariţie a scurtcircuitelor al căror efect se manifestă prin apariţia neregularităţilor pe suprafaţa prelucrată.

Pentru a obține o prelucrare uniformă cu suprafețe netezi vom face în așa fel ca viteza de curgere $W(x)$ a dielectricului să fie constantă, sau să aibă anumite limite în interstițiu i,

$$W(x) = \frac{4Q}{\pi} \frac{1}{\left(\mathrm{d}(x) + \frac{2i}{\cos\alpha}\right)^2 - d^2(x)} = k, \tag{3}$$

unde Q este debitul pompei folosite la recircularea dielectricului.

Se observă că viteza $W(x)$ de curgere a dielectricului este variabilă după axa Ox, deci $k \in [k_{min}, k_{max}]$.

Deoarece, Q, i și α sînt constanți, relația (3) nu poate fi adevărată decît dacă facem ca viteza dielectricului în tot intervalul orificiului prelucrat să fie constantă.

Pentru a ilustra acest lucru vom considera că electrodul sculă are o mișcare de rotație în jurul axei sale, iar viteza de curgere a dielectricului capătă forma

$$\bar{W}_r(x) = \bar{W}(x) + \bar{W}_p(x), \tag{4}$$

în care $W_p(x)$ este viteza de rotație a dielectricului obținută prin antrenarea particulelor de lichid de către electrodul sculă în mișcarea circulară. Mișcarea de rotație a dielectricului se realizează nu numai datorită rotirii electrodului sculă în jurul axei sale, ea se datorește totodată și interstițiului i care este foarte mic (cîteva sutimi de milimetru).

În cele ce urmează ne vom referi la finisarea suprafețelor prelucrate care este dealtfel ultima fază a prelucrării și care este de cea mai mare importanță.

Dacă notăm cu n_d, numărul de rotații pe minut al dielectricului folosit în procesul prelucrării $W_p(x)$ este de forma

$$W_p(x) = \pi n_d\, d(x). \tag{5}$$

Deoarece $\bar{W}_p(x)$ este normal pe $\bar{W}(x)$, relația (4) mai poate fi scrisă și în felul următor :

$$|\bar{W}_r(x)| = \sqrt{W^2(x) + W_p^2(x)}. \tag{6}$$

Dacă notăm

$$W^2(x) + W_p^2(x) = K^2, \tag{7}$$

în care K reprezintă viteza optimă tehnologică de curgere a dielectricului și ținînd seama de (3) și (5), relația (7) devine

$$\frac{Q^2 \cos^4\alpha}{\pi^2 i^2 (d^2(x)\cos^2\alpha + 2i\, d(x)\cos\alpha + i^2)} + \pi^2 n_d^2 d^2(x) = K^2. \tag{8}$$

Deoarece $i \ll d(x)$, putem neglija termeni ce conţin pe i^3, fără a face erori mari, relaţia (8) devenind

$$\frac{Q^2 \cos^2\alpha}{\pi^2 i^2 d^2(x)} + \pi^2 d^2(x)\, n_d^2 = K^2. \tag{9}$$

De aici rezultă că viteza tehnologică depinde de debitul Q, de interstiţiul i, de conicitate, de dimensiunile şi de numărul de rotaţii în jurul axei sale a electrodului sculă.

Din rezultatele obţinute în [3], cu sistemul de axe din figura 2, ecuaţia de echilibru este

$$d\left(y \frac{dW}{dy}\right) = \frac{\gamma}{\mu}\left(\sin\alpha + \frac{p_1 - p_2}{\gamma l} \cos\alpha\right) \frac{y}{\cos\alpha}\, dy, \tag{10}$$

iar dacă notăm cu

$$I = \frac{p_1 - p_2}{\gamma l_c} \cos\alpha + \sin\alpha, \tag{11}$$

în care p_1 şi p_2 sînt presiunile dielectricului din amonte şi, respectiv, din aval de electrod, şi cu

$$l_c = \frac{l}{\cos\alpha}, \tag{12}$$

în care l_c reprezintă lungimea generatoarei trunghiului de con, după efectuarea calculelor, ecuaţia (10) devine

$$W = \frac{I_g}{4\nu} y^2 + C_1 \ln y + C_2. \tag{13}$$

Considerînd că viteza la perete este nulă ($W = 0$) şi cu observaţia că y aparţine intervalului $\frac{d(x)}{2}$ şi $\frac{d(x)}{2} + \frac{i}{\cos\alpha}$, şi totodată făcînd din nou aproximaţia pe care am menţionat-o mai înainte, adică $i \ll d(x)$, se poate estima valoarea $\ln\left(1 + \frac{2i}{d\cos\alpha}\right) \cong \frac{2i}{d\cos\alpha}$ şi în aceste condiţii putem determina constantele C_1 şi C_2 din ecuaţia (13); astfel C_1 va avea expresia

$$C_1 = \frac{I_g d^2(x)}{8\nu}, \tag{14}$$

iar C_2 va fi de forma

$$C_2 = \frac{I_g d^2(x)}{16\nu}\left(2\ln\frac{d}{2} - 1\right). \tag{15}$$

Înlocuind valorile expresiilor (14) și (15) în ecuația (13) și neglijînd termeni mici, vom obține

$$W\,[d(x)] = \frac{I_g i d(x)}{4\nu\cos\alpha}. \tag{16}$$

Pentru calculul debitului Q al dielectricului vom folosi expresia bine cunoscută

$$Q = \pi \int_{d(x)}^{d(x)+\frac{2i}{\cos\alpha}} W\,[d(x)]\,dy, \tag{17}$$

iar după efectuarea calculelor obținem

$$Q \cong \pi \frac{I_g\, i^2}{4\nu\cos^2\alpha} d^2(x). \tag{18}$$

Deoarece viteza dielectricului trebuie să fie constantă de-a lungul axei electrodului sculă, aceasta înseamnă că

$$Q \cong \pi \frac{I_g\, i^2}{4\nu\cos^2\alpha}\, d^2_{min}. \tag{19}$$

Din relațiile (19) și (9) rezultă

$$\frac{6I^2 i^2 d^4_{min}}{\nu^2 d^2(x)\cos^2\alpha} + \pi^2 d^2(x)\, n_d^2 = K^2, \tag{20}$$

de aici se obține

$$n_{d_{necesar}} = \max \begin{cases} \dfrac{1}{\pi d(x)} \sqrt{K^2 - \dfrac{6I^2 i^2 d^4_{min}}{\nu^2 d^2(x)\cos^2\alpha}}, \\ \\ d(x) \in [d_{min},\, d_{max}]. \end{cases} \tag{21}$$

Pentru a pune în evidență avantajele prelucrărilor orificiilor prin electroeroziune cu electrod conic a fost nevoie să prezentăm mai întîi în figura 3, graficul prelucrărilor clasice $n_d = 0$, adică cînd dielectricul curge prin orificiul i de-a lungul generatoarelor tringhiului de con al electrodului sculă. Comparînd acest grafic cu graficul din figura 4, care reprezintă variația vitezei dielectricului a cărui mișcare este combinată, adică dielectricul mai are pe lîngă curgerea clasică și o mișcare de rotație. De aici apare și necesitatea alegerii unui număr n_d optim de rotații al dielectricului.

În relaţia (21) se pune în evidenţă numărul de rotaţii necesar $n_{d_{necesar}}$ care depinde după cum se vede de elementele geometrice ale electrodului sculă (d_{min}, d_{max}, α şi l_c).

La alegerea lui $n_{d_{necesar}}$ se are în vedere ca variaţia să fie minimă admisibilă, astfel

$$W_{rmax} - W_{rmin} \leqslant K_{max} - K_{min}. \tag{22}$$

Pe de altă parte este bine cunoscut faptul că rugozitatea piesei prelucrate depinde de ansamblul parametrilor de lucru principali I, U, p, Q, i, unde I este intensitatea curentului electric de lucru, iar U tensiunea curentului electric de descărcare. De asemenea, se impune ca debitul Q să fie, pe de o parte, cît mai mare pentru a elimina cît mai repede suspen-

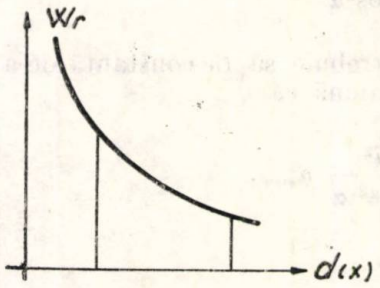


Fig 3

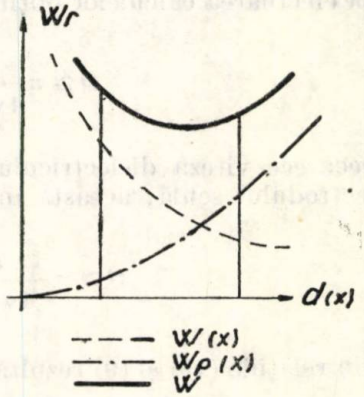


Fig 4

siile de metal topit, iar, pe de altă parte, să fie cît mai mic pentru ca scînteia în drumul ei spre piesă (catod) să cedeze cît mai puţină căldură. Totodată interstiţiul i trebuie să fie suficient de mic pentru ca scînteia să ajungă cu aproape toată cantitatea de energie la suprafaţa de erodare şi să cedeze cît mai puţină energie dielectricului pe care-l străbate.

În continuare, vom căuta să determinăm condiţiile optime de presiune şi de debit furnizate de pompa pentru dielectric. Trebuie totodată să ţinem seama de vibraţiile sistemului hidraulic al maşinii de prelucrat prin electroeroziune. Este cunoscut faptul că vibraţiile limitează atît presiunea, cît şi debitul, şi ele sînt generatoare de şocuri hidraulice care deteriorează cu timpul ansamblul mecanic al maşinii şi duc totodată la prelucrări mai puţin precise ale pieselor [2].

Pentru început vom considera lucru mecanic dat de relaţia

$$L = pQ\,, \tag{23}$$

dacă parametrii p şi Q sînt (sau pot fi făcuţi) independenţi putem considera un lucru mecanic optim

$$L_{opt} = p_{opt} \cdot Q_{opt}, \tag{24}$$

dar din observaţiile de mai sus putem admite $p_{opt} = p_{min}$ şi $Q_{opt} = Q_{min}$.

Lucru mecanic necesar înlăturării unui strat de metal topit are valoarea

$$L_i = \frac{m_i - m_{i-1}}{\tau_i} W_{im} l_i , \tag{25}$$

în care m_{i-1} este masa de metal topit la timpul τ_{i-1} și, respectiv, m_i este masa de metal topit la timpul τ_i, W_{im} este viteza medie a dielectricului în timpul τ_i, iar l_i este deplasarea masei elementare de metal topit la timpul τ_i în afara zonei de prelucrare.

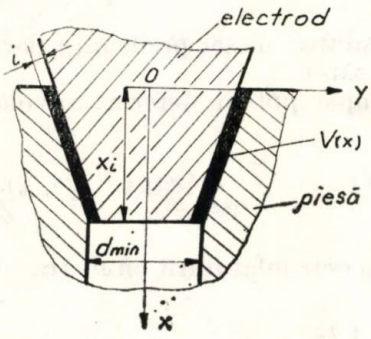


Fig 5

Menționăm că timpul τ_i corespunde momentului în care extremitatea d_{min} a electrodului se află la distanța x_i de originea O a axelor de coordonate figurate în figura 5. Analog lui τ_{i-1} îi corespunde x_{i-1}, în aceste condiții avem

$$x_i - x_{i-1} = \delta x_i < \varepsilon \tag{26}$$

cînd ε la limită tinde către zero.
Pe de altă parte, se știe din legea întîia a mecanicii că dacă se neglijează forțele de frecare avem următoarea relație :

$$m_i \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \sum F_{ext.}, \tag{27}$$

iar

$$\tau_i = \frac{W_i}{g\cos\alpha} . \tag{28}$$

Viteza medie W_{im} se calculează aplicînd cantitativ teorema medie

$$W_{im} = \frac{1}{2x_i \operatorname{tg}\alpha} \int_{d_{min}+\frac{2i}{\cos\alpha}}^{d_{min}+\frac{2i}{\cos\alpha}+2x_i\operatorname{tg}\alpha} W(y)\,\mathrm{d}y, \tag{29}$$

după integrare şi dacă ţinem seama de rezultatele din (16) neglijînd şi termeni foarte mici, se obţine

$$W_{im} = \frac{I_g i d_{max}}{4 v \cos\alpha}. \tag{30}$$

Deoarece $m_i - m_{i-1}$ reprezintă cantitatea de metal erodată la deplasarea electrodului cu δ_{xi} putem scrie

$$m_i - m_{i-1} = \rho[V(x_i) - V(x_{i-1})], \tag{31}$$

unde ρ reprezintă densitatea piesei prelucrate, iar $V(x)$ este volumul de metal erodat corespunzător.

După calcule simple putem determina volumul de metal erodat

$$V(x_i) = \frac{2\pi_i x_i}{3\cos\alpha}(x_i \operatorname{tg}\alpha + 2d_{min}). \tag{32}$$

Lucru mecanic necesar înlăturării unui strat de metal topit este

$$L_i = \frac{2\pi i g \rho}{3}(2x_i \operatorname{tg}\alpha + 2d_{min})\frac{x_i}{2}\delta x_i, \tag{33}$$

iar lucru mecanic total este dat de relaţia

$$L = \frac{2\pi i g \rho}{3}\int_0^l (2x \operatorname{tg}\alpha + 2d_{min})\frac{x}{2}\,dx. \tag{34}$$

Dacă notăm $l_i = \frac{x_i}{2}$ şi efectuăm calculele, obţinem

$$L = \frac{2\pi i \gamma}{3}\left(\frac{l^3}{3}\operatorname{tg}\alpha + \frac{l^2}{2}d_{min}\right), \tag{35}$$

sau cu notaţia

$$K_p = \frac{2\pi\gamma}{3}\left(\frac{l^3}{3}\operatorname{tg}\alpha + \frac{l^2}{2}d_{min}\right), \tag{36}$$

K_p fiind o constantă care depinde de materialul prelucrat şi de parametrii geometrici ai electrodului sculă şi ai formei găurii prelucrate.

Cu această notaţie, relaţia (35) devine

$$L = K_p i, \tag{37}$$

se observă că are o variaţie liniară, reprezentată grafic în figura 6.

Avînd în vedere o optimizare a procesului de prelucrat, ilustrat și în relația (24), putem scrie

$$p_{min}\, Q_{min} = K_p^1 i, \tag{38}$$

unde

$$K_p' = \frac{M}{\Delta W}, \tag{39}$$

în care M este masa de metal erodat care poate fi calculată, iar ΔW este viteza de prelucrare de forma $\Delta W = \Delta W\,(U, l, i)$, care este dată în cartea mașinii, fiind o caracteristică a mașinii de prelucrat prin electroeroziune.

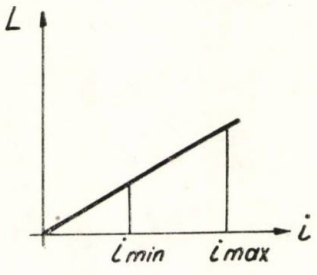


Fig. 6

Curgerea elicoidală a dielectricului în cazul prelucrării prin electroeroziune este cea mai bună; pentru aceasta trebuie să ținem seama de rezultatele obținute în [3] care recomandă turația electrodului sculă n_e necesară antrenării mișcării dielectricului

$$n_e = 2n_d.$$

CONCLUZII

1. Pentru obținerea unei suprafețe cu rugozitate uniformă trebuie să avem un electrod sculă care, pe lîngă mișcarea rectilinie de avans, să aibă și o mișcare de rotație calculată cu relația (21).

2. Calculul puterii pompei pentru recircularea dielectricului să se facă în funcție de interstițiul tehnologic și de caracteristicile principale ale întregului sistem de prelucrat pe mașini prin electroeroziune care trebuie să evite apariția unor șocuri hidraulice în sistem.

Se impune realizarea unei directe legături între sistemul de vibrație a parametrilor electrici principali (U, I) și sistemul de reglare a circuitelor hidraulice.

3. Variația constantei de prelucrare K_p necesită realizarea sistemului de alimentare cu dielectric ca sistem automat autoadoptiv.

Primită la redacție la 12 noiembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Tehnologii neconvenționale în prelucrarea metalelor*, Conferința națională de tehnologii neconvenționale și prelucrarea metalelor. Timișoara, 1971.
2. R. DORNEANU, *Prelucrarea chimică și electrochimică*, I. D.T., S.I.D. 5, București, 1975.
3. J. FLOREA ș.a., *Probleme de mecanica fluidelor*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1976.
4. G. OBACIU, *Contribuții la studiul distribuției energiei impulsului la prelucrarea electroerozivă*, Conferința națională de tehnologii neconvenționale și prelucrarea metalelor, Timișoara, 1971.
5. I. SONEA, M. MINCĂ, *Contribuții privind studiul structurii zonei superficiale de prelucrare prin electroeroziune*, Conferința națională de tehnologii neconvenționale în prelucrarea metalelor, Timișoara, 1971.

CERCETĂRI PRIVIND UTILIZAREA LAGĂRELOR SINTERIZATE CA ÎNLOCUITOARE ALE LAGĂRELOR TURNATE, ÎN CONSTRUCȚIA MOTOARELOR DE TRACTOR

de LUCIAN CĂPITANU
Institutul de fizică și tehnologia materialelor

În construcția motoarelor tractoarelor agricole și industriale românești, se utilizează actualmente, pentru confecționarea lagărelor, soluția clasică bazată pe turnarea din aliaje Cu-Sn-Zn-Pb sau Cu-Sn, soluție cu bune rezultate chimice în condiții grele de solicitare. Deoarece această soluție comportă un mare consum de material neferos, din care 30 % se pierde prin prelucrarea mecanică, s-a studiat posibilitatea utilizării unor lagăre din materiale sinterizate, feroase sau neferoase, mai ieftine și care nu necesită prelucrări mecanice ulterioare sinterizării.
Lucrarea prezintă cercetările efectuate pentru caracterizarea tribologică a lagărelor sinterizate, comparativ cu cele turnate, cercetări care au permis asimilarea a șase tipodimensiuni de lagăre sinterizate și introducerea lor în construcția motoarelor de tractoare.

1. INTRODUCERE

Aspectul esențial în construcția lagărelor sinterizate, este acela că lubrifiantul este inclus ca element structural în materialul sinterizat. Materialul lagărului asigură nu numai rezistența mecanică, ci și ungerea în timpul funcționării. De regulă lagărele autolubrifiante lucrează în regim de ungere limită, funcționarea lor fiind influențată în special de compatibilitatea perechii de materiale, care trebuie stabilită funcție de condițiile specifice de lucru : solicitări mecanice, termice, mediu ambiant, pentru preîntîmpinarea apariției uzurii de adeziune.

În condițiile ungerii limită, valorile coeficienților de frecare sînt mai ridicate, uzura nu mai este neglijabilă, iar fenomenele termoenergetice de pe suprafața de contact influențează asupra structurii materialelor cuplei de frecare și ale lubrifiantului.

Datorită complexității aspectelor tribologice ale funcționării lagărelor sintetizate, studiile aferente acestei lucrări au fost efectuate pe baza a numeroase încercări experimentale, pe o instalație de laborator, modelînd condițiile reale de funcționare ale lagărelor, cu ajutorul unor cuple de frecare experimentale.

2. MATERIALE ȘI CONDIȚII EXPERIMENTALE

I. REPER A

a. Materialul axului : 21TMC12, STAS 791-66, cementat pe adîncimea de 0,5 — 0,7 mm, călit 65—63 HRC. Duritatea miezului : 28—38 HRC.

b. Materialul lagărului :
1. CuSn6Zn4Pb4,
2. FU.E10.64,
3. FU.E8.Fe20.63.

c. Condiţii de lucru :
— $v = 0{,}576$ m/s,
— $p = 18{,}50$ daN/cm², } $pv = 10{,}656$ daNm/cm²s,
— lubrifiant : ulei T75EP1.

II. REPER B

a. Materialul axului : 40BC10, STAS 791-66, îmbunătăţit la 241—285 HB, tratat CIF la 56—60 HRC, pe adîncimea de 1,5—2,5 mm.

b. Materialul lagărului :
1. CuSn8,
2. F40.U20.60,
3. FU.E10.64.

c. Condiţii de lucru :
— oscilaţii cu $v = 0{,}257$ m/s,
— $p = 45$ daN/cm², } $pv = 11{,}56$ daNm/cm²s,
— lubrifiant : unsoare UM 175.

III. REPER C

a. Materialul axului : 18MoCN13, STAS 791-63, cementat pe adîncimea de 0,4—0,6 mm, călit şi revenit la min. 57 HRC.

b. Materialul lagărului :
1. CuSn8,
2. FU.E10.64,
3. FU.E8.Fe20.63.

c. Condiţii de lucru :
— $v = 1{,}73$ m/s,
— $p = 37{,}9$ daN/cm², } $pv = 65{,}57$ daN.m/cm²s,
— lubrifiant : ulei T75EP1.

IV. REPER D şI E

a. Materialul axului : OLC45AT, STAS 8580—76, îmbunătăţit la 241—285 HB, tratat CIF la min. 56 HRC, pe adîncimea de 1,5—2,5mm.

b. Materialul lagărului :
1. CuSn8,
2. F40.U20.60.

c. Condiţii de lucru :
— oscilaţii cu $v_2 = 0{,}257$ m/s,
— $p = 1{,}5$ daN/cm², } $pv = 0{,}385$ daNm/cm²s,
— lubrifiant : unsoare UM 175.

V. REPER F

a. Materialul lagărului : OLC45AT, STAS 8580-76, îmbunătăţit la 241—285 HB, tratat CIF la min. 56 HRC, pe adîncimea de 1,5—2,5 mm.

b. Materialul lagărului :

1. CuSn8,
2. F40.U20.60,
3. FU.E10.64.

c. Condiţii de lucru :

— oscilaţii cu $v = 0{,}257$ m/s,
— $p = 80$ daN/cm², $\Big\}$ $pv = 20{,}56$ daNm/cm²s,
— lubrifiant : unsoare UM 175.

VI. REPER G

a. Materialul axului : 40BC10, STAS 791-66, îmbunătăţit la 260—302 HB.

b. Materialul lagărului :

1. CuSn6Zn4Pb4,
2. FU.E10.64,
3. FU.E8.Fe20.63.

c. Condiţii de lucru :

— $v = 1{,}85$ m/s,
— $p = 90$ daN/cm², $\Big\}$ $pv = 166{,}5$ daNm/cm²s,
— lubrifiant : ulei T75EPI.

VII. REPER H

a. Materialul axului : 40BC10, STAS 791-66, îmbunătăţit la 260—302 HB.

b. Materialul lagărului :

1. CuSn6Zn4Pb4,
2. FU.E10.64,

c. Condiţii de lucru :

— $v = 1{,}03$ m/s,
— $p = 216$ daN/cm², $\Big\}$ $pv = 222{,}48$ daNm/cm²s,
— lubrifiant : ulei T75EPI.

VIII. REPER I

a. Materialul axului : 50VC11, STAS 791-66, îmbunătăţit la 28—32 HRC, fosfatare antigripantă.

b. Materialul lagărului :

1. CuSn8,
2. FU.E10.64,
3. FU.E8.Fe20.63.

c. Condiţii de lucru :

— $v = 2{,}68$ m/s,
— p = 74,6 daN/cm², $\Big\}$ $pv = 197{,}9$ daNm/cm²s,
— lubrifiant : ulei T75EPI.

IX. REPER J

a. Materialul axului 18MoCN13, STAS 791-66, cementat pe adîncimea de 0,6—0,8 mm, călit și revenit la min. 57 HRC, fosfatare antigripantă.

b. Materialul lagărului :

1. Bz14T,
2. FU.E10.64,
3. FU.E8.Fe20.63.

c. Condiții de lucru :

— $v = 5{,}01$ m/s,
— $p = 31{,}49$ daN/cm^2, } $pv = 157{,}765$ daNm/cm^{2}s,
— lubrifiant : ulei T75EPI.

Tabela 1

Caracteristicile lagărelor sinterizate studiate

Nr. crt.	Reper	Material	Strivire radială (daN)	Coeficient impregnare medie (%)	Porozitate medie (%)	Impregnare medie (%)	Densitate medie (g/cm^3)	Duritate medie *HB*
1	*A*	FU.E10.64	200—270	25,3	25,8	98,1	6,81	37,9
2		FU.E8.Fe20.63	360—420	25,1	25,5	98,5	6,64	49,7
3	*B*	F40.U20.60	370—390	23,7	25,3	93,5	6,21	42,2
4		FU.E10.64						
5	*C*	FU.E10.64	48— 90	25,2	25,2	98,6	6,82	26,3
6		FU.E8.Fe20.63	125—127	22,9	23,0	99,5	6,72	42,0
7	*D*	F40.U20.60	790—850	18,7	20,9	90,0	6,59	36,8
8	*E*	F40.U20.60	790—850	18,7	20,9	90,0	6,59	36,8
9	*F*	F40.U20.60	880—920	17,8	19,7	90,5	6,65	36,5
10		FU.E10.64						
11	*G*	FU.E10.64	410—530	25,5	25,7	99,2	6,81	25,2
12		FU.E8.Fe20.63	610—930	23,6	23,7	99,5	6,72	43,8
13	*H*	FU.E10.64	1200—1590	26,8	28,2	91,4	6,66	33,0
14	*I*	FU.E10.64	44—62	24,1	25,3	95,8	6,85	25,7
15		FU.E8.Fe20.63	53—71	28,5	23,2	97,0	6,74	33,1
16	*J*	FU.E10.64	1730—2080	27,8	28,0	99,4	6,69	25,
17		FU.E8.Fe20.63	2440—2540	26,9	27,3	98,5	6,54	35,3

Caracteristicile lagărelor sinterizate, determinate prin analiza de laborator, sînt prezentate în tabela 1.

Pentru studiul comportării la frecare și uzare a lagărelor sinterizate, autolubrifiante, s-a utilizat o instalație experimentală a cărei schemă funcțională este prezentată în figura 1. Cupla de frecare este formată din doi cilindri concentrici, cel exterior (3), fix, montat într-o colivie (4), fiind

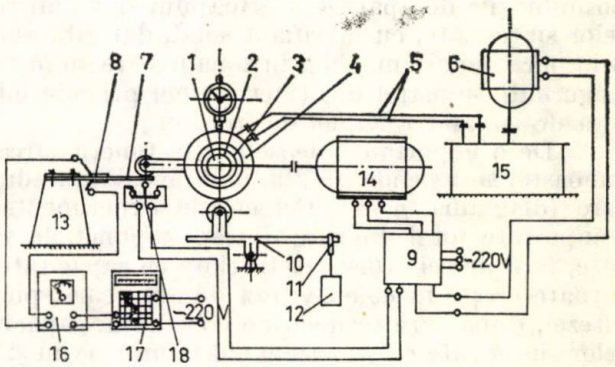


Fig. 1. — Schema funcțională a instalației pentru studiul comportării tribologice a lagărelor sinterizate.

confecționat din materialul sinterizat investigat, iar cilindrul interior (2), fixat pe axul de antrenare (1), fiind confecționat din materialul axului lagărului studiat. Temperatura cilindrului exterior și a axului poate fi reglată cu ajutorul a două circuite de răcire (5).

Încărcarea cuplei de frecare se realizează cu ajutorul unui dispozitiv cu pîrghie (10, 11, 12).

Măsurarea eforturilor tangențiale se realizează tensometric, cu ajutorul lamei elastice (7), traductoarele tensometrice (8), punții tensometrice (16) și potențiometrului înregistrator (17).

Pentru a preveni deteriorarea cuplei de frecare și a instalației, în cazul apariției gripajului, s-a prevăzut un releu limitator (18), care comandă oprirea motorului instalației.

Uzura lagărului sinterizat se măsoară cu ajutorul unui micrometru cu cadran. Instalația poate funcționa un timp îndelungat, fiind însă necesară o ușoară accelerare a procesului de uzare, la produse *pv* normale (2—8). Accelerarea trebuie făcută cu deosebită grijă, pentru a avea condiții de lucru asemănătoare celor reale și a obține rezultate concludente pentru practica industrială.

3. ASPECTE ȘI CONSIDERAȚII TRIBOLOGICE

Cercetările efectuate pentru evidențierea posibilităților de utilizare a lubrifianților lichizi sau solizi, sub formă de componenți structurali ai materialelor sinterizate pentru lagăre, au arătat că grafitul și MoS_2 sînt incompatibile cu materialele feroase sinterizate, ele reacționînd cu fierul la temperatura de sinterizare. Grafitul și bisulfura de molibden conduc însă la rezultate foarte bune în cazul utilizării lor ca lubrifianți solizi în cazul bronzurilor sinterizate.

Pentru lagărele pe bază de fier sinterizat, se poate utiliza nitrura de bor, ca lubrifiant solid, aceasta fiind inertă față de matricea de fier și stabilă la temperaturi ridicate, în atmosferă reducătoare. Nitrura de bor se poate utiliza pînă la o concentrație de 2 %, concentrații mai mari putînd îngreuna procesul de sinterizare, înrăutăți funcționarea lagărelor și scădea rezistența lor mecanică.

În cazul lagărelor sinterizate poroase, cu lubrifiant lichid impregnat, posibilitățile de apariție a gripajului sînt mai reduse decît în cazul lagărelor sinterizate, cu lubrifiant solid, datorită autoaccelerării ieșirii uleiului prin porii metalului, chiar în zona în care au fost atinse temperaturi critice, asigurîndu-se astfel menținerea unei pelicule lubrifiante subțiri, la suprafața de contact a cuplei de frecare.

De o importanță deosebită în funcționarea lagărelor sinterizate este cunoașterea dependenței fluxului de căldură admisibil, de viteza de alunecare (diagrama $p-v$). Cercetările experimentale efectuate au arătat o comportare total diferită, din acest punct de vedere, a lagărelor sinterizate, față de cele turnate. În timp ce capacitatea de încărcare a lagărelor turnate crește încet cu viteza de alunecare, pînă la o anumită valoare a vitezei, după care se menține constantă, capacitatea de încărcare a lagărelor sinterizate crește, ajungînd la un maxim și apoi scade, putînd ajunge chiar la valori mai scăzute decît cele inițiale (fig. 2). Din acest punct de

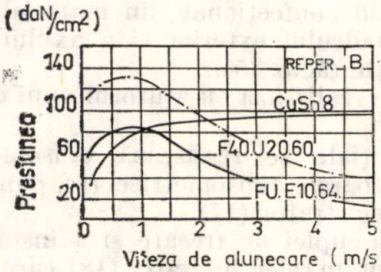


Fig. 2. — Diagrama pv pentru diferite lagăre din materiale sinterizate și pentru un lagăr turnat.

vedere bronzul sinterizat se comportă mai bine decît fierul sinterizat, ceea ce explică utilizarea pe scară mai mare a lagărelor pe bază de aliaje de cupru sinterizat, comparativ cu cele pe bază de aliaje din fier sinterizat. Cu toate acestea, din motive economice, în prezent se urmărește extinderea utilizării lagărelor pe bază de fier sinterizat.

Lagărele sinterizate, autolubrifiante, prezintă probleme deosebit de grele din punct de vedere al răcirii, răcire care se face prin transmisie și radiație, spre deosebire de lagărele turnate care sînt prevăzute cu ungere exterioară și la care agentul lubrifiant este și agent de răcire.

Cercetările experimentale efectuate au arătat că la viteze mici de funcționare, lagărele turnate favorizează apariția fenomenului de alunecare cu intermitență (stick-slip). Acest fenomen se atenuează sau chiar dispare, în cazul lagărelor sinterizate impregnate, datorită efectului autolubrifierii. Acest efect se poate determina prin măsurarea și raportarea coeficienților de frecare statici (μ_{as}) și cinetici (μ_{ak}). Stick-slipul dispare la valori $\mu_{as}/\mu_{ak}<1$. După cum rezultă din figura 3, lagărele sinterizate pe bază de bronz au o comportare mai bună la stick-slip, decît lagărele sinterizate pe bază de fier.

Un aspect relevat în cursul cercetărilor este scăderea în timp a proprietăților lubrifiante ale lagărelor sinterizate impregnate, prin scăderea grosimii peliculei de lubrifiant, creșterea coeficientului de frecare și a uzurii, ca urmare a închiderii porilor de către impurități și particule de uzură, precum și a adeziunii puternice a lubrifiantului pe pereții porilor.

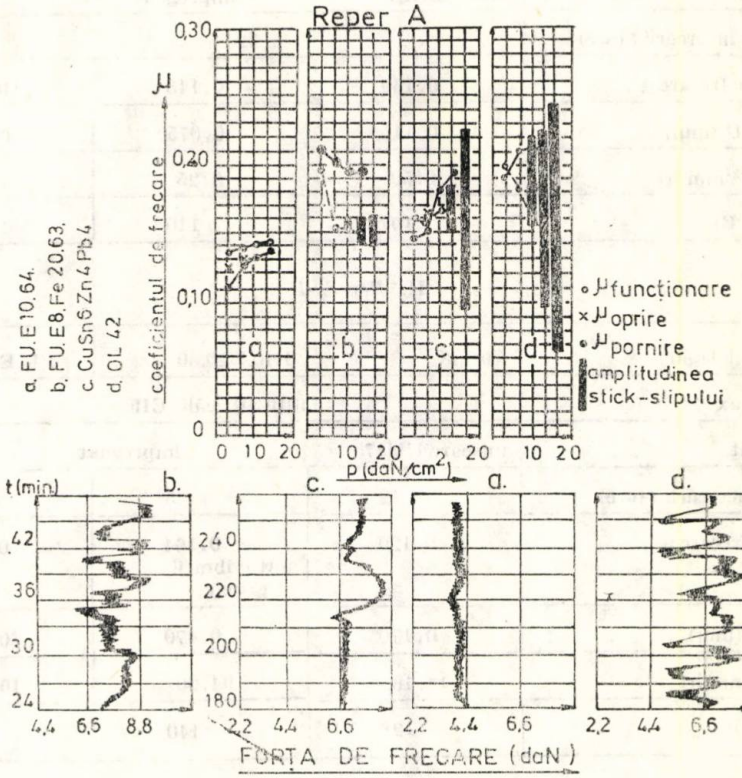


Fig. 3. — Variația coeficienților de frecare în funcție de încărcare, timp și natura materialului lagărului.

Studiile efectuate au arătat că pentru lagărele sinterizate impregnate cu lubrifianți lichizi, măsurarea coeficienților de frecare are o importanță mai mică, aceștia caracterizînd în mică măsură calitățile autolubrifiante ale lagărului. Măsurarea coeficienților de frecare este importantă doar în condiții de funcționare favorabile stick-slipului și pentru determinarea sarcinii de gripare a lagărului.

4. REZULTATE EXPERIMENTALE

Studiile experimentale efectuate asupra lagărelor sinterizate au arătat că :

— lagărele turnate prezintă în general variații foarte mici de timp, a coeficientului de frecare. Datorită ungerii exterioare și transferului

I. *Reper A*

Material lagăr	CuSn6Zn4Pb4	FU.E10.64	FU.E8.Fe20.63
Material ax	21TMC.12 cementrat		
Lubrifiant	ulei T75EP1	impregnat	
Durata încercării t (ore)	12		
Coef. de frecare μ	0,160	0,148	0,159
Uzură U (mm)	0,115	0,075	0,094
$V_U(10^{-3}$ mm/h)	9,50	6,25	7,83
T_{max} (°C)	107	110	115

II. *Reper B*

Material lagăr	CuSn8	F40.U20.60	FU.E10.64
Material ax	40BC10, călit CIF		
Lubrifiant	unsoare UM175	impregnat	
Durata încercării t (ore)	12	5	12
Coef. de frecare μ	0,120	0,164 autovibrații, gripaj	0,142
Uzură U (mm)	0,170	0,470	0,128
$V_U(10^{-3}$ mm/h)	14,16	94,00	10,67
T_{max} (°C)	128	140	126

III. *Reper C*

Material lagăr	CuSn8	FU.E10.64	FU.E8.Fe20.63
Material ax	18MoCN13 cementrat		
Lubrifiant	T75EPI	impregnat	
Durată încercării t (ore)	12		0,25
Coef. de frecare μ	0,146	0,110	0,170 gripaj
Uzură U (mm)	0,190	0,200	0,025
$V_U(10^{-3}$ mm/h)	15,83	16,67	100,0
T_{max} (°C)	140	143	155

IV. *Reper D și E*

Material lagăr	CuSn8	F40.U20.60
Material arbore	OLC45AT, călit CIF	
Lubrifiant	UM175	impregnat
Durata încercării t (ore)	10	
Coef. de frecare μ	0,150	0,172
Uzură U (mm)	0,149	0,141
$V_U(10^{-3}$ mm/h)	14,90	14,10
T_{max}(°C)	110	90

V. *Reper F*

Material lagăr	CuSn8	F40.U20.60	FU.E10.64
Material ax	OLC45AT, călit CIF		
Lubrifiant	UM175	impregnat	
Durata încercării t (ore)	10	8	
Coef. de frecare μ	0,112	0,118	0,097
Uzură U (mm)	0,135	0,134	0,103
$V_U(10^{-3}$mm/h)	13,50	16,75	12,90
T_{max}(°C)	120	135	120

lesnicios al căldurii, nu apar fenomene vibratorii, gripaj sau alte fenomene cu efecte negative asupra funcționării lagărelor;

— la valori ale produsului $(pv) > 18$, lagărele sinterizate studiate, prezintă frecvent fenomene vibratorii intense, tendințe de gripaj și chiar gripaj, datorită următoarelor cauze principale:

— astuparea porilor, ca urmare a adeziunii particulelor de uzură formate;

— insuficiența debitului de ulei eliberat de materialul sinterizat, în condiții de solicitări ridicate;

— scăderea vîscozității lubrifiantului ca urmare a creșterii temperaturii și acumulării căldurii, avînd ca urmare o scădere a capacității portante a peliculei de lubrifiant.

Lagărele sinterizate prezintă o slabă reproductibilitate a comportării la frecare și chiar la uzare. Explicația acestei observații poate consta în porozitatea diferită a lor și impregnarea neegală.

În cele ce urmează sînt prezentate rezultatele experimentale referitoare la reperele a căror asimilare a fost recomandată.

Studiile experimentale efectuate au arătat că:

— vitezele de uzare prezintă o dependență evidentă de produsul pv;

— după o perioadă de rodaj, caracterizată printr-o viteză de uzare ridicată, aceasta se stabilizează pentru o anumită perioadă, după care uzura capătă un caracter sever;

— uzura nu se repartizează uniform pe suprafața lagărului. Valoarea maximă a uzurii se înregistrează în zona de acțiune a sarcinii radiale.

— Lagărele confecționate din materiale sinterizate, prezintă în general viteze de uzare superioare celor ale lagărelor turnate. Lagărele sinterizate neferoase prezintă capacități de încărcare mai mari decît lagărele sinterizate feroase. Creșterea produsului pv face ca durata perioadei de uzură stabilizată să scadă pînă la totala sa dispariție, la $pv = 18 - 20$.

Pe baza rezultatelor experimentale obținute în cursul cercetărilor, pentru înlocuirea lagărelor turnate corespunzătoare în construcția motoarelor tractoarelor agricole și industriale românești s-au indicat și s-au asimilat șase lagăre sinterizate, după cum urmează :

Reper A : FU.E10.64 în loc de CuSn6Zn4.Pb4.
Reper B : FU.E10.64 în loc de CuSn8.
Reper C : FU.E10.64 în loc de CuSn8.
Reper D : F40.U20.60 în loc de CuSn8.
Reper E : F40.U20.60 în loc de CuSn8.
Reper F : FU.E10.64 în loc de CuSn8.

Primită la redacție la 10 noiembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. A. JENKIS, *Powder metal based friction material*, Powder Met., **24**, *12* (1969).
2. V. T. MORGAN, *Porous metal bearings*, Powder Met., **24**, *11* (1969).
3. D. PAVELESCU, B. DIMITROV, *Quelques aspects de la tribologie de certaines matériaux sintérisés pour paliers*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. Appl., **18**, *1* (1973).

RECENZIE

SANDA HANGAN, LIVIU CRAINIC, *Concepte și metode energetice în dinamica construcțiilor*, Edit. Acad. R.S.R., 1980, 360 p. cu il.

Obiectivul acestei lucrări apărută în Editura Academiei R.S. România în anul 1980, este, după cum afirmă autorii, să prezinte comportarea structurilor solicitate de acțiuni dinamice ținînd seamă că sub acțiunea acestor solicitări, corpurile ce alcătuiesc structurile suferă deformații specifice, variabile în timp.

Se impune deci determinarea răspunsului structurilor supuse unor acțiuni dinamice, problemă de mare importanță în orice lucrare inginerească.

Autorii sînt conștienți de posibilitatea abordării pur matematice a acestei probleme, ce poate fi rezolvată în principiu prin integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de mișcare.

Această metodă este exactă, bine înțeles în măsura în care ecuațiile fizice ce exprimă legătura dintre forțe și deplasări reprezintă proprietățile reale ale structurilor respective.

Autorii o consideră însă mai puțin potrivită practicii curente, optînd pentru metode energetice, cartea de față fiind o pledoarie în acest sens.

Lucrarea este organizată pe 14 capitole, primele 9 avînd un pronunțat caracter teoretic.

Se trec în revistă diferite forme de energie ca și metodele generale de calcul din mecanica analitică.

Un loc important în spațiul acestor capitole îl ocupă oscilațiile amortizate și neamortizate ale sistemelor cu un număr finit de grade de libertate, ținînd seama că acestea reprezintă modele mecanice și matematice de largă aplicabilitate pentru studiul oscilațiilor structurilor elastice.

Se insistă de asemenea asupra disipării energiei sistemelor oscilante prin deformații plastice. Oscilațiile produse de acțiuni seismice sau de explozii asupra structurilor sînt studiate atît din punct de vedere a calculării lor, cît și în ceea ce privește evaluarea avariilor.

Următoarele 5 capitole au un pronunțat caracter aplicativ și aici autorii își aduc principala lor contribuție originală în această lucrare, bazată pe experiența tehnică și didactică în acest domeniu.

Se face un studiu amănunțit asupra posibilităților de calcul energetic pentru structurile elasto-plastice cît și pentru structurile cu caracteristici oarecare de deformare solicitate de un cutremur, ținînd seama că metodele energetice pot da o imagine coerentă a degradărilor pe care le suferă acestea și pot constitui o bază pentru alcătuirea rațională a structurilor.

Ținînd seama de locul prioritar pe care îl ocupă betonul armat între materialele utilizate, capitolele 13 și 14 analizează comportarea structurilor alcătuite din beton atît la încărcare, cît și în timpul mișcărilor seismice.

Ultimul capitol este consacrat unui studiu privind interacțiunea sol-structură pentru construcțiile situate în zone seismice.

Lucrarea cuprinde aplicații numerice aflate la sfîrșitul majorității capitolelor, menite să ilustreze teoria spre o mai bună înțelegere a problemelor tratate.

Cartea este bine echilibrată pe capitole dînd impresia unui tot armonios, problematica ridicată este interesantă și modern tratată, argumentările sînt convingătoare.

Se poate spune că autorii reușesc să dovedească buna stăpînire a domeniului acoperit de această carte, izbutind totodată să aducă o netăgăduită contribuție originală.

În plus, lucrarea beneficiază de o redactare îngrijită și o frumoasă prezentare grafică, ce ușurează citirea ei.

Adresîndu-se în principal inginerilor constructori, cartea prezintă interes pentru toți cei ce lucrează în domeniul construcțiilor, constituind o reușită de netăgăduit în cadrul ultimelor apariții.

Dan Larionescu

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 2, 1981, P. 317

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 40, nr. 3 mai— iunie 1981

SUMAR

STUDII

T. OROVEANU, S. POPOVICIU, AL. D. STAN, Pierderile de gaze din reţeaua de distribuţie 321

MIRCEA V. SOARE, GH. OBLEMENCO, Structuri reticulate planare. Influenţa înălţimii structurii asupra stării de eforturi şi de deformaţii 337

D. LARIONESCU, Utilizarea metodei de aproximare a celor mai mici pătrate în probleme de sinteză a mecanismelor 363

M. BUCULEI, D. BĂGNARU, Ecuaţii de închidere pentru lanţurile cinematice ale mecanismelor cu elemente liniar elastice 369

MAGDALENA POSEA, Vibraţiile flexionale ale arborilor ţinînd seamă de deformaţiile de forfecare şi de inerţia de rotaţie 377

GHEORGHE PANAIT, Echilibraj optim în medie de primă aproximaţie a rotorului cu masă variabilă (dezechilibru variabil) 401

N. CONSTANTIN, M. BLUMENFELD, M. MUNTEANU, I. CONSTANTINESCU, Determinarea stării de tensiune într-o moară de minereu de mari dimensiuni 409

T. SIRETEANU, O. GÜNDISCH, Suspensii echipate cu amortizoare secvenţiale 425

CH. VASILIU, TR. CANŢĂ, Asupra rezistenţei la rularea roţilor cu pneuri pe căi nedeformabile 439

GHEORGHE BĂDESCU, DAN-MIHAI ŞTEFĂNESCU, Instalaţie pentru determinarea constantelor elastice ale rocilor 451

RECENZII 467

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICA APLICATĂ

PIERDERILE DE GAZE DIN REȚEAUA DE DISTRIBUȚIE

de T. OROVEANU*), S. POPOVICIU**), AL. D. STAN*)

La conductele vechi apar, din cauza coroziunii, orificii prin care se scurg cantități mari de gaze. Pe măsură ce orificiul se mărește, și debitul scurs prin acesta crește. Coeficientul de debit al unui orificiu depinde de numărul lui Reynolds și de forma orificiului. La experimentele efectuate, s-a constatat că orificiile de formă circulară au cei mai mari coeficienți de debit. Pentru mai multe orificii astupate cu nisip s-a constatat că debitele scurse prin acestea scad pe măsură ce coloana de nisip este mai mare. Pentru nisipul cu permeabilitatea mai mare, debitul de gaze scurs prin orificiul astupat a avut cele mai mari valori.

1. INTRODUCERE

În cursul exploatării conductelor de gaze apar frecvent defecte din cauza coroziunii, a neetanșeităților la îmbinări sau datorită ruperii conductelor, prin care se scurg cantități însemnate de gaze. Toate aceste defecte intervin mai frecvent la conductele vechi unde fenomenele de coroziune sînt mai accentuate decît la conductele noi. Defectele provocate de coroziune reprezintă peste 45% din total, cele datorite neetanșeităților la teurile de branșament 20%, iar defectele de la armături aproximativ 18% [2]. Orificiile care apar datorită coroziunii au în faza inițială o formă aproape circulară și pe măsură ce se măresc capătă o formă ovală.

Orificiile formate, indiferent de natura lor, sînt aproape în totalitate îngropate la adîncimea de pozare a conductei. Din această cauză, relațiile de calcul pentru orificiile libere [1, 2] sînt aplicabile numai parțial la orificiile care apar la conducte. Unele experimente efectuate la un orificiu la sol au indicat la distanțele de 0,5; 1; 1,5 și 2 m concentrațiile medii de 0,289; 0,259; 0,244 și respectiv 0,259% de gaze, valori care au fost obținute cu ajutorul detectorului. Tot la un orificiu astupat cu pămînt [2] coeficientul de debit a avut valori cuprinse între 0,265 și 0,378, cel mai mare coeficient fiind înregistrat la cel mai mare debit scurs. În regim de presiune redusă [5] (presiunea cuprinsă între 0,2 și 2 daN/cm²) coefi-

*) Institutul de petrol și gaze — Ploiești.

**) Întreprinderea de rețele și instalații pentru distribuția gazelor naturale — Tîrgu Mureș.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 3, 1981, P. 321—336

cientul de debit în funcție de debitul scurs, pentru un orificiu liber, este prezentat în figura 1. Pentru același regim de presiune, la orificiul astupat s-a obținut un coeficient de debit egal cu 0,448.

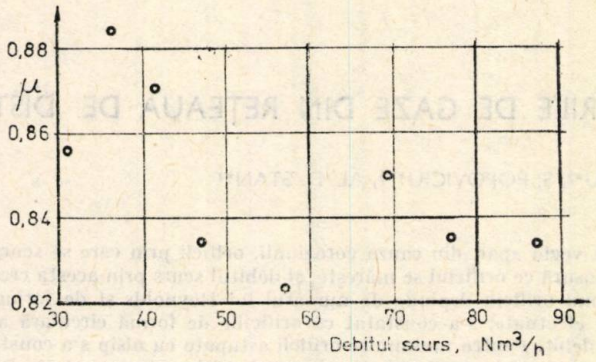


Fig. 1

2. COEFICIENTUL DE DEBIT LA ORIFICIUL LIBER. DATE EXPERIMENTALE

În scopul determinării coeficientului de debit în funcție de forma orificiului și de numărul lui Reynolds s-au construit patru orificii (foto 1) la care s-au determinat coeficienții de debit μ^*. Pentru fiecare orificiu,

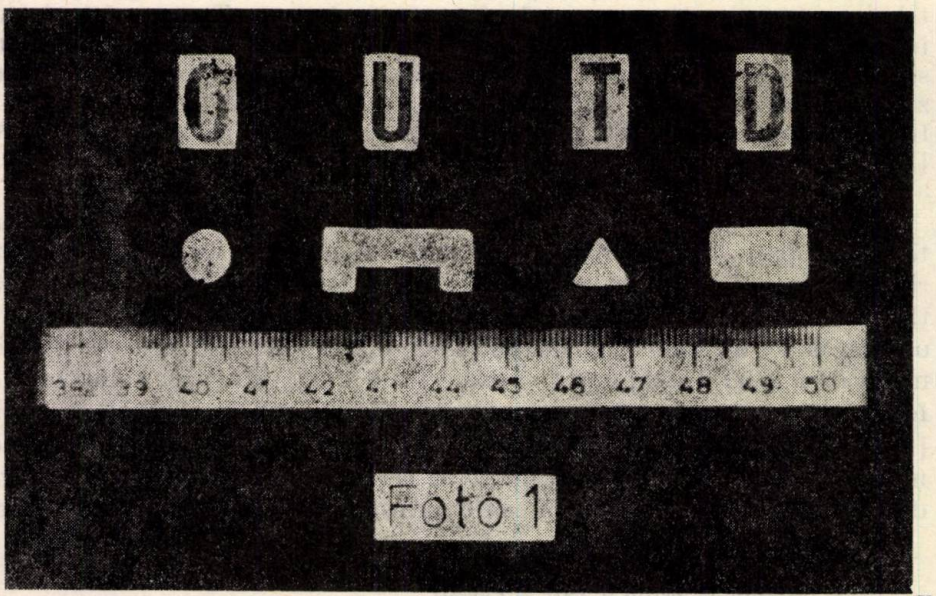


Foto 1

coeficientul de debit a fost definit ca raportul dintre debitul real scurs și debitul teoretic [4]; acesta din urmă s-a calculat ca produs între aria

secțiunii orificiului și viteza teoretică. Viteza teoretică s-a determinat cu relația lui Torricelli

$$v = \sqrt{2\,gH}, \tag{1}$$

g fiind accelerația gravitațională, iar H înălțimea coloanei de apă de la orificiu pînă la suprafața liberă.

În figura 2 sînt redați coeficienții μ^* în funcție de numărul lui Reynolds, acesta fiind calculat pentru fiecare orificiu cu relația

$$\mathcal{R}e = \frac{v_m \; 2\,R_h}{\nu}, \tag{2}$$

v_m fiind viteza medie reală de curgere a apei prin orificiu, ν — viscozitatea apei, care s-a luat pentru temperatura de 14°C, egală cu $1{,}19 \times 10^{-6}$ m²/s, iar R_h — raza hidraulică a orificiului care a fost calculată cu relația

$$R_h = \frac{2 \cdot \text{Aria orificiului}}{\text{Perimetrul orificiului}}. \tag{3}$$

Pentru cele patru orificii construite, sînt date în tabelul 1 ariile, perimetrele și razele hidraulice.

Tabelul 1

Orificiul	O	U	T	D
Aria, cm²	0,4339	0,9088	0,6859	1,2936
Perimetrul, cm	2,3352	5,7900	2,6700	4,7600
Raza hidraulică, cm	0,3716	0,3139	0,5138	0,5435

Se observă din figura 2 că cele mai mari valori ale coeficientului de debit au fost obținute la orificiul O, iar cele mai mici la orificiul D. Se constată și o ușoară variație a coeficientului de debit în funcție de numărul lui Reynolds definit cu relația (2).

Probabil că toate orificiile formate în cazurile practice sînt mai apropiate ca formă de orificiul O; orificii asemănătoare cu formele U, T sau D sînt mai puțin posibil de realizat. Totuși, au fost executate experiențe și cu celelalte trei forme (U, T și D) pentru a se arăta că geometria orificiului are o influență asupra valorii coeficientului de debit. Influența geometriei orificiului este mult mai mare asupra coeficientului de debit decît aceea a numărului lui Reynolds. Apariția unor orificii de forma O conduce așadar în cazurile practice la pierderea celor mai mari cantități de gaze datorită defectelor conductei.

La conductele cu presiuni mari, debitele de gaze pierdute sînt cele mai mari ceea ce face ca şi valorile numărului lui Reynolds să fie ridicate şi prin urmare coeficienţii de debit sînt mai mari decît la conductele cu presiuni mai mici. La conductele cu presiuni mari, debitele de gaze pierdute printr-un orificiu sînt însemnate şi datorită diferenţei mari dintre presiunea din conductă şi aceea din exterior.

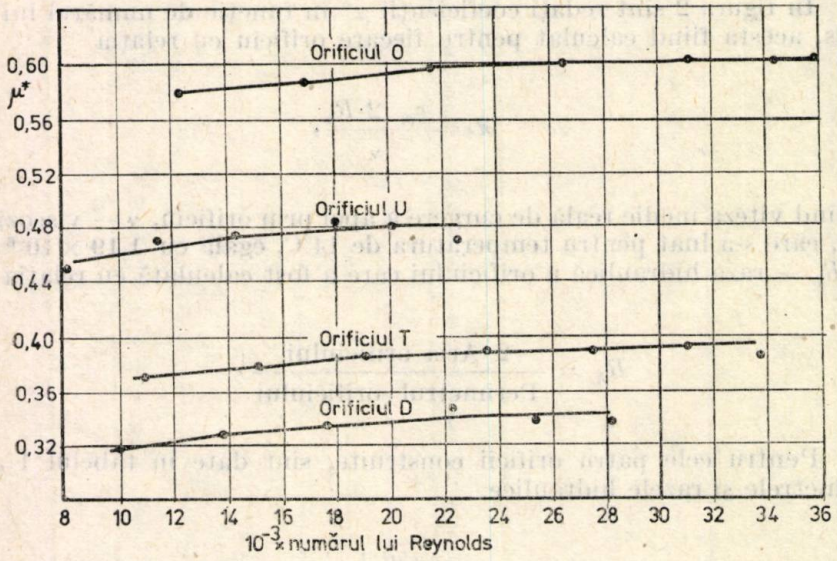


Fig. 2

În timp, orificiul apărut la o conductă, mai ales acela format prin coroziune, se măreşte ceea ce înseamnă că debitul de gaze scurs din conductă creşte pe măsura avansării gradului de coroziune.

3. MIŞCAREA GAZELOR PRIN SOLUL VEGETAL

Majoritatea orificiilor apărute la conducte sînt astupate de solul vegetal. Rar se întîmplă ca orificiul să fie liber, fapt care ar da posibilitatea să fie depistat mai repede.

Creşterea lentă a orificiului în timp şi coeziunea solului vegetal din apropierea conductei fac ca orificiul ca atare să fie considerat liber.

Viteza de scurgere a unui gaz dintr-un recipient are expresia [1, 2]

$$v = \varphi \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_c}{\rho_c} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right]} \tag{4}$$

și debitul masic care se scurge este

$$M = \mu^* f \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \rho_c p_c \left[\left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}} \right]}, \tag{5}$$

unde φ este coeficientul de viteză, $\varkappa$ coeficientul adiabatic, p_c și ρ_c presiunea, respectiv masa specifică din recipient, iar p_e și ρ_e din exteriorul acestuia, μ^* fiind coeficientul de debit, iar f aria secțiunii de curgere a orificiului.

Interpolarea liniară a lui $\varkappa$ cu temperatura a condus la obținerea cîtorva valori ale acestuia, din [3], înscrise în tabelul 2.

Tabelul 2

Temperatura, °C	−10	0	10	20	30
$\varkappa$	1,2990	1,2958	1,2927	1,2897	1,2868

Graficul debitului masic M în funcție de raportul p_e/p_c se prezintă (fig. 3) sub forma curbei marcate cu linie întreruptă în porțiunea ascendentă și cu linie plină în porțiunea descendentă.

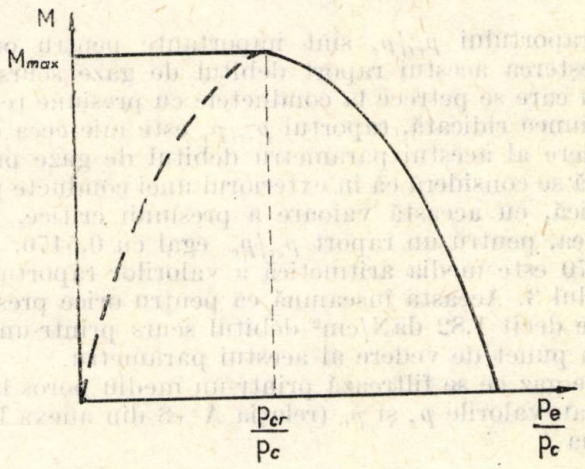


Fig. 3

Valoarea maximă a debitului se obține atunci cînd mișcarea în secțiunea orificiului este sonică, numărul lui Mach, Ma fiind egal cu unitatea pentru $\frac{p_e}{p_c} = \frac{p_{cr}}{p_c}$.

La valori $\frac{p_e}{p_c} > \frac{p_{cr}}{p_c}$, mişcarea în secţiunea contractată a jetului este subsonică ($Ma < 1$). La valori $\frac{p_e}{p_c} < \frac{p_{cr}}{p_c}$ debitul M nu urmează linia întreruptă, ci se menţine la valoarea maximă corespunzătoare la $p_e = p_{cr}$ [1], care este

$$M_{max} = \mu^* f \sqrt{\left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \rho_c p_c} \tag{6}$$

şi se realizează pentru

$$\frac{p_{cr}}{p_c} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}. \tag{7}$$

În tabelul 3 sînt prezentate valorile raportului p_{cr}/p pentru cîteva valori ale temperaturii

Tabelul 3

t, °C	−10	0	10	20	30
p_{cr}/p_c	0,5459	0,5465	0,5470	0,5476	0,5481

Valorile raportului p_{cr}/p_c sînt importante pentru orificiile libere deoarece la creşterea acestui raport debitul de gaze scurs prin orificiu se reduce, lucru care se petrece la conductele cu presiune redusă. La conductele cu presiunea ridicată, raportul p_{cr}/p_c este mic ceea ce face ca din punctul de vedere al acestui parametru debitul de gaze prin orificiu să fie maxim. Dacă se consideră că în exteriorul unei conducte presiunea este aceea atmosferică, cu această valoare a presiunii critice, presiunea din conductă ar avea, pentru un raport p_{cr}/p_c egal cu 0,5470, valoarea 1,82 daN/cm²; 0,5470 este media aritmetică a valorilor raportului p_{cr}/p_c prezentate în tabelul 3. Aceasta înseamnă că pentru orice presiune din conductă mai mare decît 1,82 daN/cm² debitul scurs printr-un orificiu liber este maxim din punct de vedere al acestui parametru.

Debitul de gaz ce se filtrează printr-un mediu poros la capetele căruia presiunile au valorile p_e şi p_0 (relaţia A—8 din anexa lucrării) poate fi pus sub forma

$$Q_0 = \frac{p_e^2 - p_0^2}{\mu \quad p_0} hC. \tag{8}$$

Această relaţie a fost obţinută în ipoteza că prin întreg mediul poros filtrarea gazelor este liniară. Pe de altă parte, se poate scrie debitul masic de gaze M scurs dintr-un rezervor sub forma dată de relaţia (5),

asimilînd conducta cu un rezervor în interiorul căruia presiunea este p_c, presiunea exterioară fiind p_e.

Debitul volumic exprimat în condiții standard are expresia

$$Q_0 = \frac{M}{\rho_c} \frac{p_c}{p_0} \frac{T_0}{T_c} \frac{z_c}{z_0}, \tag{9}$$

T_c și p_c fiind temperatura și presiunea din conductă, iar T_0 și p_0 cele standard. Factorii de abatere z_c și z_0 se referă tot la cele două stări. Se poate alege pentru $z_0 = 1$, iar z_c în funcție de presiunea din conductă p_c se calculează cu relația

$$z_c = 0{,}345 + 0{,}000196\, T_c + \left(0{,}655 - 0{,}375\, \frac{T_c}{191}\right)\left(1 - \frac{p_c}{45{,}8}\right). \tag{10}$$

Aceasta a fost dedusă prin interpolare din diagrama de variație a lui z în funcție de presiune și temperatură. Interpolarea liniară este posibilă numai pentru valori mici ale presiunii și temperaturii, ceea ce corespunde cazului studiat.

Prin egalarea celor două expresii ale lui Q_0 se găsește

$$C_1\left(\frac{p_e^2}{p_c^2} - \frac{p_0^2}{p_c^2}\right) = \frac{T_0}{T_c z_c} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{1}{\rho_c p_c}\left[\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}, \tag{11}$$

unde s-a notat

$$C_1 = \frac{k}{\mu} h \frac{C}{\mu^* f}.$$

Ecuația (11) a fost rezolvată numeric în raport cu p_e/p_c pe un calculator electronic FELIXC 256 pentru valorile

$$C_1 = 0{,}1\,;\ 1\,;\ 10\,;\ 100\,;\ 1000$$

$$\frac{p_0}{p_e} = 0{,}8608\,;\ 0{,}6886\,;\ 0{,}4132\,;\ 0{,}2295$$

și pentru temperaturile din conductă $T_c = 263\,;\ 273\,;\ 283\,;\ 293$ K la care corespund valorile lui $\varkappa$ prezentate în tabelul 2.

Calculele au fost efectuate prin încercări alegîndu-se inițial valoarea $\frac{p_e}{p_c} = \frac{1{,}033}{p_c}$ care a fost înlocuită în relația (11), iar dacă membrul stîng al acesteia nu a diferit cu mai mult de 0,0002 față de membrul drept, s-a

considerat că valoarea aleasă pentru raportul p_e/p_c este soluţia ecuaţiei; în caz contrar s-a introdus

$$\frac{p_e}{p_c} = \frac{p_e}{p_c} + 0{,}000001 \tag{12}$$

şi iteraţia a continuat pînă ce s-a îndeplinit condiţia pusă mai înainte. Iteraţia începe de fiecare dată de la valoarea raportului $1{,}033/p_c$ deoarece 1,033 daN/cm^2 este valoarea pe care o admitem pentru presiunea atmosferică şi p_e nu este mai mică decît aceasta.

Valorile considerate pentru C_1 şi p_0/p_c acoperă practic toate situaţiile întîlnite în tehnica distribuţiei gazelor. Avînd în vedere expresia lui C_1, se poate constata că cele mai mari valori ale acestuia sînt obţinute la permeabilităţi mari ale solului şi secţiuni mici ale orificiilor formate deoarece ceilalţi parametri (h, μ, μ^* şi C) care intervin în expresia lui C_1 sînt aproape constanţi.

În figura 4, se prezintă raportul p_e/p_c în funcţie de C_1 şi de presiunea din conductă, p_c. Cele mai mari valori ale acestui raport apar pentru presiunile mici din conductă. Reduceri mai mari ale acestui raport apar la valori mari ale presiunii din conductă. Creşterea raportului p_e/p_c poate apare şi datorită pierderilor mai mari de presiune care au loc la debite mari. Se observă că la valori mici ale parametrului C_1, deci şi ale permeabilităţii solului de deasupra orificiului, raportul p_e/p_c este mai mic decît la valori mari ale lui C_1. Fenomenul este datorat rezistenţei mai mari opuse de solul mai puţin permeabil faţă de unul mai permeabil la filtrarea gazelor, ceea ce face ca în apropierea conductei presiunea să fie mai apropiată de aceea din conductă.

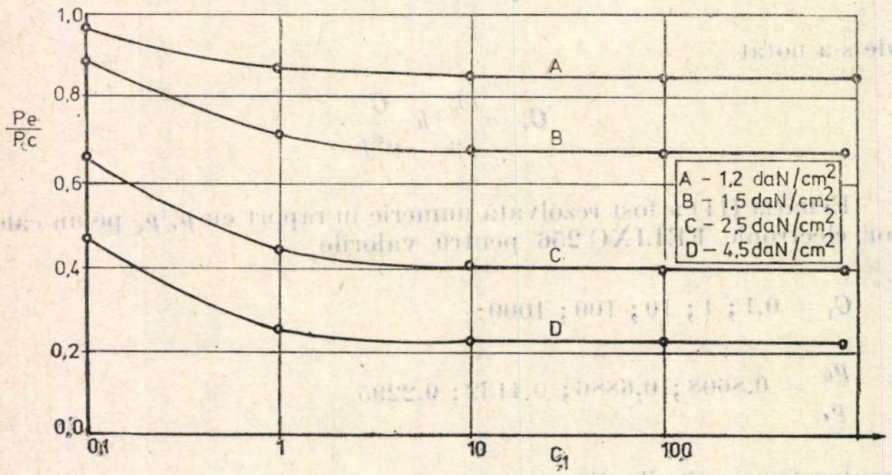


Fig. 4

Ca urmare a situaţiei semnalate, debitul scurs printr-un orificiu faţă de debitul maxim calculat cu relaţia (6), este mai mare la solurile mai permeabile unde se produce o filtrare mai uşoară. Cele mai mari debite apar la conductele cu presiunea mare.

În figura 6, se prezintă coeficientul adimensional R în funcție tot de parametrul C_1. R s-a calculat cu relația

$$R = \sqrt{\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}} \Big/ \sqrt{\left(\frac{p_0}{p_c}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_0}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}}. \qquad (13)$$

Acest coeficient reprezintă raportul dintre debitul de gaze scurs atunci cînd orificiul este astupat și debitul în cazul în care orificiul este liber.

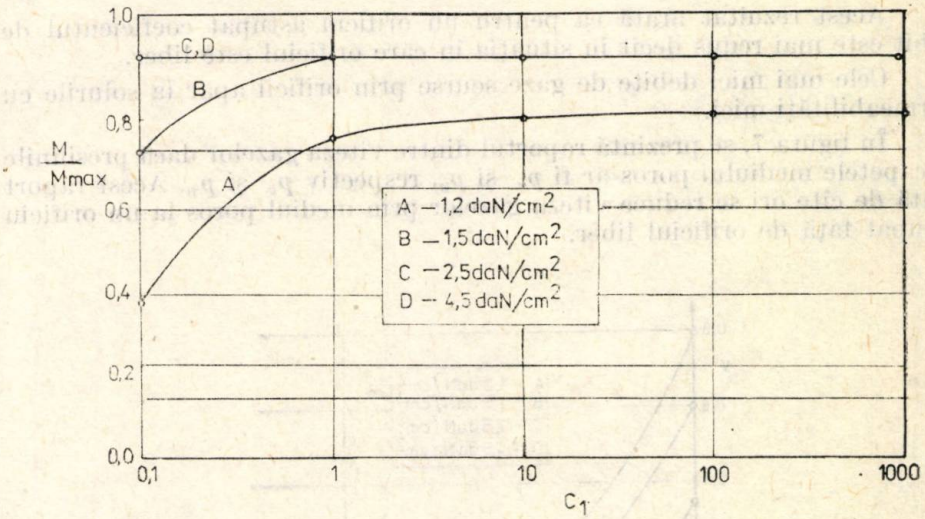


Fig. 5

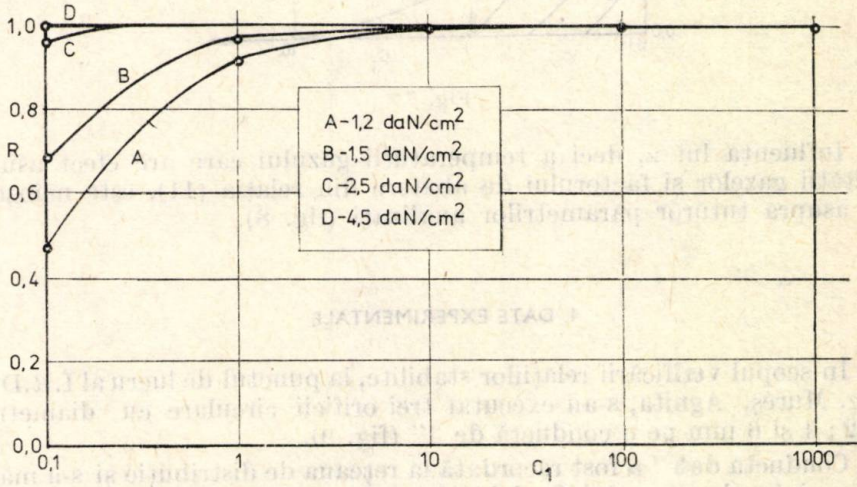


Fig. 6

În ambele situații s-a admis că produsul (μ^*f) este același. De fapt, în cele două cazuri produsul (μ^*f) este mai mic la orificul astupat deoarece la acesta coeficientul de debit este mic întrucît și numărul lui Reynolds este mai redus.

Coeficientul R depinde așa cum era de așteptat și de caracteristicile solului (k), ale gazelor (μ) și de parametrul C, care este funcție de aria prin care se filtrează la suprafața solului gazele.

Se poate admite că pentru un orificiu astupat coeficientul de debit μ_a este dat de produsul

$$\mu_a = \mu^* R. \tag{14}$$

Acest rezultat arată că pentru un orificiu astupat coeficientul de debit este mai redus decît în situația în care orificiul este liber.

Cele mai mici debite de gaze scurse prin orificii apar la solurile cu permeabilități mici.

În figura 7, se prezintă raportul dintre viteza gazelor dacă presiunile la capetele mediului poros ar fi p_e și p_0, respectiv p_e și p_0. Acest raport arată de cîte ori se reduce viteza gazelor prin mediul poros la un orificiu astupat față de orificiul liber.

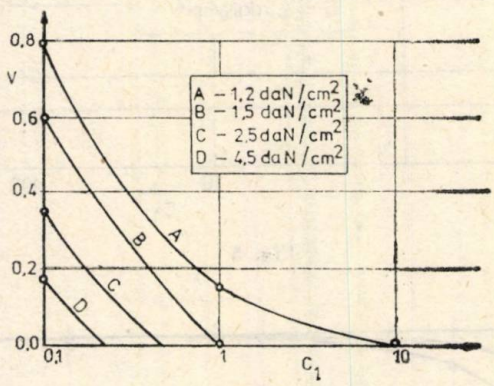


Fig. 7

Influența lui $\varkappa$, deci a temperaturii gazului care are efect asupra densității gazelor și factorului de abatere din relația (11), este neînsemnată asupra tuturor parametrilor analizați (fig. 8).

4. DATE EXPERIMENTALE

În scopul verificării relațiilor stabilite, la punctul de lucru al I.R.D.G. N.-Tg. Mureș, Agnita, s-au execută trei orificii circulare cu diametrele de 2,2 ; 4 și 6 mm pe o conductă de 3″ (fig. 9).

Conducta de 3″ a fost racordată la rețeaua de distribuție și s-a măsurat, cu ajutorul contorului C_1, debitul Q_1 care a intrat în conductă, precum

și cel care a ieșit Q_2 cu ajutorul contorului C_2. Debitul care a ieșit prin orificiu sau prin cele trei orificii s-a calculat cu relația

$$Q = Q_1 - Q_2. \tag{15}$$

În conducta de 10'' s-a introdus nisip a cărui înălțime h s-a măsurat de la generatoarea superioară a conductei de 3''. În figura 10, se prezintă debitele de gaze scurse prin orificiu în funcție de diametrul acestuia.

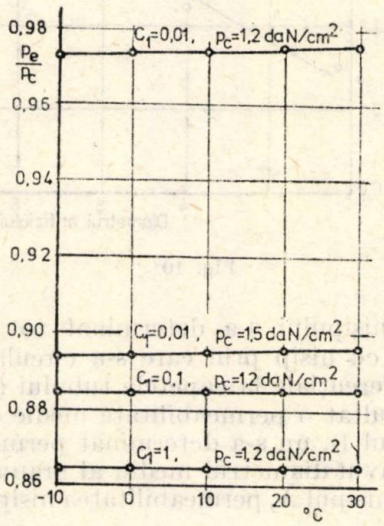


Fig. 8

În figurile 11 *a*, 11 *b*, 11 *c* se prezintă, în funcție de înălțimea h a coloanei de nisip din tubul de 10'', raportul dintre debitul de gaze scurs prin orificiul astupat și orificiul liber unde s-a înregistrat cel mai mare debit.

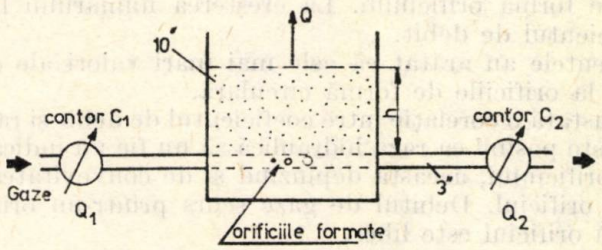


Fig. 9

Se observă că debitul de gaze scurs prin orificiul liber crește cu cît diametrul acestuia este mai mare.

În cazul orificiului astupat cu nisip, se observă că debitul de gaze scurs prin acesta se reduce pe măsură ce înălțimea nisipului crește. Pentru orificiul de 6 mm, s-a introdus și un alt nisip B cu permeabilitatea mai

mare decît a nisipului A, debitul de gaze scurse prin acelaşi orificiu fiind mai mare decît la nisipul cu permeabilitatea mai mică (fig. 12).

Acelaşi fenomen s-a observat şi în situaţia în care cele trei orificii au fost astupate cu nisip A (fig. 13).

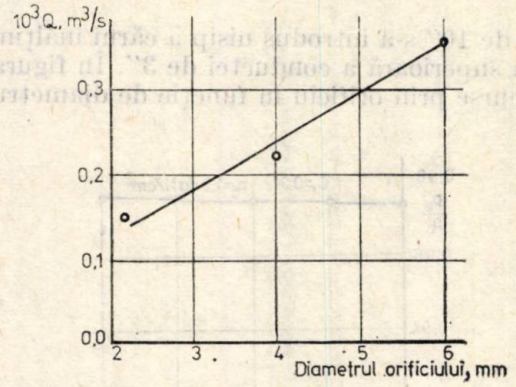


Fig. 10

Permeabilitatea nisipului s-a determinat tot în şantier unde s-a umplut un tub de 3″ cu nisip prin care s-a circulat gaze măsurîndu-se debitul şi presiunea diferenţiale la capetele tubului (fig. 14).

Din calcule a rezultat o permeabilitate medie de 511 Darcy pentru nisipul A. Pentru nisipul B, nu s-a determinat permeabilitatea. Dat fiind faptul că acest nisip a avut diametrul mediu al granulelor de $(1{,}5 \div 2)$ mm faţă de $(0{,}5 \div 1)$ mm la nisipul A, permeabilitatea nisipului B este mai mare decît a nisipului A.

5. CONCLUZII

La orificiile libere, coeficientul de debit depinde de numărul lui Reynolds şi de forma orificiului. La creşterea numărului lui Reynolds, creşte şi coeficientul de debit.

Experimentele au arătat că cele mai mari valori ale coeficientului de debit apar la orificiile de formă circulară.

Nu se constată o corelaţie între coeficientul de debit şi raza hidraulică a orificiului. Este posibil ca raza hidraulică să nu fie un indicator suficient al geometriei orificiului, aceasta depinzînd şi de convexitatea poligonului care formează orificiul. Debitul de gaze scurs printr-un orificiu este cel mai mare dacă orificiul este liber.

Cu cît orificiul are suprafaţa mai mare, cu atît creşte debitul scurs prin orificiul format. La un orificiu astupat, debitul de gaze scurs scade pe măsură ce se măreşte adîncimea de îngropare a conductei. În afara acestui parametru, debitul de gaze scurs printr-un orificiu astupat depinde şi de permeabilitatea solului prin care se filtrează gazele, de regimul de presiune din conductă şi de suprafaţa prin care se filtrează gazele către suprafaţa solului.

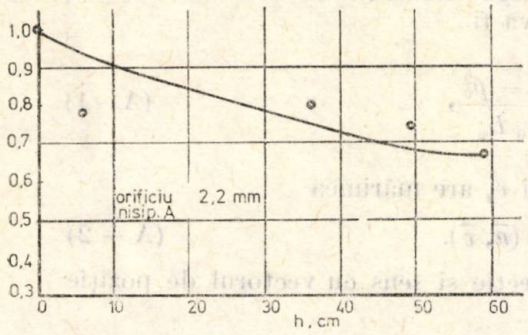


Fig. 11 a

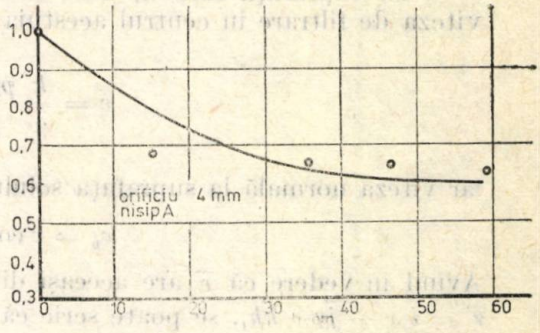


Fig. 11 b

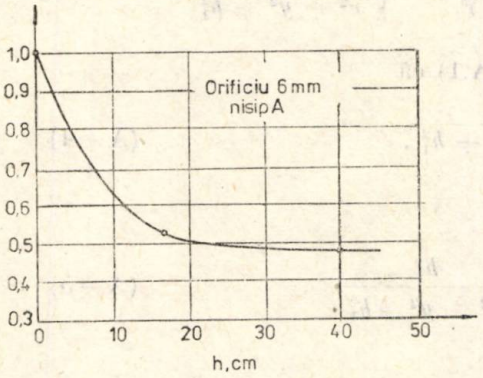


Fig. 11 c

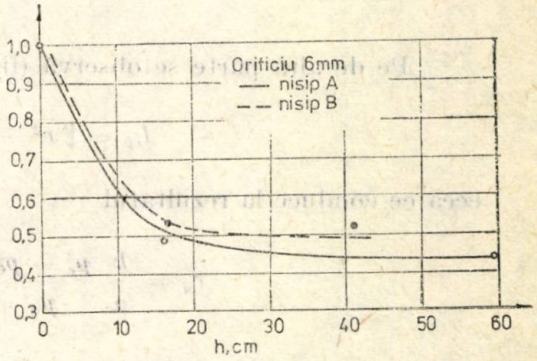


Fig. 12

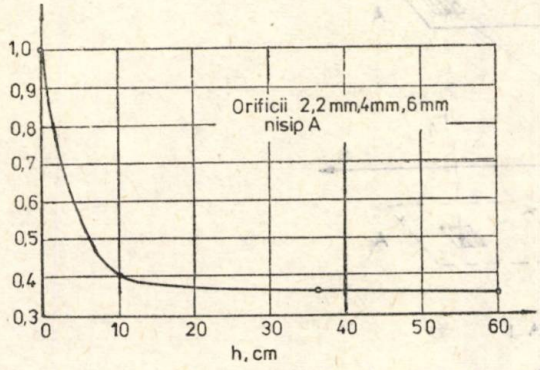


Fig. 13

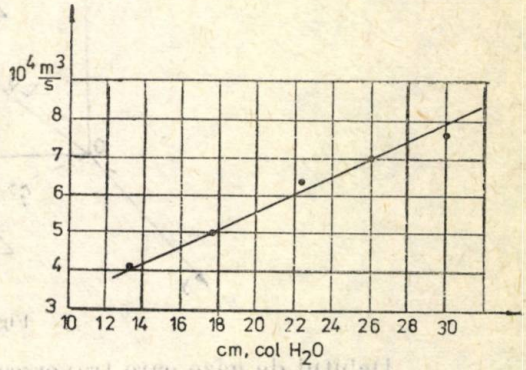


Fig. 14

ANEXA A

Pe suprafaţa solului, dacă se alege elementul de arie $dA = dxdy$, viteza de filtrare în centrul acestuia va fi

$$v = \frac{k}{\mu} \frac{p_c^2 - p_0^2}{p_0 L_p}, \qquad (A-1)$$

iar viteza normală la suprafaţa solului v_n are mărimea

$$v_n = v \cos(\vec{n}, \vec{v}). \qquad (A-2)$$

Avînd în vedere că $\vec{v}$ are aceeaşi direcţie şi sens cu vectorul de poziţie $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}h_1$, se poate scrie că

$$\cos(\vec{n}, \vec{v}) = \cos(\vec{n}, \vec{r}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}|\,|\vec{r}|} = \frac{h_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2}}. \qquad (A-3)$$

Pe de altă parte se observă (fig. A.1) că

$$L_p = \sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2}, \qquad (A-4)$$

ceea ce conduce la rezultatul

$$v_n = \frac{k}{\mu} \frac{p_c^2 - p_0^2}{p_0} \frac{h_1}{x^2 + y^2 + h_1^2}. \qquad (A-5)$$

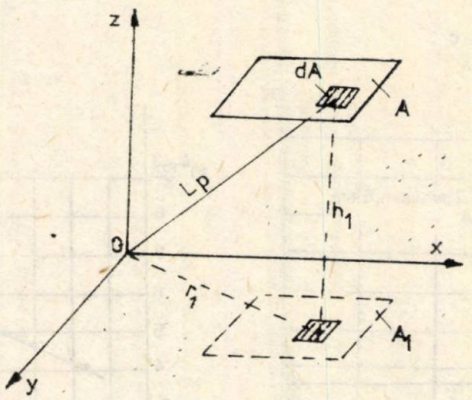


Fig. A.1

Debitul de gaze care traversează suprafaţa A va fi

$$Q_0 = \int_A v_n \, dA = \frac{k}{\mu} \frac{p_c^2 - p_0^2}{p_0} h_1 \int_A \frac{dx\,dy}{x^2 + y^2 + h_1^2}. \qquad (A-6)$$

Se pot introduce coordonatele polare (r_1, θ) de pe suprafața A_1 conținută în planul $z = 0$, și în acest caz se găsește

$$Q_0 = \frac{k}{\mu} \frac{p_c^2 - p_0^2}{p_0} h_1 \int_{A_1} \frac{r_1 \, dr_1 \, d\theta}{r_1^2 + h_1^2}. \qquad (A-7)$$

Ultima relație obținută se poate scrie sub forma

$$Q_0 = \frac{k}{\mu} \frac{p_c^2 - p_0^2}{p_0} h_1 C, \qquad (A-8)$$

C fiind o constantă care depinde de poziția suprafeței A_1 față de originea sistemului de axe ales ce coincide cu orificiul format în conductă. La experimentele efectuate, s-a ales suprafața A deci și A_1 de forma unui cerc, iar originea O a sistemului de axe s-a ales în centrul cercului A_1. Din acest motiv C are expresia

$$C = \pi \ln \left(1 + \frac{R_c^2}{h_1^2}\right), \qquad (A-9)$$

R_c fiind raza cercului care formează suprafața A_1 și avînd în cadrul experimentelor valoarea 12,7 cm. Se observă că debitul de gaze ce traversează suprafața A depinde de poziția acesteia față de orificiul format și de mărimea suprafeței. Pentru $R_c = 12{,}7$ cm și cîteva valori ale lui h_1 se redau în tabelul A — 1 valorile lui C.

Tabelul A — 1

h_1, cm	1	10	20	40	60	80
C	15,9887	3,0173	1,0642	0,3017	0,1377	0,0782

Se observă că C are valori mari dacă h_1 este mic, devenind infinit pentru $h_1 = 0$, dar în acest caz relația de calcul (A — 8) nu mai este valabilă, orificiul fiind liber.

Pe de altă parte cazul $h_1 = 0$ nu este întîlnit în distribuția gazelor. Mai interesant apare să se calculeze valoarea lui C atunci cînd orificiul nu este practicat în centrul suprafeței A_1. De exemplu, tot pentru cazul cînd A_1 este un cerc și orificiul este practic excentric față de centrul suprafeței (fig. A.2).

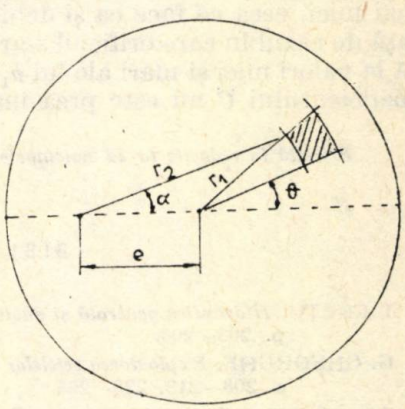


Fig. A.2

Coeficientul C are expresia

$$C_{ex} = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{R_c + e} \frac{r_2 \, dr_2 \, d\alpha}{r_2^2 + h_1^2}. \qquad (A-10)$$

Rezolvarea numerică a integralei a condus, pentru valorile excentricităţii adimensionale $\bar{e}_1 = 0{,}25$, $\bar{e}_2 = 0{,}50$ şi $\bar{e}_3 = 0{,}75$ şi valorile lui h_1 care au fost prezentate în tabelul A—1, la curbele din figura A.3. Cu $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ s-au notat excentricităţile e_1, e_2, e_3 raportate la R_c.

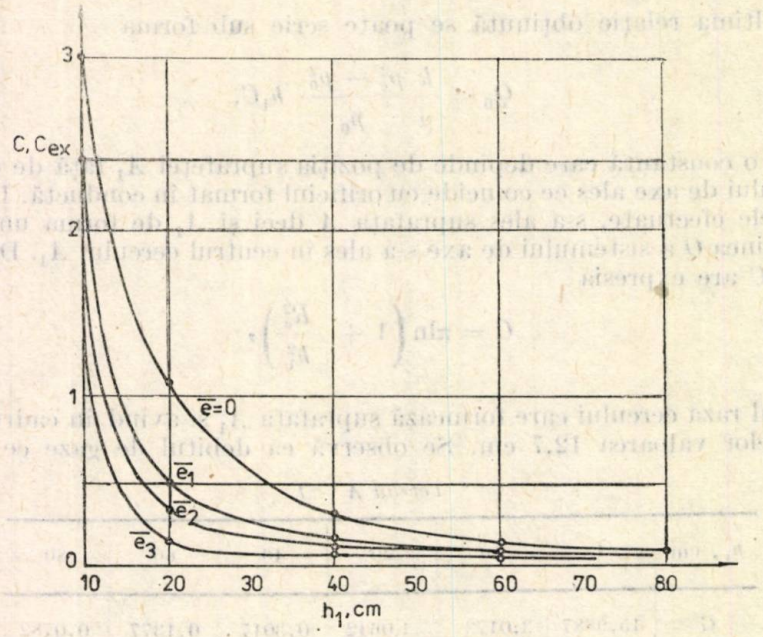


Fig. A.3

Se observă că pe măsură ce se măreşte excentricitatea orificiului prin care ies gazele faţă de centrul suprafeţei A_1, coeficientul C_{ex} are valori mai mici, ceea ce face ca şi debitul filtrat prin acel orificiu să fie mai mic faţă de cazul în care orificiul s-ar găsi în centrul suprafeţei A_1. Se constată că la valori mici şi mari ale lui h_1 influenţa excentricităţii relative $\bar{e}$ asupra coeficientului C nu este prea importantă.

Primită la redacţie la 12 noiembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. I. CREŢU, *Hidraulică generală şi subterană*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971, p. 203—205.
2. G. GHEORGHE, *Exploatarea reţelelor şi instalaţiilor de gaze*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1975, p. 208—213, 228—235.
3. J.P. HOLMAN, *Thermodynamics*, McGraw Hill Book Comp., Second Edition, 1974, p. 76—78.
4. T. OROVEANU, *Hidraulica şi transportul produselor petroliere*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966, p. 222—224.
5. * * * — *Normativ pentru proiectarea şi executarea reţelelor şi instalaţiilor de utilizare a gazelor naturale, I.* 141—142 (1976).

STRUCTURI RETICULATE PLANARE. INFLUENȚA ÎNĂLȚIMII STRUCTURII ASUPRA STĂRII DE EFORTURI ȘI DE DEFORMAȚII

de MIRCEA V. SOARE,
Institutul de construcții București
GH. OBLEMENCO
I.P.T.A.N.A.

Plecînd de la ecuațiile simple ale rezistenței materialelor, se arată că eforturile în barele din cele două fețe ale unei structuri spațiale planare variază invers proporțional cu înălțimea h, iar săgețile variază invers proporțional cu h^2. Se face verificarea riguroasă pentru încovoierea cilindrică a structurii discrete și apoi în cazul utilizării mediului continuu echivalent. Considerarea structurii discrete conduce la concluzii similare. Pentru săgețile w se ia în considerare atît influența încovoierii, cît și aceea a lunecării. Se arată că eforturile corespunzătoare unei înălțimi h_2 pot fi deduse din acelea, presupuse cunoscute, corespunzătoare unei înălțimi h_1. Ca geometrii ale structurii au fost luate în considerare structura planar pătrată simplă, oblică și diagonală.

1. INTRODUCERE

Structurile constructive moderne sînt caracterizate printr-un grad ridicat de complexitate, datorit atît concepției lor spațiale, numărului mare de parametri care le definesc, cît și a necesității corelării proiectării cu tehnologia confecționării și a execuției (montajului).

Structurile reticulate planare se încadrează în cele amintite anterior, mărturie numeroasele realizări atît în țară, cît și în străinătate. Deși există o literatură extrem de bogată în acest domeniu, influența diferiților parametri care caracterizează o asemenea structură (înălțimea ei, geometria și pasul rețelei, condițiile de rezemare, schema de încărcare etc.), care singură poate conduce în final la o optimizare a ei, a fost puțin studiată.

Obiectul lucrării de față este de a studia efectul varierii înălțimii structurii reticulate planare asupra stării de eforturi și de deformații.

Definițiile utilizate au fost date în lucrări anterioare [7], [9].

Din cauza numeroaselor conformări geometrice posibile ne-am fixat la următoarele trei mai des folosite : structura planar pătrată simplă, idem oblică și diagonală.

La elucidarea problemei am folosit atît metoda directă — bazată pe considerarea structurii discrete reale — , cît și metoda indirectă — bazată pe înlocuirea structurii reticulate printr-un mediu continuu echivalent [3].

La baza lucrării a stat observația, făcută pe parcursul studiilor, că modificarea secțiunilor barelor sau introducerea unor bare suplimentare

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 3, 1981, P. 337–361

într-o față a structurii, modifică insensibil starea de eforturi din cealaltă față. O demonstrație elementară este dată în paragraful al doilea.

Influența varierii înălțimii structurii este apoi studiată în trei situații : încovoierea cilindrică (§ 3), mediul continuu echivalent (§ 4) și structura discretă (§ 5), în toate cazurile admițîndu-se că barele de același tip (fața superioară, fața inferioară, diagonale) au secțiune constantă (A_s, A_i, A_d). În sfîrșit, varierea secțiunilor barelor este examinată la punctul 5.3, iar observații finale și concluzii încheie lucrarea (§ 6).

2. SECȚIUNEA ALCĂTUITĂ DIN DOUĂ TĂLPI, LUCRÎND LA ÎNCOVOIERE

O metodă de calcul aproximativă, aplicabilă structurilor planar pătrate simple și oblice, constă în asimilarea acestora cu o rețea de grinzi. Admițînd că forțele de legătură la noduri au fost determinate, putem să ne ocupăm de fiecare grindă în parte. Aceasta se prezintă ca o grindă cu zăbrele spațială alcătuită din două tălpi și diagonale de legătură. Secțiunea transversală a unei grinzi poate fi redusă la cele două tălpi, efectul diagonalelor intervenind separat, prin asigurarea conlucrării lor.

Sîntem atunci conduși la punerea următoarei probleme simple : o secțiune încovoiată este alcătuită din două tălpi de arii A_s, respectiv A_i, de dimensiuni reduse în raport cu distanța dintre centrele lor de greutate

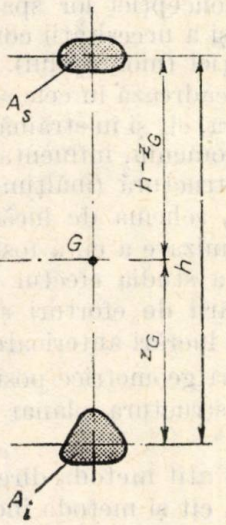


Fig. 1. — Secțiune transversală a unei grinzi alcătuită din două tălpi.

adică înălțimea h a secțiunii. Se cere să se studieze influența variației de secțiune a fiecărei tălpi asupra tensiunilor σ_s, σ_i, admițînd că acestea se distribuie uniform pe fiecare talpă, și asupra săgeților w.

Cu notaţiile din figura 1, poziţia centrului de greutate a întregii secţiuni rezultă

$$z_G = \frac{A_s}{A_s + A_i} h , \tag{1a}$$

$$h - z_G = \frac{A_i}{A_s + A_i} h , \tag{1b}$$

ea defineşte poziţia axei neutre.

Ecuaţia de proiecţii pe axa grinzii (exprimînd că rezultanta întinderilor este egală cu rezultanta compresiunilor) se scrie :

$$\sigma_i A_i = \sigma_s A_s \tag{2}$$

şi, analog, din ecuaţia de momente în raport cu axa neutră rezultă :

$$\sigma_i A_i z_G + \sigma_s A_s (h - z_G) = M , \tag{3}$$

în care M este momentul încovoietor din secţiune, presupus cunoscut.

Relaţiile (2) şi (3) permit determinarea lui σ_s şi σ_i, ; ţinînd seama de (1), rezultă expresiile simple

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s h} , \quad \sigma_i = \frac{M}{A_i h} . \tag{4}$$

Rezultă deci că, în condiţiile din enunţ, variaţia ariei unei tălpi nu influenţează decît tensiunile din talpa respectivă.

Dacă scriem a doua relaţie (4) sub forma $\sigma_i A_i = M/h$ şi notăm $T = \sigma_i A_i$ şi $M = M_x l$, unde M_x reprezintă momentul încovoietor de dală echivalentă în direcţia axei x, iar l pasul reţelei, obţinem relaţia

$$T = \frac{M_x l}{h} \tag{5}$$

stabilită anterior [9]. Interpretarea relaţiei (5) este simplă, ea constituind o extindere a metodei secţiunilor de la calculul grinzilor cu zăbrele plane la cele spaţiale ; efortul într-o bară din cele două feţe ale unei structuri planar pătrate simple se obţine împărţind momentul încovoietor din dala echivalentă, însumat pe lăţimea aferentă (pasul reţelei), la braţul de pîrghie h (înălţimea reţelei). Momentul se evaluează pentru secţiunea trecînd prin mijlocul barei considerate.

Ca o consecinţă a celor precedente, eforturile în barele din cele două feţe ale unei structuri planare variază invers proporţional cu înălţimea h.

Vom trece, mai departe, la calculul săgeţilor. Vom urmări, în cele de faţă, nu aspectul cantitativ, cît structura formulei. Pentru o grindă

săgeata are o expresie de forma

$$w = \frac{C}{EI},$$

în care C reprezintă o constantă dimensională [FL^3],
EI rigiditatea la încovoiere a grinzii.

Admiţînd că axele proprii ale celor două tălpi sînt paralele între ele şi paralele cu axa neutră şi notînd cu I_s, respectiv I_i momentele de inerţie în raport cu axa proprie a fiecărei tălpi, momentul de inerţie al întregii secţiuni (I) se scrie :

$$I = I_s + A_s (h - z_G)^2 + I_i + A_i z_G^2$$

sau, ţinînd seama de (1),

$$I = I_s + I_i + \frac{A_s A_i}{A_s + A_i} h^2 . \tag{6}$$

În relaţia (6) suma $I_s + I_i$ este neglijabilă în raport cu ultimul termen, astfel încît vom putea considera, mai departe

$$I \approx \frac{A_s A_i}{A_s + A_i} h^2 = \frac{h^2}{\frac{1}{A_s} + \frac{1}{A_i}} . \tag{7}$$

Relaţia (7) arată că săgeţile grinzii şi implicit ale structurii planare variază invers proporţional cu pătratul înălţimii (h^2).

Vom exemplifica, pe un caz simplu, justificarea aproximaţiei precedente. Fie cele două tălpi identice, de secţiune inelară, avînd diametrul exterior d_e şi cel interior d_i.

Cu $A_s = A_i = A = \frac{\pi}{4}(d_e^2 - d_i^2)$

$$I_s = I_i = \frac{\pi}{64}(d_e^4 - d_i^4) = \frac{A}{16}(d_e^2 + d_i^2) = Ai^2,$$

unde $i = \frac{1}{4}\sqrt{d_e^2 + d_i^2}$ este raza de inerţie a secţiunii inelare, formula (6) devine

$$I = 2Ai^2 + \frac{A}{2}(4i^2 + h^2).$$

Pentru ca primul termen să fie neglijabil în raport cu al doilea, trebuie ca $i \ll h/2$.

Să considerăm, de exemplu, $h = 2{,}30$ m, $d_e = 120$ mm, $d_i = 106$ mm.

Rezultă imediat $i = 4$ cm şi $4i^2 + h^2 = 64 + 52900 = 52964$ cm^2. Primul termen reprezintă doar 0,12 % din cel de-al doilea, adică o valoare absolut neglijabilă.

Plecînd de la (7) putem calcula rigiditatea structurii planar pătrate simple, raportată la unitatea de lățime. În acest scop vom calcula

$$K = \frac{EI}{l} = \frac{E}{l}\,\frac{h^2}{\frac{1}{A_s}+\frac{1}{A_i}} = \frac{h^2}{\frac{l}{EA_s}+\frac{l}{EA_i}} = \frac{h^2}{\frac{1}{k_s}+\frac{1}{k_i}}. \tag{8}$$

Regăsim astfel rigiditatea la încovoiere stabilită anterior în cazul încovoierii cilindrice [5]. În cazul altor tipuri de structuri planare, cum sînt de exemplu cele diagonale, unde barele din cele două fețe nu au aceeași orientare, numitorul relațiilor (7) și (8) se modifică (vezi de exemplu [7] p. 301).

3. ÎNCOVOIEREA CILINDRICĂ A STRUCTURILOR PLANAR PĂTRATE

Ne vom ocupa de structura planar pătrată simplă și de cea diagonală.

3.1 STRUCTURA PLANAR PĂTRATĂ SIMPLĂ

Starea de eforturi și de deformații a fost studiată anterior [5] astfel încît ne vom limita să preluăm rezultatele și să le comentăm. La structura considerată, presupusă că se întinde pe o lungime finită în sensul axei x și are o lungime foarte mare în sensul axei y, distingem două noduri tipice, fie A în fața inferioară și B în fața superioară (fig. 2).

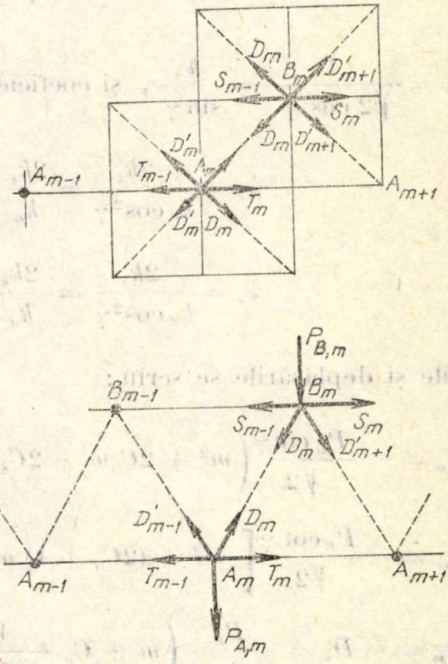


Fig. 2. — Notarea nodurilor și a eforturilor în cazul încovoierii cilindrice a unei structuri planar pătrate simple.

Succesiunea nodurilor de tip A este caracterizată prin variabile m (care ia numere întregi); nodurile de tip B sînt decalate față de cele de tip A cu cîte o jumătate de interval în sensul ambelor axe și sînt numerotate tot cu ajutorul variabilei m.

Starea de eforturi și de deformații este caracterizată prin (fig. 2 *a*, *b*)

u_{Am}, u_{Bm} deplasările nodurilor în sensul axei x,

w_{Am}, w_{Bm} săgețile nodurilor, în sensul axei z,

T_m eforturi în barele din fața inferioară,

S_m eforturi în barele din fața superioară,

D_m, D'_m eforturi în diagonala suitoare, respectiv coborîtoare ce pleacă dintr-un nod A,

P_{Am}, P_{Bm} sarcini concentrate nodale, normale pe cele două fețe, dirijate în sensul axei z.

Dacă se mai notează cu γ unghiul pe care diagonalele îl fac cu cele două fețe, rezultă relația

$$\cot \gamma = \frac{l}{h\sqrt{2}}. \tag{9}$$

Limitîndu-ne la cazul sarcinilor nodale egale, aplicate în fața superioară ($P_{Bm} = P_B = \text{const.}$) și introducînd notațiile pentru rigiditățile axiale ale celor trei tipuri de bare

$$k_s = \frac{EA_s}{l}, k_i = \frac{EA_i}{l}, k_d = \frac{EA_d}{l_d}, \tag{10}$$

unde $l_d = \dfrac{l}{\sqrt{2}\cos\gamma} = \dfrac{h}{\sin\gamma}$, și coeficienții adimensionali

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{2k_i}{k_d \cos^2\gamma} = \frac{2k_i}{k_d}(1 + \operatorname{tg}^2\gamma), \\ \psi_s &= \frac{2k_s}{k_d \cos^2\gamma} = \frac{2k_s}{k_d}(1 + \operatorname{tg}^2\gamma), \end{aligned} \tag{11}$$

eforturile și deplasările se scriu:

$$\begin{aligned} T_m &= -\frac{P_B \cot\gamma}{\sqrt{2}}\left(m^2 + 2C_5 m + 2C_4 + \frac{1}{3}\right), \\ S_m &= +\frac{P_B \cot\gamma}{\sqrt{2}}\left[m^2 + (2C_5 + 1)m + 2C_4 + C_5 + \frac{5}{6}\right], \\ D_m &= -D'_m = \frac{P_B}{2\sin\gamma}\left(m + C_5 - \frac{1}{2}\right); \end{aligned} \tag{12}$$

$$u_{A,m} = -\frac{P_B \cot\gamma}{6\sqrt{2}\,k_i}\Big[2m^3 + (6C_5 - 3)\,m^2 + (12C_4 -$$

$$- 6C_5 + 3)\,m + 12C_3 - 6C_4 + 3C_5 - 1], \qquad (13a)$$

$$u_{B,m} = \frac{P_B \cot\gamma}{6\sqrt{2}k_s}[2m^3 + 6C_5m^2 + (12C_4 + 3)\,m + 12C_3 + 3C_5];$$

$$w_{A,m} = \frac{P_B \cot^2\gamma}{12k_i}\left(1 + \frac{k_i}{k_s}\right)\Bigg\{m^4 + (4C_5 - 2)m^3 + \Bigg(12C_4 - 6C_5 + 4 -$$

$$- \frac{3\psi_i}{1 + \frac{k_i}{k_s}}\Bigg)m^2 + \Bigg[24C_3 - 12C_4 + 2\left(4 - \frac{3\psi_i}{1 + \frac{k_i}{k_s}}\right)C_5 - 3 + \frac{3\psi_i}{1 + \frac{k_i}{k_s}}\Bigg]m +$$

$$+ [24C_2 - 12C_3 + 2\left(4 - \frac{3\psi_i}{1 + \frac{k_i}{k_s}}\right)C_4 - \left(3 - \frac{3\psi_i}{1 + \frac{k_i}{k_s}}\right)C_5 +$$

$$+ \frac{16}{15} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3\psi_i}{1 + \frac{k_i}{k_s}}\Bigg]\Bigg\}, \qquad (13b)$$

$$w_{B,m} = \frac{P_B \cot^2\gamma}{12k_i}\Bigg\{\left(1 + \frac{k_i}{k_s}\right)m^4 + 4\left(1 + \frac{k_i}{k_s}\right)C_5\,m^3 + \Bigg[12\left(1 +$$

$$+ \frac{k_i}{k_s}\right)C_4 + 1 + 4\,\frac{k_i}{k_s} - 3\psi_i\Bigg]m^2 + \Bigg[24\left(1 + \frac{k_i}{k_s}\right)C_3 + 2\left(1 +$$

$$+ \frac{k_i}{k_s}\right)C_5 - 6\psi_i\,C_5\Bigg]m + 24\left(1 + \frac{k_i}{k_s}\right)C_2 + 2\left(1 + 4\,\frac{k_i}{k_s}\right)C_4 +$$

$$+ \frac{1}{15} + \frac{16}{15}\,\frac{k_i}{k_s} - 6\,\psi_i\,C_4 - \psi_i\Bigg\}.$$

În relațiile (12), (13) figurează constantele de integrare C_2, C_3, C_4, C_5 care urmează să fie precizate din condiții la limită.

Expresiile eforturilor au în factor pe $\cot\gamma$, respectiv $1/\sin\gamma$ întocmai ca la grinzile cu zăbrele cu tălpi paralele. Prezența lui $\cot\gamma$ în expresiile lui T_m, respectiv S_m arată că acestea variază invers proporțional cu înălțimea h, în concordanță cu cele stabilite în paragraful 2. Pentru expresiile deplasărilor longitudinale (13a) sînt valabile aceleași observații.

Expresiile săgeților (13b) au în factor pe $\cot^2\gamma$, ceea ce denotă o inversă proporționalitate cu h^2, însă mai conțin în cuprinsul lor și pe ψ_i. Așadar o serie de termeni vor avea în factor pe $\cot^2\gamma\,(1 + \mathrm{tg}^2\gamma) = \cot^2\gamma + 1$.

O analiză mai atentă ar arăta că termenii care au în factor pe $\cot^2\gamma$ corespund săgeților din încovoiere, în timp ce ceilalți, independenți de $\cot^2\gamma$, corespund săgeților din lunecare. Cum influența acestora din urmă este foarte mică, pentru rapoartele uzuale în Rezistența materialelor între înălțime și deschidere, inversa proporționalitate a săgeților cu h^2 este elucidată.

Se observă ușor că discuția precedentă este valabilă atît pentru rezemările static determinate, cît și pentru cele static nedeterminate.

3.2 STRUCTURA PLANAR PĂTRATĂ DIAGONALĂ

Starea de eforturi și de deformații a fost studiată anterior [7], astfel încît vom prelua rezultatele ținînd seama și de cele stabilite la punctul 3.1. La acest tip de structură planară se disting *trei noduri tipice*, fie A în fața inferioară și B și C în fața superioară (fig. 3).

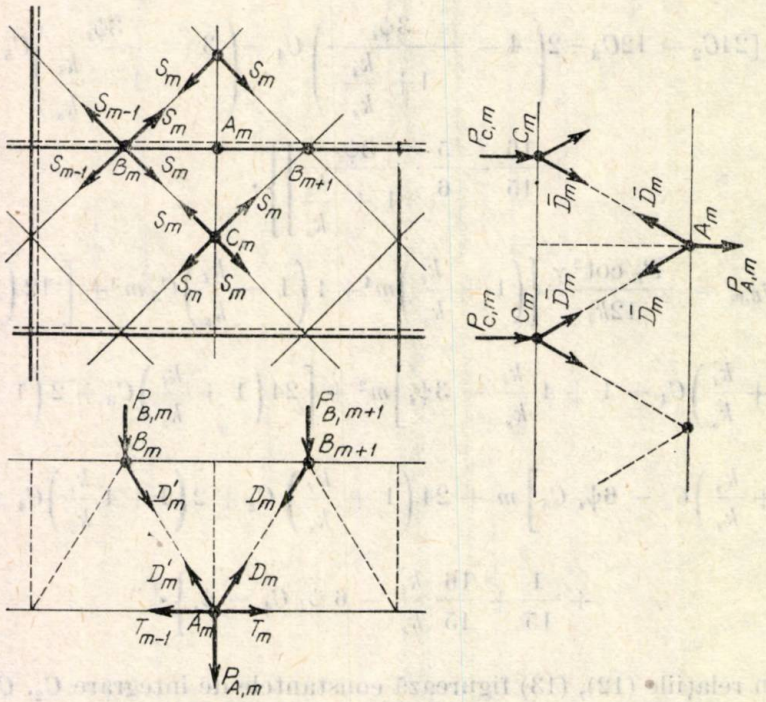


Fig. 3. — Notarea nodurilor și a eforturilor în cazul încovoierii cilindrice a unei structuri planar pătrate diagonale.

Ca și precedent se definesc următoarele mărimi statice :
$u_{A,m}$, $u_{B,m}$, $u_{C,m}$ deplasările nodurilor în sensul axei x,
$w_{A,m}$, $w_{B,m}$, $w_{C,m}$ săgețile nodurilor în sensul axei z,
T_m eforturi în barele din fața inferioară,
S_m eforturi în barele din fața superioară,

D_m, D'_m eforturi în diagonalele suitoare, respectiv coborîtoare ce pleacă dintr-un nod A spre un nod B,

$\bar{D}_m$ eforturi în diagonalele ce pleacă dintr-un nod A spre nodurile C.

Se demonstrează (vezi [7]) că eforturile $\bar{D}_m$ rezultă direct din ecuaţia de echilibru

$$\bar{D}_m = -\frac{P_{Cm}}{2\sin\gamma}, \tag{14a}$$

în timp ce săgeata unui nod C rezultă din săgeata unui nod A, la care se adună scurtarea diagonalelor D_m, sub acţiunea sarcinilor nodale P_{Cm}:

$$w_{C,m} = w_{A,m} + \frac{P_{Cm}}{2k_d \sin^2\gamma}; \tag{14b}$$

deplasările $u_{C,m}$ rezultă, în cazul încovoierii cilindrice, din simple consideraţii geometrice

$$u_{C,m} = \frac{1}{2}(u_{B,m+1} + u_{B,m}). \tag{14c}$$

Cunoscînd h — înălţimea, respectiv l — pasul reţelei (din faţa inferioară), rezultă

— lungimea unei bare din faţa superioară $l_s = l/\sqrt{2}$,

— lungimea diagonalei $l_d = \dfrac{l}{2\cos\gamma} = \dfrac{h}{\sin\gamma}$,

— unghiul γ este dat de relaţia $\cot\gamma = \dfrac{l}{2h}$.

Păstrînd aceleaşi notaţii (10) pentru rigidităţile axiale, introducem coeficienţii adimensionali

$$\psi_i = \frac{k_i}{k_d\cos^2\gamma}, \quad \psi_s = \frac{k_s}{k_d\cos^2\gamma}, \quad \bar{\psi}_s = \frac{1}{2}\psi_s = \frac{k_s}{2k_d\cos^2\gamma}. \tag{15}$$

Limitîndu-ne la cazul sarcinilor nodale egale aplicate în nodurile $B(P_{Bm} = P_B = \text{const.})$ eforturile şi deplasările se scriu:

$$T_m = -P_B\cot\gamma\left[m^2 + 2(C_3+1)\,m + 2C_3 + 2C_2 + \frac{7}{6}\right],$$

$$S_m = \frac{P_B}{\sqrt{2}}\cot\gamma\left[m^2 + (2C_3+1)\,m + C_3 + 2C_2 + \frac{2}{3}\right], \tag{16}$$

$$D_m = -D'_m = \frac{P_B}{\sin\gamma}\left(m + C_3 + \frac{1}{2}\right);$$

$$u_{A,m} = -\frac{P_B}{k_i}\cot\gamma\left[\frac{1}{3}m^3+\left(C_3+\frac{1}{2}\right)m^2+\left(C_3+2C_2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3}\right)m+\frac{1}{3}C_3+C_2+2C_1+\frac{1}{12}\right], \tag{17a}$$

$$u_{B,m} = \frac{2P_B}{k_s}\cot\gamma\left[\frac{1}{3}m^3+C_3m^2+\left(2C_2+\frac{1}{3}\right)m+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}C_3+2C_1\right];$$

$$w_{A,m} = P_B\cot^2\gamma\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\left[\frac{1}{6}m^4+\frac{2C_3+1}{3}m^3+\left(C_3+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2C_2+\frac{1}{2}\right)m^2+\left(C_3+2C_2+4C_1+\frac{1}{3}\right)m+\frac{1}{3}C_3+C_2+2C_1+\right.$$

$$\left.+2C_0+\frac{1}{12}\right]-\frac{P_B}{k_d\sin^2\gamma}\left[(2C_3+1)m+C_3+2C_2+\frac{2}{3}\right], \tag{17b}$$

$$w_{B,m} = P_B\cot^2\gamma\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\left(\frac{1}{6}m^4+\frac{2}{3}C_3m^3+2C_2m^2+\right.$$

$$\left.+4C_1m+4C_0\right)+P_B\left(\frac{\cot^2\gamma}{k_s}-\frac{1}{k_d\sin^2\gamma}\right)\left(m^2+2C_3m+2C_2+\frac{1}{6}\right).$$

În expresiile (17b) pentru săgeți, termenii avînd la numitor pe $k_d\sin^2\gamma$ reprezintă săgeţile din lunecare.

Observaţiile şi concluziile trase la punctul 3.1 rămîn valabile şi în cazul de faţă.

4. MEDIUL CONTINUU ECHIVALENT

Cînd ochiurile unei structuri reticulate planare sînt mici în comparaţie cu deschiderile, aceasta poate fi asimilată *intuitiv* cu un mediu continuu echivalent. Ceea ce este caracteristic pentru acest procedeu de trecere la limită este faptul că mediul continuu nu este o dală obişnuită (anizotropă sau izotropă) decît în cazuri izolate; proprietăţile sale elastice trebuie să fie determinate de la caz la caz, în funcţie de geometria structurii planare.

Trecerea de la o structură discretă la una continuă și deducerea riguroasă a proprietăților elastice ale mediului continuu echivalent se obține folosind dezvoltările în serie Taylor ale funcțiilor necunoscute așa cum a arătat J. D. Renton [4].

4.1 STRUCTURA PLANAR PĂTRATĂ SIMPLĂ

Utilizînd dezvoltările în serie Taylor amintite precedent se ajunge la o ecuație cu derivate parțiale de ordinul opt care determină săgețile w*

$$\left[\frac{\partial^8}{\partial x^8}+\frac{\partial^8}{\partial y^8}+\frac{k_i^2+k_s^2}{k_i\,k_s}\frac{\partial^8}{\partial x^4\partial y^4}+(\psi_i+\psi_s)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\right]w=$$

$$=\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}+(\psi_i+\psi_s)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\right]\left(\frac{1}{k_i}+\frac{1}{k_s}\right)\frac{p}{h^2}, \tag{18}$$

în care $p = P/l^2$ este termenul de încărcare, de dimensiunea unei sarcini distribuite pe elementul de suprafață (aferentă).

În ecuația (18) se recunoaște efectul cuplat de șaibă și de placă.

În limitele comportării ideal elastice, prezența lui h^2 la numitor, în membrul al doilea, este în concordanță cu cele stabilite la paragrafele 2 și 3.

Este interesant de amintit simplificarea ce rezultă în cazul cînd barele din cele două fețe sînt identice, adică

$$k_i = k_s = k,\ \psi_i = \psi_s = \psi. \tag{19}$$

Ecuația (18) poate fi adusă la forma

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\psi\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{2p}{kh^2}\right)=0.$$

Primul operator diferențial poate fi simplificat (reprezentînd efectul de șaibă) și problema se reduce la găsirea soluției ecuației cu derivate parțiale de ordinul al patrulea

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{2p}{kh^2}. \tag{20}$$

Comparînd cu ecuația plăcilor izotrope

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p}{K} \tag{21}$$

* Pentru mediul continuu echivalent distanța dintre cele două fețe ale structurii rămîne neschimbată, ceea ce înseamnă că săgețile punctelor situate pe aceeași normală sînt egale.

se remarcă, în primul rînd, absența termenului median care caracterizează efectul torsiunii.

Suma derivatelor normale de ordinul al patrulea în (20) arată analogia cu o rețea de grinzi ortogonale (prin trecere la limită), ceea ce justifică ipoteza făcută inițial la § 2.

Din compararea membrilor secunzi ai ecuațiilor (20) și (21) rezultă că rigiditatea la încovoiere a structurii planar pătrate simple, considerată ca o dală, este

$$K = \frac{kh^2}{2}, \tag{22}$$

ceea ce constituie o particularizare a expresiei mai generale (8), care de altfel poate fi pusă în evidență și în membrul drept al ecuației (18).

Pentru analogia cu formulele comentate la paragraful 3 redăm, în continuare, după [9], expresiile deplasărilor și eforturilor în cazul structurii pe contur dreptunghiular $a\ b$, simplu rezemată pe contur și încărcată cu sarcină distribuită p.

Notînd cu $\lambda = a/b$ raportul laturilor, rezultă:

— eforturi în barele din cele două fețe, în direcția x:

$$T = -S = \frac{16pa^2l}{\pi^4 h} \sum_m \sum_n \frac{m}{n(m^4 + \lambda^4 n^4)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{23}$$

— eforturi în barele din cele două fețe, în direcția y:

$$T' = -S' = \frac{16pa^2l\lambda^2}{\pi^4 h} \sum_m \sum_n \frac{n}{m(m^4 + \lambda^4 n^4)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b},$$

— deplasări în sensul axei x, în fața superioară (B), respectiv inferioară (A):

$$u_B = -u_A = \frac{16pa^3}{\pi^5 kh} \sum_m \sum_n \frac{1}{n(m^4 + \lambda^4 n^4)} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{24}$$

— deplasări în sensul axei y, în fața superioară (B), respectiv inferioară (A):

$$v_B = -v_A = \frac{16pa^3\lambda}{\pi^5 kh} \sum_m \sum_n \frac{1}{m(m^4 + \lambda^4 n^4)} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

— săgeți:

$$w = \frac{32pa^4}{\pi^5 kh^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn(m^4 + \lambda^4 n^4)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b},$$

Se verifică și pe formulele (23), (24), (25) influența înălțimii structurii planar pătrate simple asupra eforturilor în bare și componentele deplasării nodurilor; este în fond extinderea de la problema unidimensională la cea bidimensională (plană).

O soluție mai generală în ce privește condițiile de rezemare, pentru conturul dreptunghiular, a fost dată în [9].

4.2 STRUCTURA PLANAR PĂTRATĂ OBLICĂ

Structura planar pătrată oblică are aceeași conformare geometrică ca și cea simplă, singura diferență constînd în orientarea diferită a barelor din cele două fețe față de un contur dreptunghiular sau pătrat; în timp ce la structura simplă barele din cele două fețe sînt paralele cu laturile conturului, la structura oblică barele sînt înclinate cu 45° față de laturile conturului.

Starea de eforturi și de deformații a fost studiată în baza metodei mediului continuu echivalent [10], stabilind că săgețile w satisfac ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 6\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{4p}{kh^2} \tag{26}$$

perfect analoagă ecuațiilor (20) și (21).

Observînd că, în limitele comportării perfect elastice a materialului, structura membrului drept din cele trei ecuații cu derivate parțiale (20), (21) și (26) este identică — anume rigiditatea la încovoiere figurează la numitor — diferind doar operatorul diferențial din membrul stîng, toate concluziile trase pînă în prezent rămîn valabile și în cazul geometriei considerate.

4.3 STRUCTURA PLANAR PĂTRATĂ DIAGONALĂ

La acest tip de structură, caracterizat prin conformarea diferită a celor două fețe, efectele de șaibă și de placă nu mai pot fi separate nici chiar într-un caz particular așa cum era cazul structurilor planar pătrate simple. Alegînd ca necunoscute de bază săgețile w și o funcție de eforturi (potențial) Φ, L. Kollár [2] a stabilit următorul sistem de două ecuații cu derivate parțiale care caracterizează mediul continuu echivalent:

$$\frac{h^2}{2}\,\frac{A\,A_l}{A+A_l}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \frac{h}{2}\,\frac{A}{A+A_l}\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} -\right.$$

$$\left. - 2\,\frac{A+2A_l}{A}\,\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}\right) = p, \tag{27a}$$

$$\frac{h}{2}\frac{A}{A+A_l}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-2\frac{A+2A_l}{A}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{A+2A_l}{A_l(A+A_l)}\left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}-2\frac{A}{A+2A_l}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}\right)-$$

$$-\frac{1}{A_{xy}}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\,\partial y^2}=0. \tag{27b}$$

În relațiile precedente A, A_l, A_{xy} reprezintă rigiditățile axiale ale barelor din fața superioară și inferioară, respectiv la lunecare.

Se observă ușor că, prin alegerea unor noi necunoscute proporționale, definite prin relațiile

$$w=\frac{W}{h^2},\quad \Phi=\frac{\Psi}{h}, \tag{28}$$

înălțimea h dispare din sistemul (27). Prima relație (28) arată că săgețile sînt invers proporționale cu h^2, iar a doua relație — din care se deduc, prin derivări de două ori eforturile — arată că acestea sînt invers proporționale cu h.

5. CONSIDERAREA STRUCTURII DISCRETE

5.1 METODA APROXIMATIVĂ PENTRU STRUCTURA PLANAR PĂTRATĂ DIAGONALĂ

Pentru această structură multiplu static nedeterminată, Kato ș.a. [1] au propus o metodă aproximativă de calcul; aproximația constă în a admite că în barele superioare situate în jurul unui nod inferior, eforturile sînt egale. Prin această ipoteză simplificatoare, structura planar pătrată diagonală devine static determinată [6]. În lucrarea [8], M. Soare, A. Pârvu și M. Dinculescu au exprimat mărimile statice cu ajutorul următoarelor expresii:

$$T=C_1(P_i+2P_s)\cot\gamma\;;\; S=-\left[C_2(P_i+2P_s)-\frac{1}{2\sqrt{2}}P_s\right]\cot\gamma,$$

$$D=\left[C_3(P_i+2P_s)-\frac{1}{2}P_s\right]\frac{1}{\sin\gamma}\;;\; V=C_4(P_i+2P_s), \tag{29}$$

$$w=8\cot^2\gamma\left(\frac{1}{k_i}+\frac{1}{k_s}\right)(P_i+2P_s)\,W-\left[\frac{\cot^2\gamma}{k_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{k_d\sin^2\gamma}(P_i+2P_s)+\frac{2\cot^2\gamma}{k_s}P_s\right]m-\frac{\cot^2\gamma}{k_s}P_s.$$

Mai sus C_1, C_2, C_3, C_4, W, m sînt coeficienţi numerici daţi în planşele albumului [8] pentru proiectare,

P_i, P_s — sarcina concentrată ce revine unui nod inferior, respectiv superior,

V este reacţiunea într-un nod de contur.

Structura fiind considerată static determinată, valorile T, S, D, V sînt independente de varierea secţiunilor barelor; în schimb, pentru săgeţile w, formula este stabilită în baza unor rigidităţi axiale k_i, k_s, k_d constante.

Expresiile eforturilor T şi S cuprinzînd în factor pe $\cot\gamma$ arată că acestea sînt invers proporţionale cu h. În expresia săgeţilor w termenii avînd pe $\cot^2\gamma$ în factor corespund deformaţiilor din încovoiere, iar cei avînd pe $1/\sin^2\gamma$ în factor deformaţiilor din lunecare.

Discuţia formulelor este absolut identică cu aceea de la încovoierea cilindrică.

5.2 APLICAREA METODEI DEPLASĂRILOR PENTRU STRUCTURI CU NODURI ARTICULATE

Testarea rezultatelor teoretice precedente a fost făcută considerînd un număr de structuri planare simple şi diagonale; calculele numerice au fost obţinute cu ajutorul unor programe existente.

În cadrul acestui punct sînt examinate structurile cu bare de rigidităţi constante, anume la care $A_s = A_i = A_d = A$.

Datele comune au fost:

— forma pătrată în plan, constînd din 8×8 intervale ($l = L/8$),

— înălţimea structurii a fost considerată în trei variante, raportul dintre înălţime şi deschidere fiind

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{15}, \frac{1}{17{,}5}, \frac{1}{20};$$

— încărcările normale pe cele două feţe au fost considerate după cum urmează:

i) sarcini concentrate egale aplicate în toate nodurile feţei superioare,

ii) sarcini concentrate egale aplicate în toate nodurile feţei inferioare,

— rezemarea se face în faţa superioară, în toate nodurile de contur.

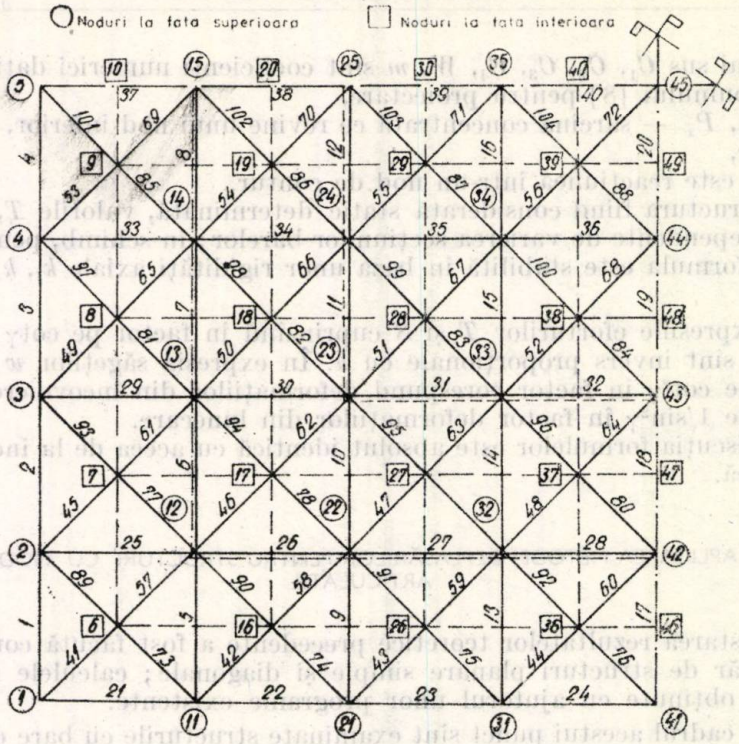
Rezultatele numerice sînt date sub formă adimensională, după cum urmează:

efort în bară, reacţiune = (coeficient) $\times P$,

săgeata w a unui nod = (coeficient) $\times \dfrac{Pl}{EA}$,

în care P reprezintă sarcina nodală a cazului considerat (P_s sau P_i).

Numerotarea nodurilor şi barelor pentru un cadran al structurii planar pătrate simple este redată în figura 4.



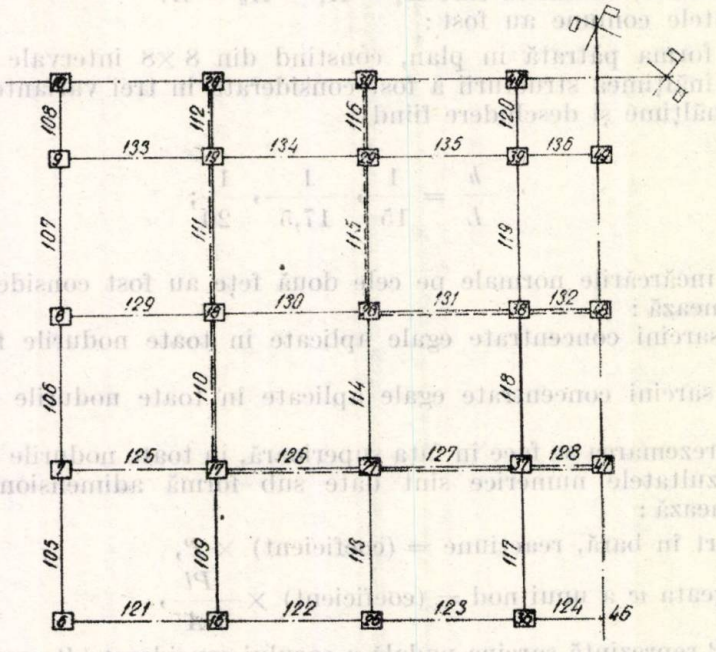


Fig. 4 a. — Barele feței superioare și diagonalele.
Fig 4 b. — Barele feței inferioare.

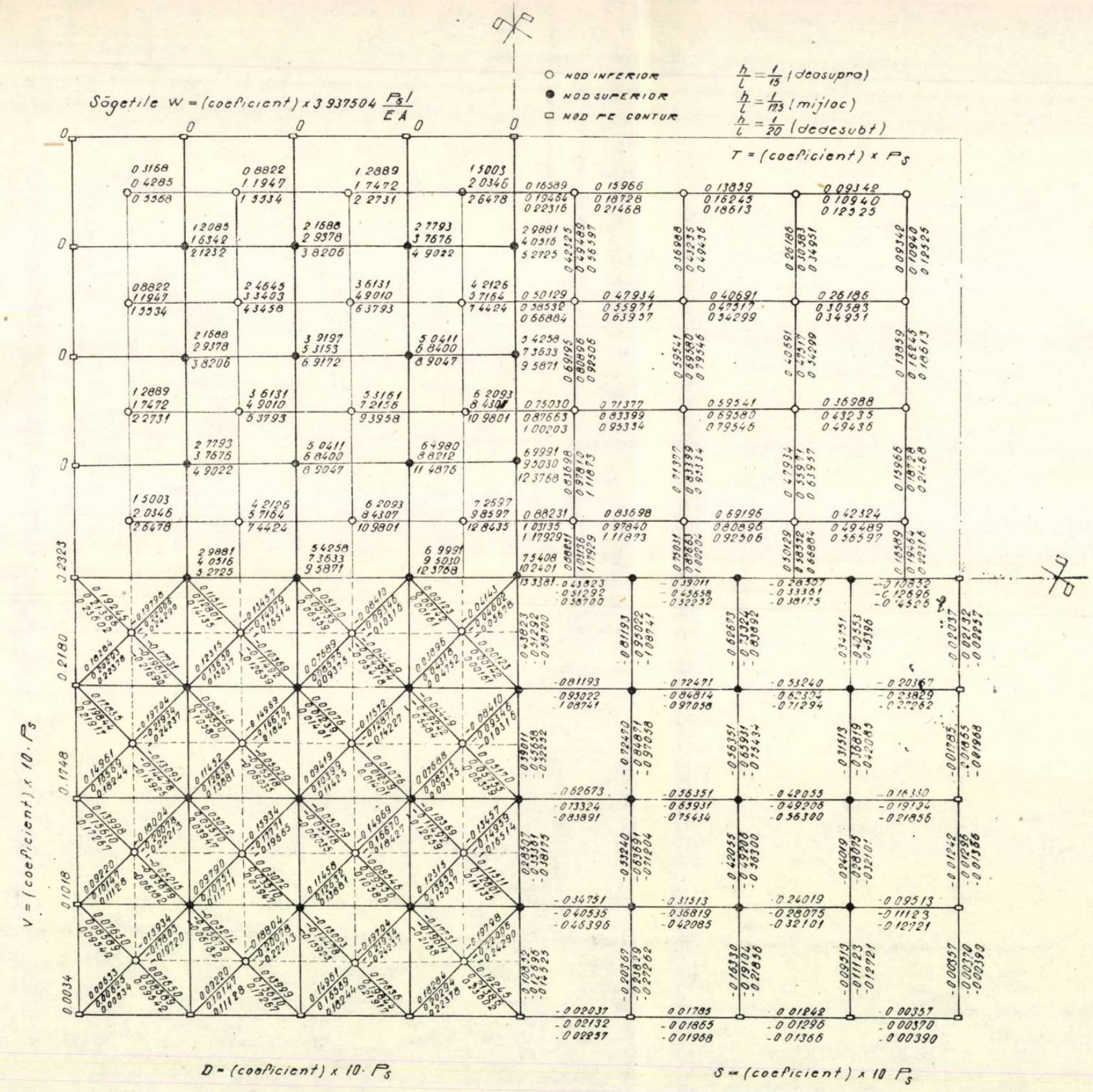


Fig. 5. — Structura planar pătrată simplă, de secțiune constantă, încărcată în fața superioară.

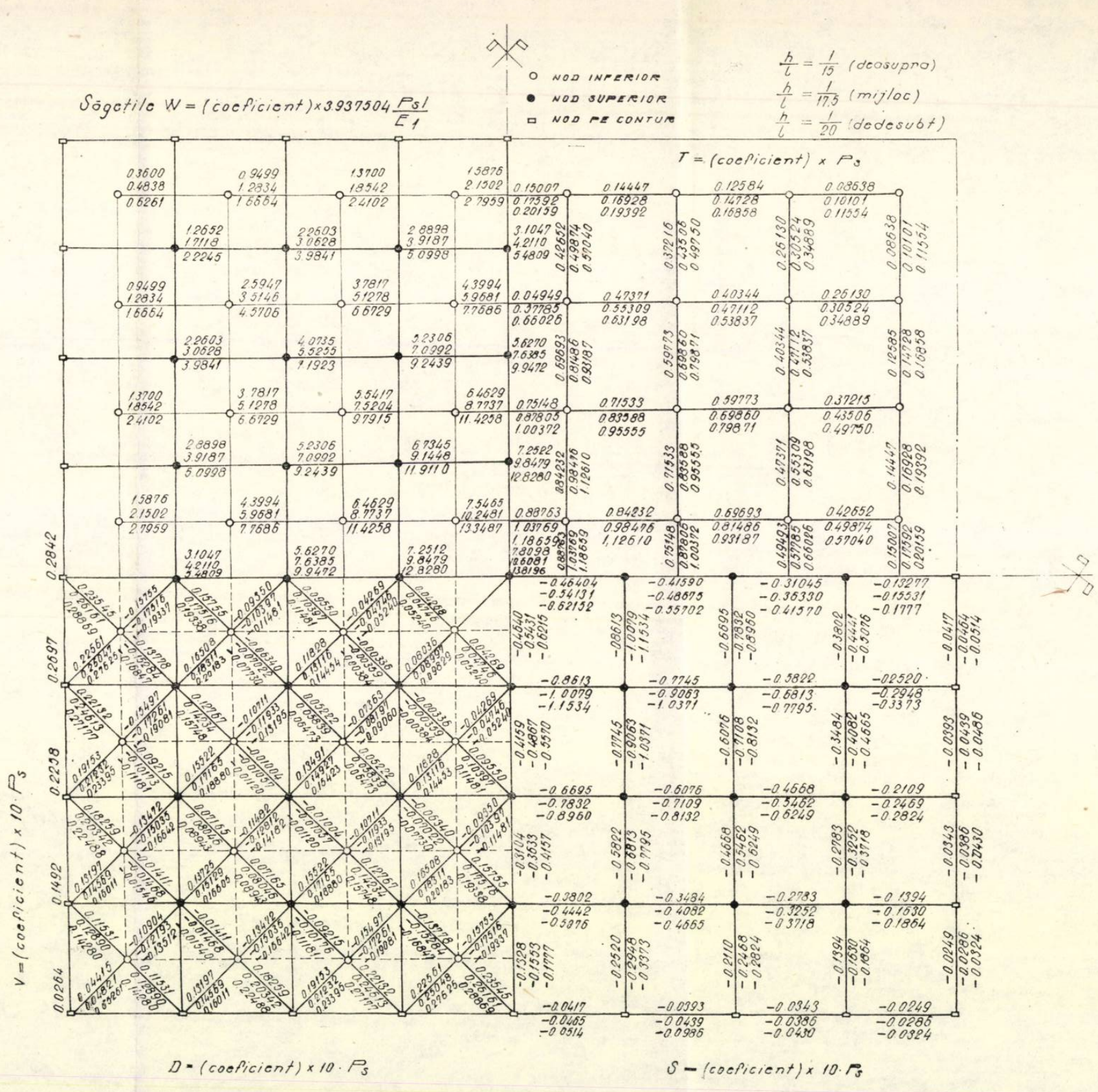
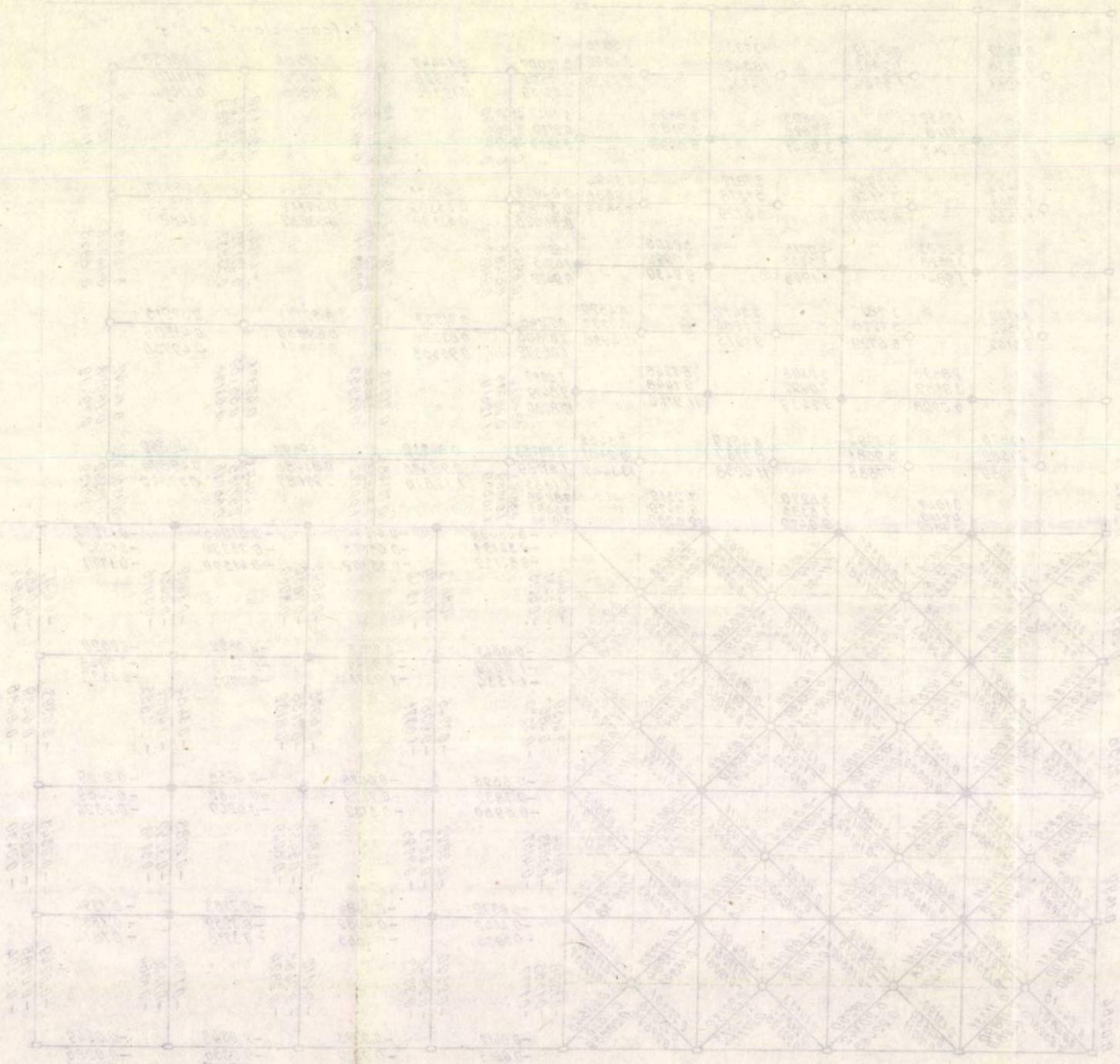
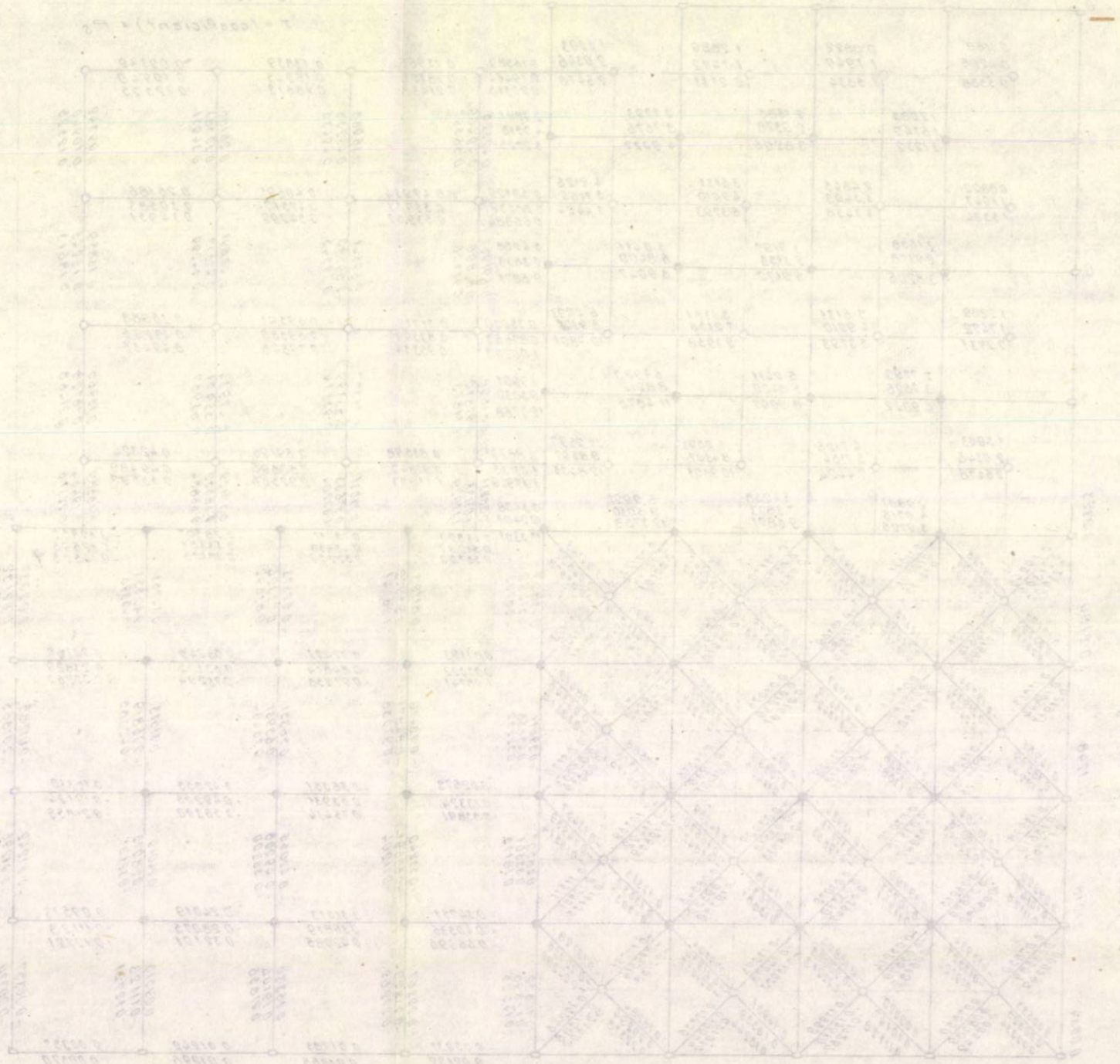


Fig. 6. — Structura planar pătrată simplă, de secțiune constantă, încărcată în fața inferioară.





Valorile eforturilor în barele feței superioare S, ale eforturilor în barele feței inferioare T, ale eforturilor în diagonale D, ale reacțiunilor V, precum și valorile săgeților w la structura planar pătrată simplă având toate barele de secțiune constantă și sarcini concentrate egale aplicate în toate nodurile feței superioare (P_s) au fost redate în figura 5. Cele trei valori înscrise pe aceeași bară sau pentru același nod corespund celor trei înălțimi menționate precedent.

Pentru controlul concluziilor de la paragraful 2 să considerăm, de exemplu, bara 134 din fața inferioară; fie T_{15}, $T_{17.5}$ și T_{20} eforturile corespunzătoare celor trei înălțimi $h_{15} = L/15$, $h_{17.5} = L/17{,}5$ și $h_{20} = L/20$.

Cu valorile citite pe figură avem

$$T_{15} = 691{,}956P_s \quad \text{și} \quad T'_{15} = \frac{15}{17{,}5}808{,}961P_s = 693{,}395P_s$$

(diferență $2{,}08^0/_{00}$),

$$T''_{15} = \frac{15}{20}\,925{,}062P_s = 693{,}796P_s$$

(diferență $2{,}65^0/_{00}$),

$$T_{17.5} = 808{,}961P_s \qquad T'''_{17.5} = \frac{17{,}5}{20}\,925{,}062P_s = 809{,}429P_s$$

(diferență $0{,}58^0/_{00}$).

În mod asemănător pentru bara 20 (cea mai solicitată) din fața superioară avem

$$S_{15} = 438{,}227P_s \quad \text{și} \quad S'_{15} = \frac{15}{17{,}5}\,512{,}917\,P_s = 439{,}643\,P_s$$

(diferență $3{,}23^0/_{00}$),

$$S''_{15} = \frac{15}{20}\,587{,}005\,P_s = 440{,}254\,P_s$$

(diferență $4{,}62^0/_{00}$),

$$S_{17.5} = 512{,}917P_s \text{ și } S'''_{17.5} = \frac{17{,}5}{20}\,587{,}005P_s = 513{,}629\,P_s$$

(diferență $1{,}39^0/_{00}$).

Pentru săgețile w se poate scrie analog, de exemplu pentru nodul superior 45 (se reproduce doar coeficientul numeric):

$$w_{15} = 7{,}5408 \text{ și} \quad w'_{15} = \frac{15^2}{17{,}2^2}\,10{,}2401 = 7{,}5233$$

(diferență $2{,}32^0/_{00}$),

$$w''_{15} = \frac{15^2}{20^2}\,13{,}3381 = 7{,}5027$$

(diferență $5{,}06^0/_{00}$),

$w_{17.5} = 10{,}2401$ și $w'''_{17.5} = \frac{17{,}5^2}{20^2} 13{,}3381 = 10{,}2120$

(diferență $2{,}75^0/_{00}$).

Pentru compararea eforturilor în diagonale vom calcula întîi pe $\sin\gamma$, cu ajutorul relației (9). Astfel vom avea

$$\cot\gamma_{15} = \frac{1L}{8h\sqrt{2}} = \frac{15}{8\sqrt{2}}, \quad \sin\gamma_{15} = 0{,}602168,$$

$$\cot\gamma_{17.5} = \frac{17{,}5}{8\sqrt{2}}, \quad \sin\gamma_{17.5} = 0{,}542919,$$

$$\cot\gamma_{20} = \frac{20}{8\sqrt{2}}, \quad \sin\gamma_{20} = 0{,}492366.$$

Pentru diagonala 69 calculăm:

$$D_{15} = 197{,}978 P_s \text{ și } D'_{15} = \frac{0{,}542919}{0{,}602168} 220{,}058 P_s = 198{,}406 P_s$$

(diferență $2{,}16^0/_{00}$),

$$D''_{15} = \frac{0{,}492366}{0{,}602168} 242{,}904 P_s$$

(diferență $3{,}20^0/_{00}$),

$$D_{17.5} = 220{,}058 P_s \text{ și } D'''_{17.5} = \frac{0{,}492366}{0{,}542919} 242{,}904 P_s = 220{,}286 P_s.$$

Calculele precedente au fost repetate pentru cazul cînd sarcini concentrate egale (P_i) sînt aplicate în toate nodurile feței inferioare. Rezultatele numerice sînt înscrise în figura 6, corespunzător celor trei înălțimi alese.

Ordinul de mărime al erorilor este absolut comparabil cu acela indicat precedent.

Studiul a fost repetat și pentru structura planar pătrată diagonală considerînd doar două înălțimi și anume $h/L = 1/15$ și $1/20$.

Numerotarea nodurilor și barelor pentru un cadran al structurii este redată în figura 7.

Valorile eforturilor în barele feței superioare S, ale eforturilor în barele feței inferioare T, ale eforturilor în diagonale D, ale reacțiunilor V, precum și valorile săgeților w la structura planar pătrată diagonală, avînd toate barele de secțiune constantă, au fost redate în figura 8 pentru cazul cînd sarcini concentrate egale (P_s) sînt aplicate în toate nodurile feței superioare, respectiv în figura 9 pentru cazul cînd sarcini concentrate egale (P_i) sînt aplicate în toate nodurile inferioare.

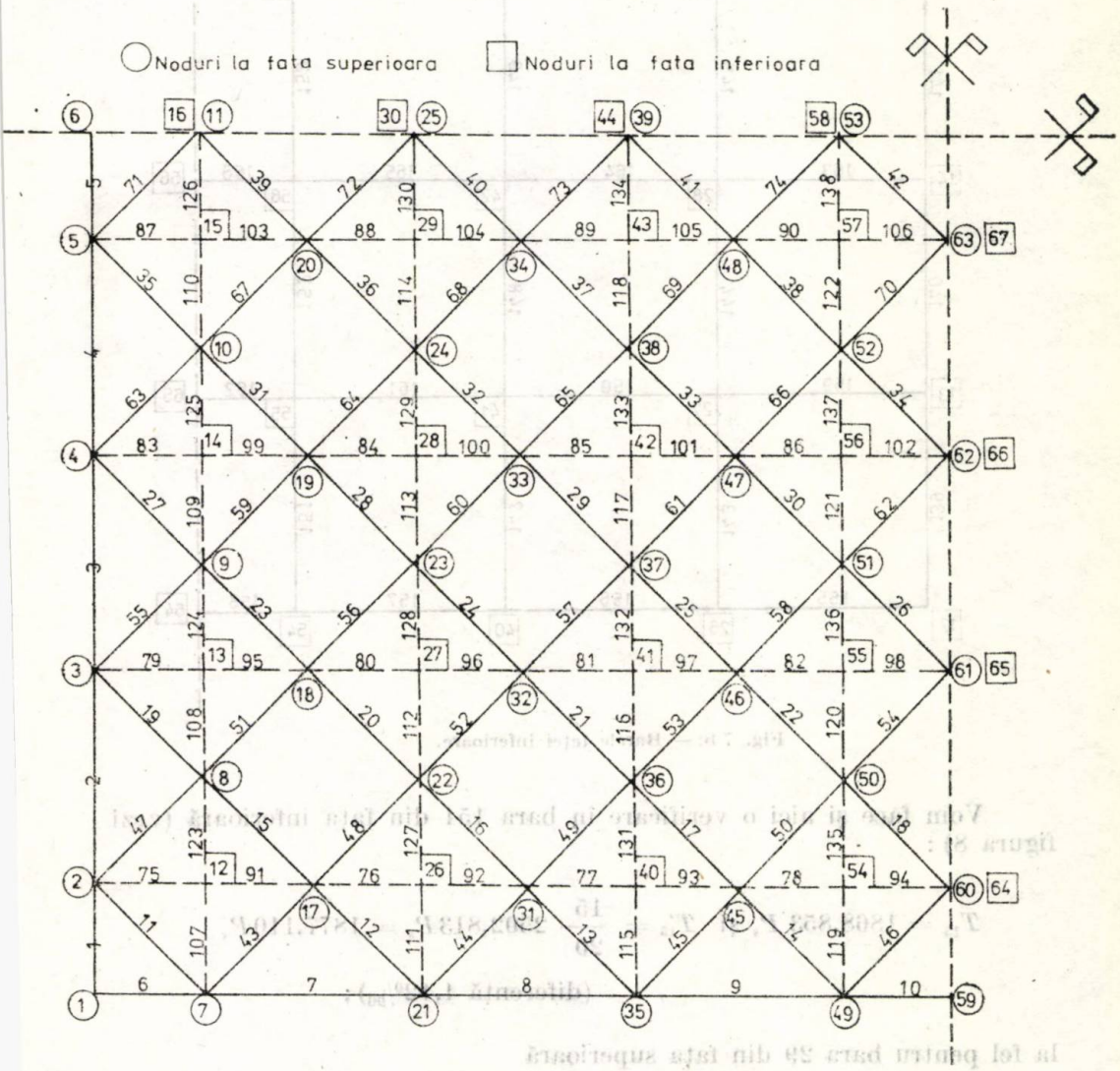


Fig. 7 a. — Barele feţei superioare şi diagonalele.

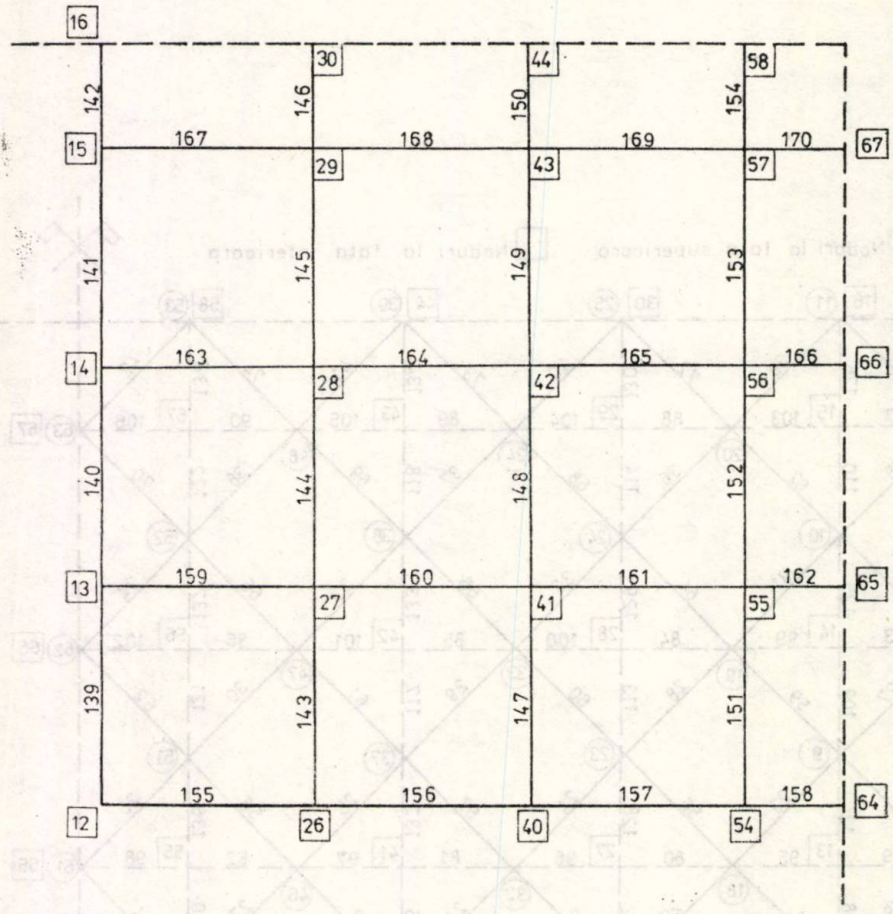


Fig. 7 b. — Barele feței inferioare.

Vom face și aici o verificare în bara 154 din fața inferioară (vezi figura 8):

$$T_{15} = 1868{,}853\, P_s \text{ și } T'_{15} = \frac{15}{20}\, 2502{,}813 P_s = 1877{,}110 P_s$$

(diferență $4{,}42^0/_{00}$);

la fel pentru bara 29 din fața superioară

$$S_{15} = 1007{,}418\, P_s \text{ și } S'_{15} = \frac{15}{20}\, 1350{,}521 P_s = 1012{,}891 P_s$$

(diferență $5{,}43^0/_{00}$);

pentru săgeata nodului 53

$$w_{15} = 12{,}1793 \text{ și } w'_{15} = \frac{15^2}{20^2} 21{,}2928 = 11{,}9772$$

(diferență 1,66 %);

pentru diagonala 87

$$\cot\gamma_{15} = \frac{L}{8 \times 2h} = \frac{15}{16}; \quad \sin\gamma_{15} = 0{,}729537,$$

$$\cot\gamma_{20} = 1{,}25 \quad ; \quad \sin\gamma_{20} = 0{,}624695,$$

$$D_{15} = 758{,}123\ P_s \text{ și } D'_{15} = \frac{0{,}624695}{0{,}729537} 890{,}082\ P_s = 762{,}168\ P_s$$

(diferență 5,34%).

5.3 CAZUL VARIERII SECȚIUNILOR BARELOR ÎN FIECARE FAȚĂ

Întrucît metodele analitice analizate la paragrafele 3 și 4 presupun secțiuni constante ale barelor, am căutat să verificăm relațiile stabilite și în cazul structurilor planare la care se variază secțiunile barelor din cele două fețe. O demonstrație simplă pentru optimizarea secțiunilor este dată în lucrarea [11], relativ la structura planar pătrată simplă.

În consecință, am considerat aceeași configurație geometrică, variind însă secțiunile barelor de trei ori în fiecare față; mărimile secțiunilor sînt redate în tabela 1.

Tabela 1

Bare	Zona		
	centrală	intermediară	marginală
în fața superioară	A_0	$\frac{2}{3} A_0$	$\frac{1}{3} A_0$
în fața inferioară	A_0	$\frac{2}{3} A_0$	$\frac{1}{3} A_0$
diagonale	$0{,}3\ A_0$		

Zonele de aceeași secțiune au fost redate în figura 10 (pentru structura concretă vezi și fig. 4).

Valorile eforturilor în barele feței superioare S, ale eforturilor în barele feței inferioare T, ale eforturilor în diagonale D, ale reacțiunilor V,

precum şi valorile săgeţilor w la structura planar pătrată simplă cu bare de secţiune variată pe zone au fost redate în figura 11 pentru cazul cînd sarcini concentrate egale (P_s) sînt aplicate în toate nodurile feţei superioare, respectiv în figura 12 pentru cazul cînd sarcini concentrate egale (P_i) sînt aplicate în toate nodurile feţei inferioare.

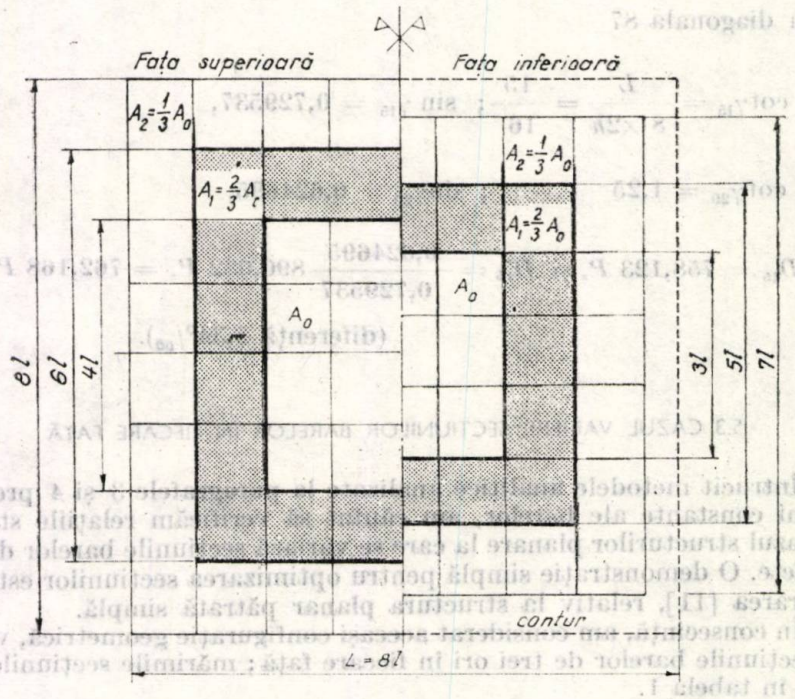


Fig. 10. — Împărţirea feţelor superioară şi inferioară în cîte trei zone de secţiune constantă.

Verificările făcute la punctul precedent îşi păstrează valabilitatea şi în cazurile de faţă, aşa cum se poate verifica uşor.

6. OBSERVAŢII FINALE. CONCLUZII

În paragrafele precedente am arătat, în baza unui calcul elementar (§ 2) şi apoi examinînd diferitele soluţii analitice cunoscute în literatura de specialitate (§ 3, 4) şi controlînd valorile numerice obţinute pe calculator, pentru cîteva cazuri concrete (§ 5), că varierea înălţimii unei structuri reticulate planare poate fi exprimată sub o formă foarte simplă, atît în ce priveşte săgeţile, cît şi eforturile în bare.

Rezultatele obţinute anterior pot fi generalizate sub o formă foarte simplă în cazul comportării liniar elastice a structurii, observînd că ecua-

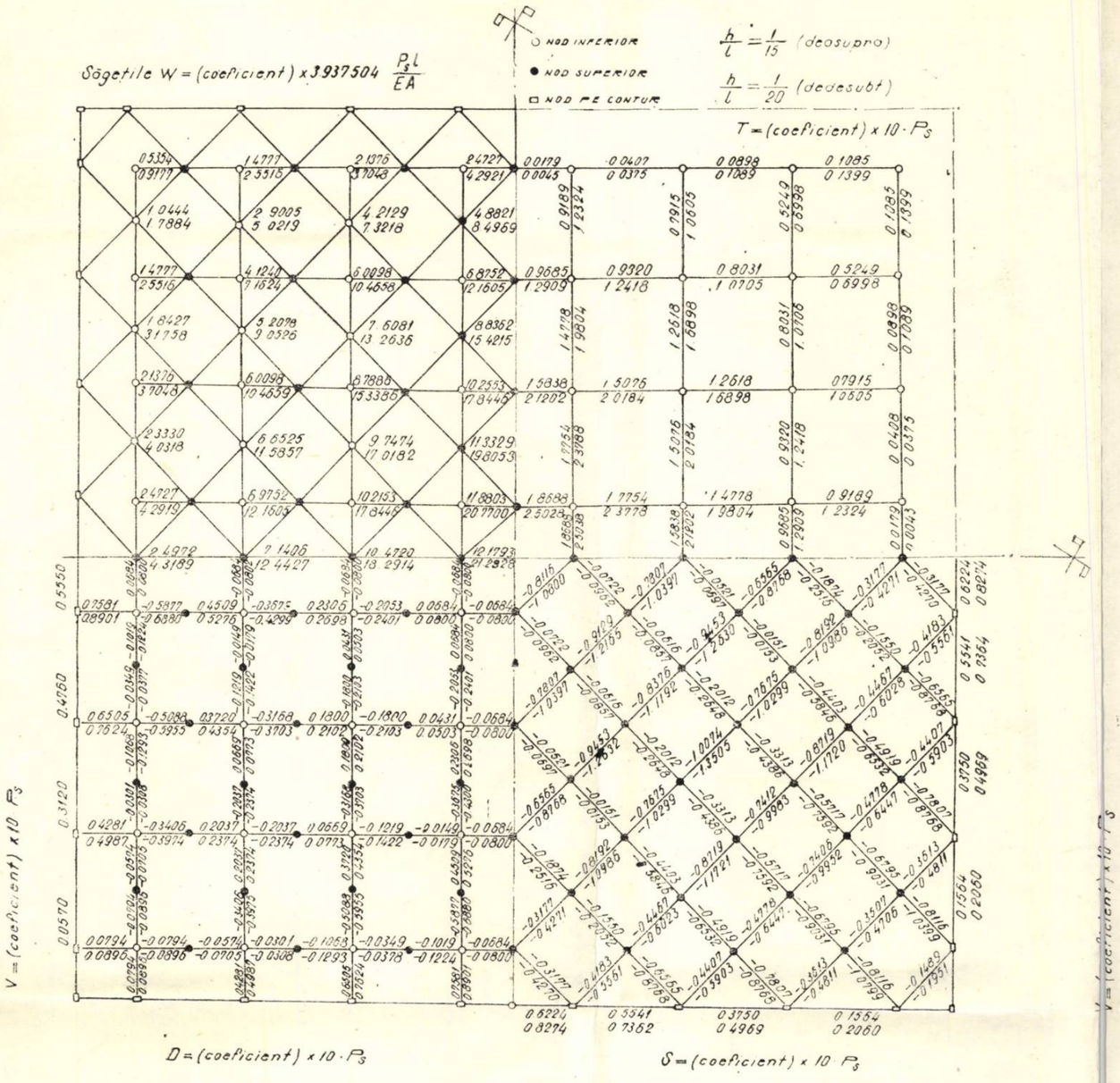


Fig. 8 — Structura planar pătrată diagonală, de secţiune constantă, încărcată în faţa superioară.

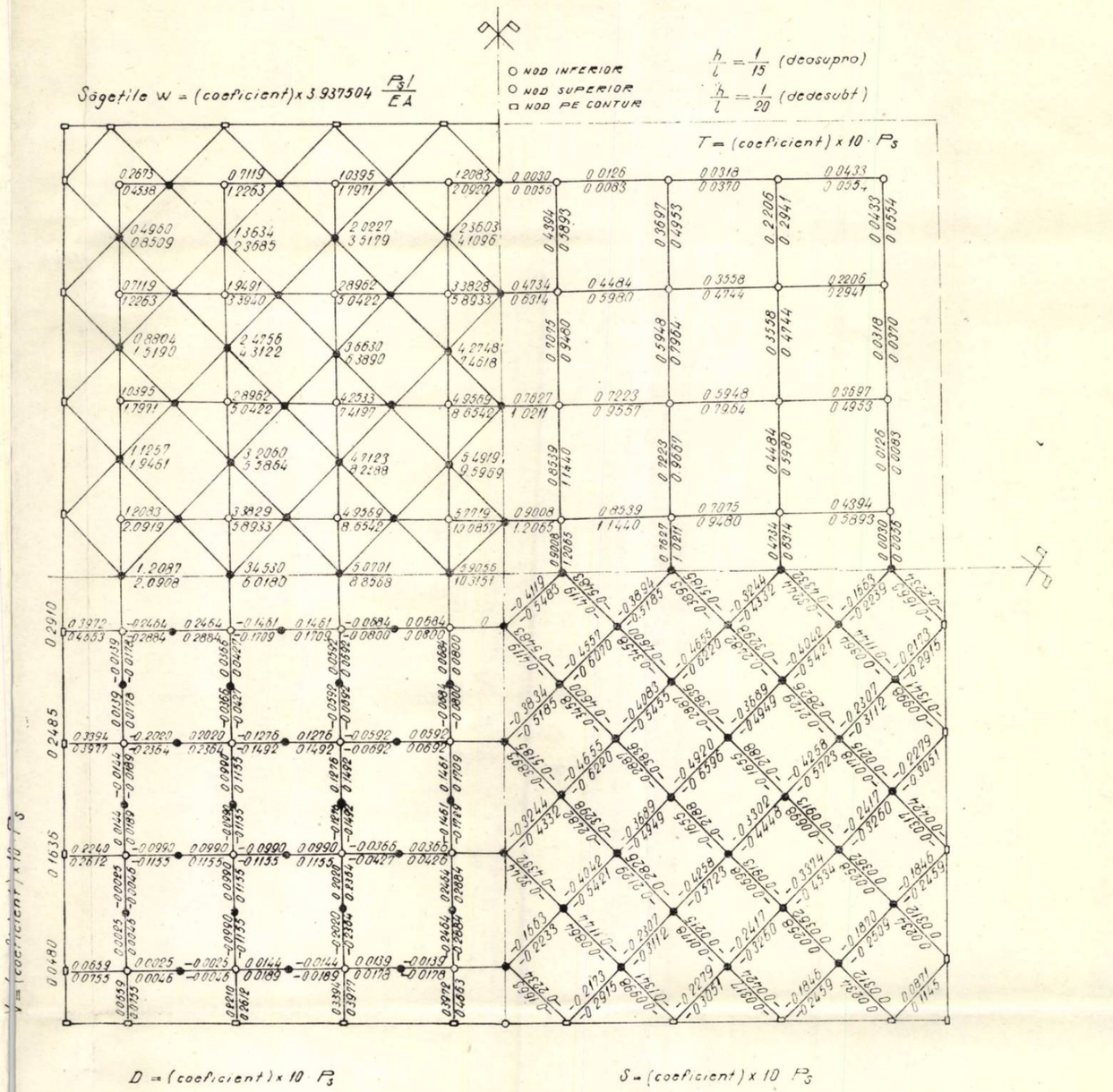


Fig. 9. — Structura planar pătrată diagonală, de secţiune constantă, încărcată în faţa inferioară.

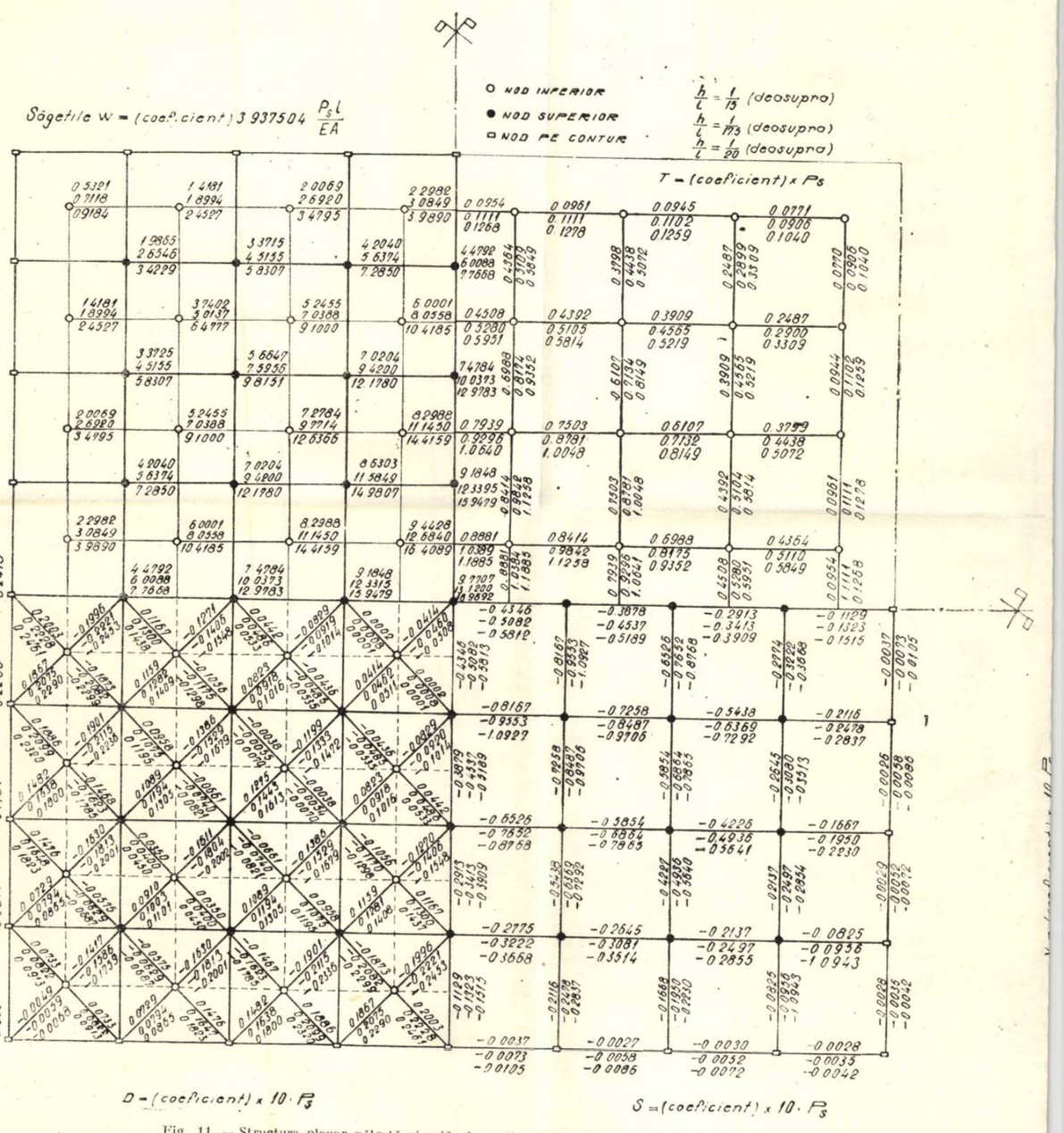


Fig. 11. — Structura planar pătrată simplă, de secţiune variabilă, încărcată în faţa superioară.

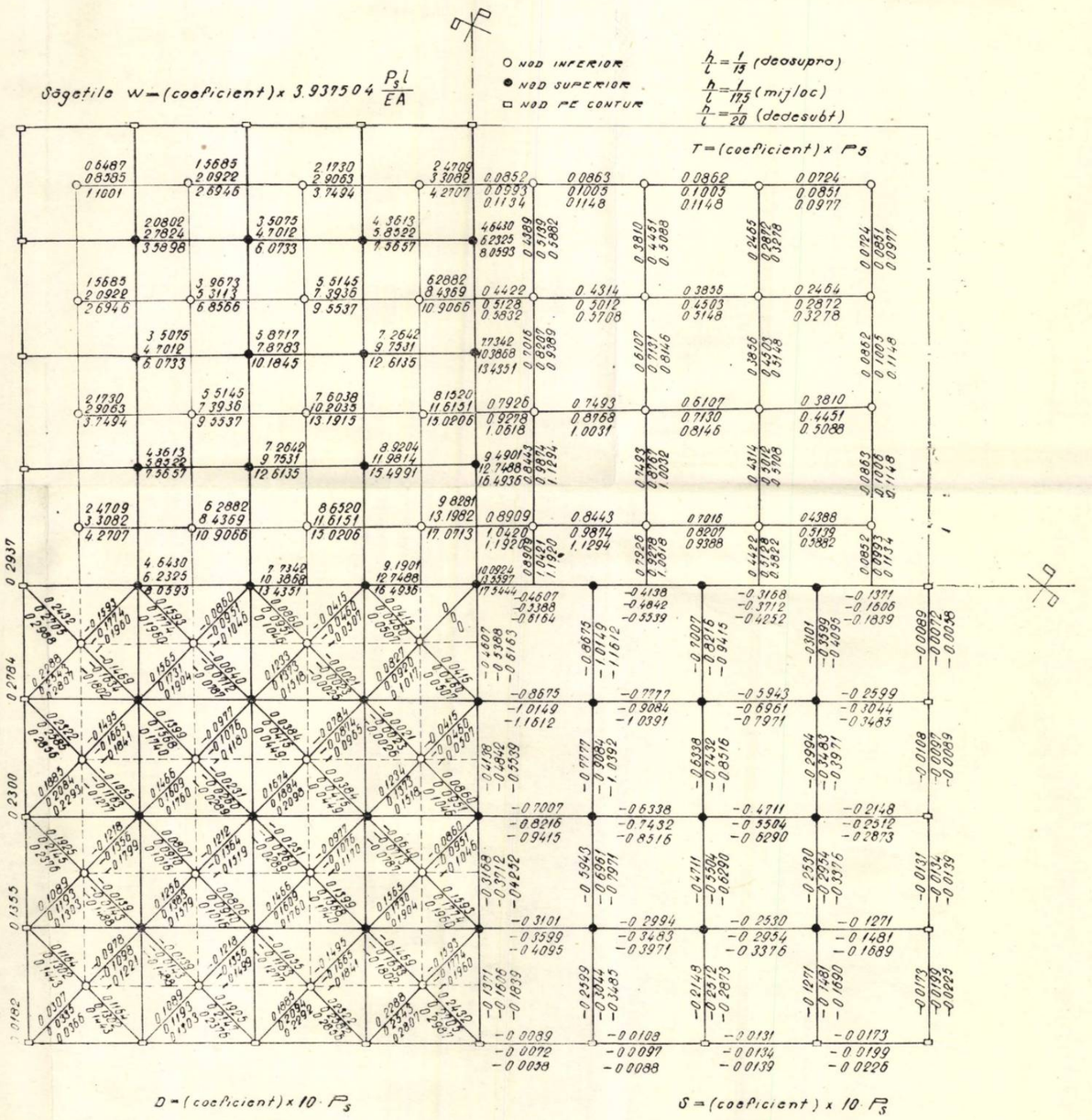


Fig. 12. — Structura planar pătrată simplă, de secţiune variabilă, încărcată în faţa inferioară.

ția diferențială pe care o satisfac săgețile w poate fi exprimată sub forma

operator diferențial liniar aplicat săgeților $w = \frac{1}{h^2} \times$ (constantă dimensională) $\times$ (operator diferențial aplicat încărcării exterioare). (30)

Operatorul diferențial liniar aplicat săgeților este cu *coeficienți constanți* în cazul cînd barele de același tip au secțiune constantă, respectiv cu *coeficienți variabili* dacă secțiunea barelor variază de la panou la panou.

Egalitatea precedentă este valabilă în cazul asimilării structurii discrete cu un mediu continuu echivalent. Ordinul operatorului diferențial aplicat săgeților este, în general, opt, pentru a marca lucrul spațial al structurii, și, în cazuri particulare, efectul de șaibă poate fi îndepărtat, iar ordinul se reduce la patru.

O analiză asemănătoare însă mai complexă este valabilă dacă se consideră structura reală discretă; în locul operatorilor diferențiali intervenind operatori cu diferențe.

Demonstrațiile au arătat că, cu foarte mici aproximații datorite influenței deformațiilor din lunecare,

i) săgețile unei structuri planare sînt invers proporționale cu pătratul înălțimii ei;

ii) eforturile în barele din cele două fețe sînt invers proporționale cu înălțimea structurii (respectiv proporționale cu cot γ, unde γ este unghiul pe care diagonalele îl fac cu planele celor două fețe);

iii) eforturile în diagonale sînt invers proporționale cu sin γ.

Aceste rezultate simple sînt evident foarte utile cînd ne gîndim la tabelarea valorilor (vezi de exemplu [8]). Dacă admitem că cunoaștem starea de eforturi și de deformații într-o structură dată, de înălțime h_1, fie

$$w_1 = \frac{C'}{h_1^2}, \quad T_1 = \frac{C''}{h_1}, \quad D_1 = \frac{C'''}{\sin\gamma_1}, \tag{31}$$

unde C', C'', C''' sînt anumite constante dimensionale, atunci pentru aceeași geometrie a structurii și aceeași încărcare, avînd însă o înălțime h_2, vor corespunde următoarele:

$$w_2 = \frac{w_1 h_1^2}{h_2^2}, \quad T_2 = \frac{T_1 h_1}{h_2}, \quad D_2 = \frac{D_1 \sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}. \tag{32}$$

Rezultatele precedente pot fi extinse, pentru săgeți, dacă admitem că starea de eforturi și de deformații este cunoscută în *două* structuri identice, diferind doar prin înălțimile h_1 și h_2, respectiv înclinările diagonalelor γ_1 și γ_2. În acest scop vom presupune că săgețile w_1 și w_2 pot fi exprimate cu ajutorul a două constante A și B, sub forma

$$w_1 = A \cot^2\gamma_1 + \frac{B}{\sin^2\gamma_1}, \tag{33a}$$

$$w_2 = A \cot^2\gamma_2 + \frac{B}{\sin^2\gamma_2}. \tag{33b}$$

Luînd o structură identică, caracterizată prin înălțimea h_3, respectiv unghiul γ_3, vom putea scrie analog

$$w_3 = A\cot^2\gamma_3 + \frac{B}{\sin^2\gamma_3}. \tag{33c}$$

Considerînd pe A, B, w_3 ca necunoscute în sistemul (33), rezultă ușor

$$w_3 = w_1 \frac{\dfrac{\cot^2\gamma_2}{\sin^2\gamma_3} - \dfrac{\cot^2\gamma_3}{\sin^2\gamma_2}}{\dfrac{\cot^2\gamma_2}{\sin^2\gamma_1} - \dfrac{\cot^2\gamma_1}{\sin^2\gamma_2}} - w_2 \frac{\dfrac{\cot^2\gamma_1}{\sin^2\gamma_3} - \dfrac{\cot^2\gamma_3}{\sin^2\gamma_1}}{\dfrac{\cot^2\gamma_2}{\sin^2\gamma_1} - \dfrac{\cot^2\gamma_1}{\sin^2\gamma_2}}. \tag{34}$$

Pentru $\gamma_3 = \gamma_1$, respectiv $\gamma_3 = \gamma_2$, relația (34) se reduce la $w_3 = w_1$, respectiv $w_3 = w_2$.

Pentru verificarea relației (34) vom relua exemplul de la punctul 5.2; fie

$$w_1 = w_{15} = 7{,}5408;\ \cot^2\gamma_1 = \frac{225}{128};\ \sin^2\gamma_1 = \frac{128}{353},$$

$$w_2 = w_{17.5} = 10{,}2401;\ \cot^2\gamma_2 = \frac{306{,}25}{128};\ \sin^2\gamma_1 = \frac{128}{434{,}25}.$$

Introducînd toate datele numerice în relația (34) se obține

$w_3' = 13{,}3547$ (diferență de $1{,}24^0/_{00}$ față de valoarea exactă).

Expresiile eforturilor sînt date sub forma

$$T_3 = \frac{T_1 h_1}{h_3} = \frac{T_2 h_2}{h_3},\quad D_3 = \frac{D_1 \sin\gamma_1}{\sin\gamma_3} = \frac{D_2 \sin\gamma_2}{\sin\gamma_3}. \tag{35}$$

În cele expuse precedent discuția a trebuit să fie restrînsă la cîteva geometrii uzuale, însă concluziile au un caracter de generalitate.

Primită la redacție la 3 noiembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. B. KATO, K. TAKANASHI, Y. TSUSHIMA, T. HIRATA, *The analysis of a space truss composed of square pyramid units*, Space Structures (R. N. Davies Editor), Oxford and Edinburgh, Blackwell Scientific Publications, 1967, p. 201–212.

2. L. KOLLÁR, *Analysis of Double-Layer Space Trusses with Diagonally Square Mesh by the Continuum Method*, Acta Techn. Acad. Sci. Hngaricae, **76**, *3—4*, 273—292 (1974).
3. Z. S. MAKOWSKI, *Raumfachwerke*, Beratungsstelle für Stahlverwendung, Düsseldorf, 1980.
4. J. D. RENTON, *General properties of space grids*, Int. J. mech. Sci., Pergamon Press, *12*, 801—810 (1970).
5. M. V. SOARE, *Contribution à l'étude des réseaux spatiaux planaires simples par la méthode des différences finies*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc.Appl., **14**, *5*, **949—984** (1969).
6. — *Contribuții la studiul rețelelor spațiale planar pătrate diagonale*, Construcții și materiale de construcții, **24**, *8*, 423—440 (1970).
7. — *Încovoierea cilindrică a rețelelor spațiale planar pătrate diagonale*, St. cerc. mec. apl., **30**, *2*, 275—306 (1971).
8. M. V. SOARE, A. PÂRVU, M. DINCULESCU, *Rețele spațiale planar pătrate diagonale. Planșe cu coeficienți pentru calculul eforturilor și săgeților*, Studii și cercetări INCERC, *1*, București, 1971.
9. M. V. SOARE, *Statica și dinamica rețelelor spațiale planar pătrate simple prin aplicarea metodei mediului continuu echivalent*, St. cerc. mec. apl., **31**, *3*, 673—702 (1972).
10. — *On the Statics and Dynamics of Double-Layer Oblique Square Mesh Grids*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungaricae, **79**, *3—4*, 335—350, (1974).
11. — *Contributions to the Analysis of Double-Layer Mesh Grids*, Proceedings of the 2nd International Conference on Space Structures, Guildford, Surrey, 1976, p. 159—168.

2. L. KOLLÁR, *Analysis of Double-Layer Space Trusses with Diagonally Square Mesh by the Continuum Method*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungaricae, 76, 3–4, 273–292 (1974).
3. Z. S. MAKOWSKI, *Raumfachwerke*, Beratungsstelle für Stahlverwendung, Düsseldorf, 1980.
4. J. D. RENTON, *General properties of space grids*, Int. J. mech. Sci., Pergamon Press, 12, 801–810 (1970).
5. M. V. SOARE, *Contribution à l'étude des réseaux spatiaux planaires simples par la méthode des différences finies*, Rev. Roum. Sci. Techn. – Méc.Appl., 14, 5, 949–984 (1969).
6. — *Contribuţii la studiul reţelelor spaţiale planar pătrate diagonale*, Construcţii şi materiale de construcţii, 24, 8, 423–440 (1970).
7. — *Incovoierea cilindrică a reţelelor spaţiale planar pătrate diagonale*, St. cerc. mec. apl., 30, 2, 275–306 (1971).
8. M. V. SOARE, A. PÂRVU, M. DINCULESCU, *Reţele spaţiale planar pătrate diagonale. Planşe cu coeficienţi pentru calculul eforturilor şi săgeţilor*, Studii şi cercetări INCERC, 1, Bucureşti, 1971.
9. M. V. SOARE, *Statica şi dinamica reţelelor spaţiale planar pătrate simple prin aplicarea metodei mediului continuu echivalent*, St. cerc. mec. apl., 31, 3, 673–702 (1972).
10. — *On the Statics and Dynamics of Double-Layer Oblique Square Mesh Grids*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungaricae, 79, 3–4, 335–350, (1974).
11. — *Contributions to the Analysis of Double-Layer Mesh Grids*, Proceedings of the 2nd International Conference on Space Structures, Guildford, Surrey, 1976, p. 159–168.

UTILIZAREA METODEI DE APROXIMARE A CELOR MAI MICI PĂTRATE ÎN PROBLEME DE SINTEZĂ A MECANISMELOR

de D. LARIONESCU
Institutul politehnic București

Se face o trecere în revistă a principalelor etape în desfășurarea metodei de aproximare a celor mai mici pătrate în legătură cu problemele de sinteză a mecanismelor. Se insistă asupra necesității aducerii funcției aproximate la forma unui polinom generalizat și se fac precizări asupra numărului parametrilor cinematici impuși de tema de proiectare ce trebuie calculați. Se apreciază în final utilitatea metodei celor mai mici pătrate pentru rezolvarea problemelor de sinteză a mecanismelor.

a) DEFINIREA METODEI

Fie A o submulțime nevidă de elemente ale unui anumit spațiu liniar X, și $\bar{v}$ un vector din X. Problema fundamentală a aproximării este găsirea unui element $\bar{v}_0 \in A$, așa încît pentru orice $\bar{x} \in A$ să rezulte:

$$d(\bar{v}, \bar{v}_0) \leqslant d(\bar{v}, \bar{x}), \tag{1}$$

unde prin d s-a notat distanța din spațiul X definită de normă

$$d(\bar{v}, \bar{v}_0) = \|\bar{v} - \bar{v}_0\|.$$

Elementul căutat $\bar{v}_0$, dacă există, este la cea mai mică distanță de $\bar{v}$ dintre toate punctele lui A.

Se vede imediat că soluția acestei probleme, dacă există, depinde de $\bar{v}$, A, $\bar{x}$ și metrica spațiului. De obicei se urmărește o aproximare liniară, adică a exprimării lui $\bar{v}_0$ ca o combinație liniară de elementele unei mulțimi maximale de vectori liniari independenți din A. De exemplu, dacă A conține cel mult n elemente liniar independente $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\}$, vom căuta coeficienții necunoscuți c_k din expresia

$$\bar{v}_0 = c_1\bar{f}_1 + c_2\bar{f}_2 + \ldots + c_n\bar{f}_n \tag{2}$$

astfel încît să fie satisfăcută relația (1).

Dacă metrica unui spațiu este generată de un produs scalar, problema distanței minime dintre două elemente are o reprezentare geometrică simplă. Presupunem că X este un spațiu euclidian de dimensiune n, iar A un hiperplan de dimensiune mai mică decît n. Folosind limbajul geometriei

elementare, putem spune că punctul $\bar{v}_0 \in A$ cu cea mai mică distanţă pînă la $\bar{v}$ este piciorul perpendicularei coborîte din $\bar{v}$ pe A.

Problema aproximării celor mai mici pătrate impune ca $\bar{v}_0$ definit de (2) să fie astfel calculat încît să dea „cea mai bună" reprezentare a lui $\bar{v}$ în sensul inegalităţii

$$\|\bar{v} - \bar{x}\| > \|\bar{v} - \bar{v}_0\|, \tag{3}$$

oricare ar fi $\bar{x} \in A$.

b) EXISTENŢĂ ŞI UNICITATE

Fie $\bar{v}$ un vector al unui spaţiu cu produs scalar finit dimensional X, iar A un subspaţiu al lui X cu o submulţime maximală de vectori ortonormali

$$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}. \tag{4}$$

Minimul expresiei

$$\left\| \bar{v} - \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{e}_k \right\|, \tag{5}$$

pentru toate valorile posibile ale coeficienţilor c_k, va corespunde alegerii:

$$c_k = (\bar{v}, \bar{e}_k), \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{6}$$

Pentru orice alte valori ale coeficienţilor c_k, vom avea

$$\left\| \bar{v} - \sum_{k=1}^{n} (\bar{v}, \bar{e}_k)\, \bar{e}_k \right\| < \left\| \bar{v} - \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{e}_k \right\|. \tag{7}$$

c) DETERMINAREA COEFICIENŢILOR

Să considerăm cazul mai general în care subspaţiul A este generat nu de o mulţime ortonormală, ci doar de o mulţime de vectori liniar independenţi

$$\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots \bar{f}_n\}. \tag{8}$$

Fie $\bar{v}$ un vector oarecare al lui X. Dacă $\bar{v} \in A$, atunci $\bar{v}$ poate fi reprezentat în mod unic ca o combinaţie liniară de vectori ai unei baze a lui A, de exemplu de vectorii mulţimii $\{\bar{f}_k\}$. Dacă $\bar{v} \notin A$, atunci reprezentarea

liniară optimă a lui $\bar{v}$ în funcție de elementele lui $\{\bar{f}_k\}$, în sensul celor mai mici pătrate, este vectorul $\bar{v}_0$ unic, de forma

$$\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{f}_k , \tag{9}$$

unde coeficienții c_k sînt calculați din următorul sistem de ecuații liniare :

$$(\bar{v} - \Sigma c_k (\bar{f}_k, \bar{f}_j)) = 0 \; ; \quad j = 1, 2, \ldots n . \tag{10}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} &c_1 (\bar{f}_1, \bar{f}_1) + c_2 (\bar{f}_2, \bar{f}_1) + \ldots + c_n (\bar{f}_n, \bar{f}_1) = (\bar{v}, \bar{f}_1) , \\ &c_1 (\bar{f}_1, \bar{f}_2) + c_2, (\bar{f}_2, \bar{f}_2) + \ldots + c_n (\bar{f}_n, \bar{f}_2) = (\bar{v}, \bar{f}_2) , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_1 (\bar{f}_1, \bar{f}_n) + c_2 (\bar{f}_2, \bar{f}_n) + \ldots + c_n (\bar{f}_n, \bar{f}_n) = (\bar{v}, \bar{f}_n) . \end{aligned} \tag{11}$$

Aceste ecuații sînt cunoscute drept ecuații normale, iar determinantul transpusei matricei coeficienților lor, sub numele de determinantul Gram al elementelor $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots \bar{f}_n\}$.
Dacă acest element formează o mulțime ortonormală, calculul coeficienților c_k se face direct, folosind relația (6).

d) EVALUAREA ERORII

Fie $\bar{v}_0 \in A$, aproximarea liniară prin metoda celor mai mici pătrate a lui $\bar{v}$. Dacă notăm cu $\bar{\Delta}$ vectorul eroare a acestei aproximații, adică

$$\bar{\Delta} = \bar{v} - \bar{v}_0 , \tag{12}$$

atunci minimul pătratului normei erorii este

$$\|\bar{\Delta}\|^2 = \|\bar{v} - \bar{v}_0\|^2 = (\bar{v} - \bar{v}_0, \bar{v} - \bar{v}_0) = (\bar{v} - \bar{v}_0, \bar{v}) = (\bar{v}, \bar{v}) - (\bar{v}_0, \bar{v}). \tag{13}$$

Relația (13) se poate scrie, ținînd seama de valoarea (9) pentru $\bar{v}_0$, astfel :

$$c_1 (\bar{f}_1, \bar{v}) + c_2 (\bar{f}_2, \bar{v}) + \ldots + c_n (\bar{f}_n, \bar{v}) + \|\bar{\Delta}\|^2 - (\bar{v}, \bar{v}) = 0. \tag{14}$$

Adăugînd această ecuație la sistemul de n ecuații cu n necunoscute (11) obținem un sistem de $(n + 1)$ ecuații ce trebuie să ne dea o soluție unică

pentru coeficienţii c_k, valori optime în sensul aproximării a celor mai mici pătrate. Conform teoriei sistemelor de ecuaţii liniare, determinatul acestui sistem trebuie să fie nul,

$$\begin{vmatrix} (\bar{f}_1, \bar{f}_1) \dots (\bar{f}_n, \bar{f}_1) & -(\bar{v}, \bar{f}_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ (\bar{f}_1, \bar{f}_n) \dots (\bar{f}_n, \bar{f}_n) & -(\bar{v}, \bar{f}_n) \\ (\bar{f}_1, \bar{v}) \dots (\bar{f}_n, \bar{v}) & -(\bar{v}, \bar{v}) \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Dacă notăm prin $g(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots \bar{f}_n)$ determinantul Gram al vectorilor $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$,

adică

$$g(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots \bar{f}_n) = \begin{vmatrix} (\bar{f}_1, \bar{f}_1) \dots (\bar{f}_n, \bar{f}_1) \\ (\bar{f}_1, \bar{f}_2) \dots (\bar{f}_n, \bar{f}_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\bar{f}_1, \bar{f}_n) \dots (\bar{f}_n, \bar{f}_n) \end{vmatrix}, \tag{16}$$

şi

$$g(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots f_n, \bar{v}) = \begin{vmatrix} (\bar{f}_1, \bar{f}_1) \dots (\bar{f}_n, \bar{f}_1) & (\bar{v}, \bar{f}_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ (\bar{f}_1, \bar{f}_n) \dots (\bar{f}_n, \bar{f}_n) & (\bar{v}, \bar{f}_n) \\ (\bar{f}_1, \bar{v}) \dots (\bar{f}_n, \bar{v}) & (\bar{v}, \bar{v}) \end{vmatrix}, \tag{17}$$

atunci dezvoltarea determinatului (15) după ultima coloană, ţinînd seama de relaţia (14) şi de valorile coeficienţilor c_k calculaţi din sistemul (11) ne dă

$$\|\bar{\Delta}\|^2 g(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots \bar{f}_n) = g(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots \bar{f}_n, \bar{v}), \tag{18}$$

deci minimul normei erorii poate fi exprimat sub formă compactă :

$$\|\bar{\Delta}\|^2 = \frac{g(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots \bar{f}_n, \bar{v})}{g(\bar{f}_1, f_2, \dots \bar{f}_n)}. \tag{19}$$

e) APLICAREA METODEI LA PROBLEME DE SINTEZĂ A MECANISMELOR

Considerînd legile de mișcare impuse de tema de proiectare drept funcții reale de pătrat integrabil pe un segent $[a, b]$ se poate considera drept spațiu X, spațiul $L^2[a, b]$ în care metrica este generată de produsul scalar,

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt, \tag{20}$$

unde $f(x)$ și $g(x)$ sînt puncte ale spațiului vectorial $L^2[a, b]$. Subspațiu-$A \subset X$ poate fi în acest caz format de funcții de tipul $F(\bar{a}, x)$, unde vectorul $\bar{a} \in V$ are drept componente parametrii cinematici ai mecanismului: $a_1, a_2, \ldots a_n$. Cazul liniar al aproximării rezultă cînd V este un spațiu vectorial și funcțiile $F(\bar{a}, x)$ sînt funcționale liniare pe A pentru fiecare x fix. În caz contrar problema de aproximare este neliniară.

Pentru un punct $f \in X$ dat (adică pentru o anumită funcție f reprezentînd o lege de mișcare impusă de tema de sinteză) problema de aproximare revine la a găsi un punct $F_0 \in A \subset X$ care să fie „cel mai aproape" de f dintre toate punctele subspațiului A.

În sinteza mecanismelor, prima și una dintre cele mai importante etape constă în aducerea funcției aproximante F la forma unui „polinom generalizat" adică la forma

$$F(\bar{a}, x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x), \tag{21}$$

unde $c_0, c_1, \ldots c_n$ sînt coeficienți necunoscuți ce trebuie determinați funcție de parametri cinematici ai mecanismului, iar funcțiile cunoscute: $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ sînt liniar independente depinzînd numai de parametrul independent ales x.
Funcția abatere va fi în acest caz de forma

$$\Delta(x) = f(x) - F(\bar{a}, x). \tag{22}$$

Ținînd seama de forma produsului scalar (20), se formează sistemul (11) și se rezolvă pentru a determina coeficienții necunoscuți c_k. Cu acești coeficienți c_k se formează în continuare un sistem de ecuații ce permite calculul parametrilor cinematici ai mecanismului ce urmează a fi calculat.

Pentru a aduce funcția F la forma (21) se folosesc de obicei valori ponderate și chiar aproximări ale acestora. Este o etapă importantă în calcule și impune multă abilitate din partea proiectantului. De asemenea, deseori coeficienții c_k depind de un număr mare de parametrii. De exemplu la proiectarea mecanismelor de calculat numărul total de parametrii este de obicei egal cu șapte.

Calcularea directă a tuturor parametrilor cinematici ce urmează a fi determinați, este o operațiune foarte dificilă și în afară de aceasta, poate duce la o soluție neconstructivă. Mai rațional este să se calculeze numai o parte din parametrii, ceilalți fiind aleși aplicînd metode empirice

de sinteză astfel ca să fie satisfăcute condiţiile date. Atunci, variind unul din parametri ce se calculează, putem obţine o familie de mecanisme şi apoi să alegem acel mecanism care satisface toate condiţiile puse.

Alegerea numărului parametrilor ce trebuie calculaţi este determinată în principal de precizia impusă pentru aproximare. Cu cît este mai mare această precizie cu atît mai mare trebuie să fie luat numărul parametrilor cinematici ce trebuie calculaţi, dar deoarece cu creşterea numărului parametrilor de calculat creşte în mod apreciabil şi caracterul laborios al calculelor, rezultă că trebuie să căutăm o soluţie satisfăcătoare a problemei pentru un număr minim de parametri ce urmează a fi calculaţi.

În ceea ce priveşte abaterea maximă de la legea de mişcare impusă de tema de proiectare, aceasta va fi mai mare folosind metoda celor mai mici pătrate decît, de exemplu, metoda ce utilizează aproximarea în sensul lui Cebîşev.

Totuşi, pentru cazurile în care legea de mişcare impusă are un grafic în pantă uşoară, abaterea maximă diferă puţin de abaterea medie pătratică determinată prin metoda celor mai mici pătrate.

În afară de aceasta, la unele mecanisme, la aprecierea exactităţii, este bine să se ţină seama nu numai de abaterea maximă de la legea de mişcare impusă ci şi de abaterea medie pătratică, deoarece uneori folosirea metodei celor mai mici pătrate permite ca fără să se mărească în mod sensibil abaterea maximă, să se îmbunătăţească totuşi în mod apreciabil, în medie, aproximarea cu legea de mişcare dată.

În plus, folosirea metodei aproximării în sensul lui Cebîşev conduce uneori la determinarea unor dimensiuni neconstructive ale mecanismului. În aceste cazuri calculînd o parte a parametrilor cinematici prin metoda celor mai mici pătrate, se poate obţine o familie de mecanisme şi apoi să se aleagă acel mecanism care satisface toate condiţiile puse.

Studiile teoretice permit să considerăm metoda celor mai mici pătrate drept cea mai comodă pentru rezolvarea majorităţii problemelor legate de proiectarea mecanismelor plane pentru reproducerea atît a unei legi date a mişcării, cît şi pentru reproducerea unei traiectorii date.

Primită la redacţie la 28 noiembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. ARTOBOLEVSKI, N. I. LEVITSKI, S. A. CERCUDINOV, *Sintez ploskih mehanismov*, Fizmatghiz, Moskva, 1958.
2. R. C. BOGDAN, D. LARIONESCU, *Aprecieri asupra sintezei mecanismelor interpretată ca o problemă neliniară de aproximare*, St. cerc. mec. apl., **34**, *3* (1975).
3. R. C. BOGDAN, D. LARIONESCU, S. CONONOVICI, *Sinteza mecanismelor plane articulate*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1977.
4. R. FAZLALLAH, *Spaţii liniare*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.

ECUAȚII DE ÎNCHIDERE PENTRU LANȚURILE CINEMATICE ALE MECANISMELOR CU ELEMENTE LINIAR ELASTICE

de M. BUCULEI, D. BĂGNARU
Universitatea din Craiova

În lucrare se deduc ecuații de închidere pentru viteze și accelerații în cazul lanțurilor cinematice închise, monocontur, elementele cinematice fiind solide liniar elastice. Plecînd de la aceste ecuații de închidere se prezintă un algoritm de analiză cinetoelastică a mecanismelor.

1. INTRODUCERE

Pentru un lanț cinematic monocontur, format din elemente cinematice liniar elastice, se deduc mai jos ecuații de închidere pentru viteze și accelerații, în două variante :

— a) cînd se presupune că vectorul vîrtej $\bar{\omega}$ este același, la un moment dat, în toate punctele unui element cinematic ;

— b) cînd se presupune că vectorul vîrtej $\bar{\omega}$ are o componentă ce depinde de punct.

Considerarea uneia sau alteia dintre situațiile a) și b) se face în funcția de deformabilitatea mai mare sau mai mică a elementului cinematic [1].

Ecuațiile de închidere deduse reprezintă generalizări, în cazul elementelor cinematice deformabile, ale ecuațiilor de închidere cunoscute de la lanțurile cu elemente rigide [6, 7, 8]. Ele formează astfel fundamentul unei metode de analiză cinetoelastică, ce va fi dată mai jos.

2. ECUAȚII DE ÎNCHIDERE ÎN CAZUL $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$

Fie un lanț cinematic monocontur, închis, format din elementele cinematice $0, 1, \ldots, n$, considerate ca fiind solide liniar elastice (fig. 1).

Fie M un punct arbitrar în solidul $(i+1)$. Se consideră în cupla A_i două puncte suprapuse : $A_i^{(i)} \in (i)$ și $A_i^{(i+1)} \in (i+1)$.

Adaptînd relațiile de distribuție a vitezelor și accelerațiilor pentru un solid liniar elastic în mișcarea de rototranslație date în [2, 5], se pot

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 3, 1981, P. 369—375

scrie pentru viteza și accelerația punctului M următoarele relații:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{A_i^{(i)}} + \bar{\omega}_{i+1} \times \overline{A_i M} + \frac{\partial \bar{u}_M}{\partial t} + \bar{\omega}_{i+1} \times \bar{u}_M + \bar{v}^{(r)}_{i+1,i}, \tag{1}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_{A_i^{(i)}} + \bar{\varepsilon}_{i+1} \times \overline{A_i M} + \bar{\omega}_{i+1} \times (\bar{\omega}_{i+1} \times \overline{A_i M}) +$$

$$+ \frac{\partial^2 \bar{u}_M}{\partial t^2} + 2\bar{\omega}_{i+1} \times \frac{\partial \bar{u}_M}{\partial t} + \bar{\varepsilon}_{i+1} \times \bar{u}_M + \tag{2}$$

$$+ \bar{\omega}_{i+1} \times (\bar{\omega}_{i+1} \times \bar{u}_M) + \bar{a}^r_{i+1,i} + 2\bar{\omega}_i \times \bar{v}^r_{i+1,i},$$

unde

$\bar{u}_M$ este deplasarea liniar elastică în M: $\bar{u}_M = \bar{u}_M(M, t)$; $\bar{v}^r_{i+1,i}$ — viteza relativă dintre elementele $(i+1)$ și (i), permisă de cupla cinematică din A_i; $\bar{a}^r_{i+1,i}$ — accelerația relativă dintre elementele $(i+1)$ și (i), permisă de cupla cinematică din A_i; $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_i(t)$ — viteza unghiulară a elementului (i); $\bar{\varepsilon}_i = \bar{\varepsilon}_i(t)$ — accelerația unghiulară a elementului (i).

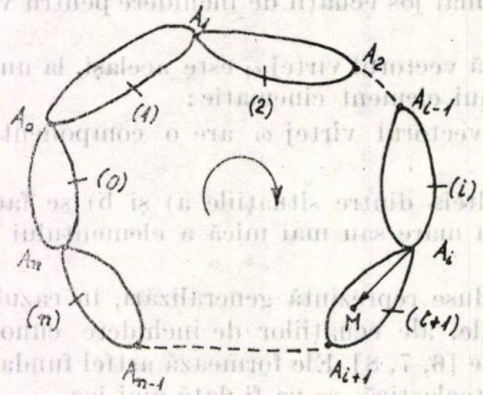


Fig. 1. — Lanț cinematic simplu închis.

S-a presupus că toate punctele unui element cinematic (i) au instantaneu același vector vîrtej $\bar{\omega}_i$ egal cu viteza unghiulară în mișcarea de rototranslație. În această ipoteză, relațiilor (1) și (2) li se pot adăuga relațiile cunoscute

$$\bar{\omega}_{i+1} = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i+1,i}, \tag{3}$$

$$\bar{\varepsilon}_{i+1} = \bar{\varepsilon}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{\omega}_{i+1,i} + \bar{\varepsilon}_{i+1,i}, \tag{4}$$

unde $\bar{\omega}_{i+1,i}$ este viteza unghiulară relativă dintre elementele $(i+1)$ și (i), permisă de cupla cinematică din A_i,

$\bar{\varepsilon}_{i+1,i}$ — accelerația unghiulară relativă dintre elementele $(i+1)$ și (i), permisă de cupla cinematică din A_i.

Din (1), (2), (3) și (4) rezultă următoarele ecuații de închidere pentru viteze și accelerații :

$$\sum_{(i)} \overline{OA_i} \times \bar{\omega}_{i+1,i} + \sum_{(i)} \bar{v}^r_{i+1,i} + \sum_{(i)} \frac{\partial \bar{u}_{Ai}}{\partial t} + \sum_{(i)} \bar{\omega}_i \times \frac{\partial \bar{u}_{Ai}}{\partial t} = \bar{0}, \tag{5}$$

$$\sum_{(i)} [\overline{OA_i} \times (\bar{\varepsilon}_{i+1,i} + \bar{\omega}_i \times \bar{\omega}_{i+1,i})] + \sum_{(i)} [\bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \overline{A_{i-1}A_i})] +$$
$$+ \sum_{(i)} \frac{\partial^2 \bar{u}_{Ai}}{\partial t^2} + 2 \sum_{(i)} \left[\bar{\omega}_i \times \frac{\partial \bar{u}_{Ai}}{\partial t} \right] + \sum_{(i)} (\bar{\varepsilon} \times \bar{u}_{Ai}) +$$
$$+ \sum_{(i)} [\bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{u}_{Ai})] + \sum_{(i)} \bar{a}^{(r)}_{i+1,i} + \sum_{(i)} \bar{a}^{(c)}_{i+1,i} = \bar{0}, \tag{6}$$

$$\bar{\omega}_{i+1} = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i+1,i}, \tag{7}$$

$$\bar{\varepsilon}_{i+1} = \bar{\varepsilon}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{\omega}_{i+1,i} + \bar{\varepsilon}_{i+1,i}. \tag{8}$$

S-a notat $\bar{a}^{(c)}_{i+1,i} = 2\bar{\omega}_i \times \bar{v}^{(r)}_{i+1,i}$.

Pentru lanțuri cinematice plane ecuațiile (5), (6), (7), (8) se particularizează corespunzător, avînd

$$\bar{\omega}_i \times \bar{\omega}_{i+1,i} = \bar{0}\ ;\ \sum_{(i)} \bar{\omega}_i \times (\omega_i \times \overline{A_{i-1}A_i}) = -\sum_{(i)} \omega_i^2 \cdot \overline{A_{i-1}A_i}\ ;$$
$$\sum_{(i)} \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{u}_{Ai}) = -\sum_{(i)} \omega_i^2 \bar{u}_{Ai}. \tag{9}$$

În aplicațiile practice, pentru analiza cinetoelastică a mecanismelor, se poate folosi algoritmul de mai jos, bazat pe metoda aproximațiilor succesive :

— Se consideră că elementele cinematice sînt solide rigide, adică $\bar{u}_{Ai} = \bar{0}$, și folosind metoda ciclurilor independente se face analiza cinematică a mecanismului.

— Cu elementele de rototranslație determinate la etapa de mai sus se face analiza vibrațiilor.

Se recomandă ca analiza vibrațiilor să se facă pe lanțuri cinematice (global) folosind teoria distribuțiilor și procedeul descris în [9].

Ca rezultat al analizei vibrațiilor se determină deplasările $\bar{u}_{Ai}$.

— Folosind ecuațiile de închidere (5), (6), (7) și (8) în care se introduc deplasările $\bar{u}_A$, determinate la etapa precedentă, se determină din nou elementele rototranslației. De remarcat că se vor face înlocuirile $\overline{OA_i} \to \overline{OA_i} + \bar{u}_{Ai}$.

Procesul se repetă de un număr de ori, în funcţie de precizia impusă apriori. Analiza cinetoelastică se va face cu asistenţa calculatorului numeric, volumul de calcul fiind apreciabil.

3. ECUAŢII DE ÎNCHIDERE ÎN CAZUL $\bar{\omega}=\bar{\omega}(M, t)$

În cazul cînd deformaţiile sînt apreciabile, peste viteza unghiulară aferentă rototranslaţiei unui element cinematic se suprapune vîrtejul local, acesta din urmă fiind dependent de punct şi de timp. Se obţine astfel un vîrtej total. Astfel, spre exemplu, vîrtejul total în

$$A_{i-1}^{(i)} \text{ este } \bar{\omega}_{A_{i-1}}^{(i)} = \bar{\omega}^{(i)} + \bar{\omega}_{A_{i-1},l}^{(i)}, \tag{10}$$

unde $\bar{\omega}^{(i)}$ este viteza unghiulară în mişcarea de rototranslaţie;

$\bar{\omega}_{A_{i-1},l}^{(i)}$ — vîrtejul local în $A_{i-1}^{(i)}$ dat de

$$\bar{\omega}_{A_{i-1},l}^{(i)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} (\bar{u}_{A_{i-1}}^{(i)}), \tag{11}$$

$\bar{u}_{A_{i-1}}^{(i)}$ fiind deplasarea în $A_{i-1}^{(i)}$, care se determină printr-o analiză elastodinamică a cuplei A_{i-1}.

Deplasarea totală $\bar{u}_A$ din paragraful precedent presupune apriori o analiză a comportamentului elastodinamic al cuplei, căci, în general, $\bar{u}_{A_{i-1}}^{(i)} \neq \bar{u}_{A_{i-1}}^{(i-1)}$.

Pentru cazul uzual al cuplelor de rotaţie se poate presupune, în primă aproximaţie, că $\bar{u}_{A_{i-1}}^{(i)} = \bar{u}_{A_{i-1}}^{(i-1)}$.

Un studiu mai aprofundat implică şi analiza hidrodinamică a cuplelor [3, 10].

Fie elementul (i) aparţinînd lanţului cinematic închis monocontur, considerat în paragraful precedent. Se face o diviziune a segmentului $A_{i-1}A_i$ în n_i subintervale egale, n_i fiind suficient de mare ca vîrtejul local şi componentele tensorului viteză de deformaţie să poată fi considerate constante pe fiecare dintre subintervale.

Folosind rezultatele din [1] se poate scrie

$$\bar{v}_{A_i} = \bar{v}_{A_{i-1}} + \frac{1}{n_i}\bar{M}_i \times \overline{A_{i-1}A_i} + \bar{N}_i + \bar{v}_{i,i-1}^{(r)}, \tag{12}$$

unde

$$\bar{M}_i = n_i \bar{\omega}_{A_{i-1}}^{(i)} + C_{n_i}^2 \cdot \frac{\partial \bar{\omega}_{A_{i-1}}^{(i)}}{\partial x_{i_1}^{(i)}} \cdot \frac{(x_{i_1}^{(i)} - x_{i_1}^{(i-1)})}{n_i} +$$

$$+ C_{n_i}^3 \cdot \frac{\partial^2 \bar{\omega}_{A_{i-1}}^{(i)}}{\partial x_{i_1}^{(i)} \partial x_{i_2}^{(i)}} \cdot \frac{(x_{i_1}^{(i)} - x_{i_1}^{(i-1)}) \cdot (x_{i_2}^{(i)} - x_{i_2}^{(i-1)})}{n_i^2} +$$

$$+ \ldots + C_{n_i}^{n_i} \frac{\partial^{n_i-1} \bar{\omega}_{A_{i-1}}^{(i)}}{\partial x_{i_1}^{(i)} \ldots \partial x_{i_{n_i-1}}^{(i)}} \cdot \frac{(x_{i_1}^{(i)} - x_{i_1}^{(i-1)}) \ldots (x_{i_{n_i-1}}^{(i)} - x_{i_{n_i-1}}^{(i-1)})}{n_i^{n_i-1}}, \quad (13)$$

$$\bar{N}_i = n_i \cdot \nabla \Phi_{A_{i-1}} + C_{n_i}^2 \cdot \frac{\partial(\nabla \Phi_{A_{i-1}})}{\partial x_{i_1}^{(i)}} \frac{(x_{i_1}^{(i)} - x_{i_1}^{(i-1)})}{n_i} +$$

$$+ C_{n_i}^3 \frac{\partial^2(\nabla \Phi_{A_{i-1}})}{\partial x_{i_1}^{(i)} \partial x_{i_2}^{(i)}} \cdot \frac{(x_{i_1}^{(i)} - x_{i_1}^{(i-1)}) \cdot (x_{i_2}^{(i)} - x_{i_2}^{(i-1)})}{n_i^2} +$$

$$+ \ldots + C_{n_i}^{n_i} \cdot \frac{\partial^{n_i-1}(\nabla \Phi_{A_{i-1}})}{\partial x_{i_1}^{(i)} \ldots \partial x_{i_{n_i-1}}^{(i)}} \cdot \frac{(x_{i_1}^{(i)} - x_{i_1}^{(i-1)}) \ldots (x_{i_{n_i-1}}^{(i)} - x_{i_{n_i-1}}^{(i-1)})}{n_i^{n_i-1}}, \quad (14)$$

$$\Phi_{A_{i-1}} = \frac{1}{2} (a_{ij})_{A_{i-1}} \cdot X_i X_j, \quad (15)$$

a_{ij} — componentele tensorului viteză de deformație;
X_1, X_2, X_3 — proiecțiile pe axele unui reper fix $x_1 O x_2 x_3$ ale vectorului $\overrightarrow{A_{i-1} M_i^{(1)}}$, $M_i^{(1)}$ fiind primul punct al diviziunii echidistante în n_i subintervale a segmentului $A_{i-1} A_i$;

$x_1^{(i-1)}$, $x_2^{(i-1)}$, $x_3^{(i-1)}$ și, respectiv, $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$ sînt coordonatele în raport cu reperul $x_1 O x_2 x_3$ ale punctelor A_{i-1} și, respectiv, A_i.

În (13) și (14) s-a folosit convenția de sumare mută în raport cu indicii $i_1, i_2, \ldots, i_{n_i-1}$. În (15) s-a folosit convenția de sumare mută în raport cu indicii i și j (evident $i_1, i_2, \ldots, i_{n_i-1} = 1, 2, 3$; $i; j = 1, 2, 3$).

Pentru întregul lanț cinematic monocontur, folosind relația (12), se obține ecuația de închidere pentru viteze

$$\sum_{(i)} \frac{1}{n_i} \bar{M}_i \times \overline{A_{i-1} A_i} + \sum_{(i)} \bar{N}_i + \sum_{(i)} \bar{v}_{i,i-1}^{(r)} = \bar{0}. \quad (16)$$

Fie $D \subset R^3$, domeniul ocupat de un mediu material continuu liniar-elastic. Fie $M \in D$, un punct arbitrar.

Fie V_M o vecinătate a lui M, suficient de mică. Fie $P \in V_M$.

Generalizînd ecuația Cauchy-Helmholtz, care dă distribuția vitezelor în vecinătatea unui punct, se obține, în final, relația

$$\bar{a}_P = \bar{a}_M + \bar{\varepsilon}_M \times \overline{MP} + \bar{\omega}_M \times (\bar{\omega}_M \times \overline{MP}) + \nabla \dot{\Phi}_M, \quad (17)$$

care dă distribuția accelerațiilor în vecinătatea unui punct.

În (17) s-a notat

$\bar{\omega}_M$ — vîrtejul în M; $\bar{\varepsilon}_M = \dot{\bar{\omega}}_M$; $\dot{\Phi}_M = \frac{1}{2}(\dot{a}_{ij})_M X_i X_j$ (sumare mută);

a_{ij} — componentele tensorului viteză de deformație,

$\overline{MP} = X_1\bar{i}_1 + X_2\bar{i}_2 + X_3\bar{i}_3$, $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$, $\bar{i}_3$ fiind versorii atașați unui reper cartezian centrat în M.

Vom numi pe $\bar{\varepsilon}_M$ accelerație turbionară locală.

Folosind notațiile din relația (12) se poate scrie

$$\bar{a}_{A_i} = \bar{a}_{A_{i-1}} + \frac{1}{n_i}\bar{P}_i \times \overline{A_{i-1}A_i} + \bar{R}_i + \frac{1}{n_i}\bar{Q}_i + \bar{a}^{(r)}_{i,i-1} + \bar{a}^{(c)}_{i,i-1}, \tag{18}$$

unde

$\bar{P}_i$ se obține din $\bar{M}_i$, făcînd înlocuirea $\bar{\omega}^{(i)}_{A_{i-1}} \to \bar{\varepsilon}^{(i)}_{A_{i-1}}$;

$\bar{R}_i$ se obține din $\bar{M}_i$, făcînd înlocuirea $\bar{\omega}^{(i)}_{A_{i-1}} \to \nabla\Phi_{A_{i-1}}$,

$a^{(c)}_{i,i-1}$ are aceeași semnificație ca în relația (6);

$$\bar{Q}_i = \bar{\omega}^{(i)}_{A_{i-1}} \times (\bar{\omega}^{(i)}_{A_{i-1}} \times \overline{A_{i-1}A_i}) + \bar{\omega}^{(i)}_{M^{(1)}_i} \times (\bar{\omega}^{(i)}_{M^{(1)}_i} \times \overline{A_{i-1}A_i}) +$$

$$+ \bar{\omega}^{(i)}_{M^{(2)}_i} \times (\bar{\omega}^{(i)}_{M^{(2)}_i} \times \overline{A_{i-1}A_i}) + \ldots + \bar{\omega}^{(i)}_{M^{(n_i-1)}_i} \times (\bar{\omega}^{(i)}_{M^{(n_i-1)}_i} \times \overline{A_{i-1}A_i}), \tag{19}$$

$$\bar{\omega}^{(i)}_{M^{(k)}_i} = \bar{\omega}^{(i)}_{A_{i-1}} + C^1_{n_i-1} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}^{(i)}_{A_{i-1}}}{\partial x^{(i)}_{i_1}} \cdot \frac{(x^{(i)}_{i_1} - x^{(i-1)}_{i_1})}{n_i} +$$

$$+ C^2_{n_i-1} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\omega}^{(i)}_{A_{i-1}}}{\partial x^{(i)}_{i_1} \partial x^{(i)}_{i_2}} \cdot \frac{(x^{(i)}_{i_1} - x^{(i-1)}_{i_1}) \cdot (x^{(i)}_{i_2} - x^{(i-1)}_{i_2})}{n_i^2} +$$

$$+ \ldots + C^{k-1}_{k-1} \cdot \frac{\partial^{(k-1)} \bar{\omega}^{(i)}_{A_{i-1}}}{\partial x^{(i)}_{i_1} \ldots \partial x^{(i)}_{i,k-1}} \cdot \frac{(x^{(i)}_{i_1} - x^{(i-1)}_{i_1}) \ldots (x^{(i)}_{i,k-1} - x^{(i-1)}_{i,k-1})}{n_i^{k-1}} \cdot \tag{20}$$

Din (18) se obține imediat o ecuație de închidere pentru accelerații

$$\sum_{(i)} \frac{1}{n_i}\bar{P}_i \times \overline{A_{i-1}A_i} + \sum_{(i)} \bar{R}_i + \sum_{(i)} \frac{1}{n_i}\bar{Q}_i + \sum_{(i)} \bar{a}^{(r)}_{i,i-1} + \sum_{(i)} \bar{a}^{(c)}_{i,i-1} = \bar{0}. \tag{21}$$

Ecuațiile (16) și (21) formează setul ecuațiilor de închidere pentru viteze și accelerații.

Un algoritm de analiză cinetoelastică, bazat pe aceste ecuații, trebuie cuplat cu ecuații neliniare de analiză a vibrațiilor elementelor cinematice ca cele deduse în [4].

4. CONCLUZII

Ecuațiile de închidere pentru viteze și accelerații deduse mai sus pentru un lanț cinematic simplu închis cu elemente deformabile constituie fundamentele unei metode de analiză cinetoelastică a mecanismelor, metodă care reprezintă, în fond, generalizarea metodei ciclurilor independente.

Se remarcă însă că, în cazul mecanismelor cu elemente deformabile, trebuie aplicat un algoritm de calcul bazat pe metoda aproximațiilor succesive. Asistența calculatorului numeric este necesară, dat fiind volumul apreciabil de calcule. Pentru analiza vibrațiilor se vor folosi modele liniare sau neliniare după cum ecuațiile de închidere de la care se pornește sînt (5), (6), (7), (8) sau respectiv (16) și (21).

Primită la redacție la 10 septembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. M. BUCULEI, *Sur les équations de l'élastodynamique des mecanismes à barres*, Rev. roum. sci. tehn. — Mec. Appl. (1981).
2. M. BUCULEI, *Sur la cinématique et la cinétique des mécanismes à éléments élastiques*, Rev. roum. sci. techn. — Mec. Appl., **24**, *2* (1979).
3. M. BUCULEI, S. MIȚIS, *Asupra vibrațiilor elementelor cinematice ale mecanismelor plane cu cuple de translație*, St. cerc. mec. apl., **39**, *2*, (1980).
4. M. BUCULEI, D. BĂGNARU, *Equations non linéaires dans l'élastocinématique des mécanismes à barres*, Rev. roum. sci. techn. — Mec. appl., **40**, *1*, (1981).
5. M. BUCULEI, D. BĂGNARU, *Vibrații mecanice*, Repr. Univ. Craiova, 1980.
6. CHR. PELECUDI, *Teoria mecanismelor spațiale*, Edit. Academiei, București, 1972.
7. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică 1975.
8. M. ATANASIU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.
9. M. BUCULEI, *Ecuații globale în elastocinematica mecanismelor cu bare*, St. cerc. mec. apl., *4* (1980).
10. M. BUCULEI. D. MARGHITU, *Contribuții la studiul influenței filmului de lubrifiant din cuplele de translație la analiza vibrațiilor elementelor rectilinii ale mecanismelor*, În vol. Simpoz. de mec. și transm. mec. Timișoara, 1980.

4. CONCLUZII

Scenariile de implicare pentru viteze și accelerații deduse mai sus pentru un lanț cinematic simplu închis cu elemente deformabile constituie fundamentele unei metode de analiză cinetoelastică a mecanismelor, metodă care reprezintă, în fond, generalizarea metodei clasice indeperidente.

Se remarcă faptul că, în cazul mecanismelor cu elemente deformabile, aceste aplicat un algoritm de calcul bazat pe metoda aproximațiilor succesive. Existența calculatorului numeric este necesară, dat fiind volumul apreciabil de calcule. Pentru analiza vibrațiilor se vor folosi modele liniare sau neliniare după cum cerințele de implicare de la care se porneste sunt (5), (6), (7), (8) sau respectiv (10) și (21).

1. M. BUCULEI, Sur les équations de l'élastodynamique des mécanismes à barres, Rev. roum. sci. techn. — Mec. Appl. (1981).
2. M. BUCULEI, Sur la cinématique et la statique des mécanismes à éléments élastiques, Rev. roum. sci. techn. — Mec. Appl. **24**, 2 (1979).
3. M. BUCULEI, Șt. MITIȚ, Asupra răspunsului elementelor circuitelor prin mecanismele plane cu cuple de translație, St. cerc. mec. apl. **39**, 2 (1980).
4. M. BUCULEI, D. BUZONARI, Ajustarea prin întindere duna l'élasticité des mécanismes à barres, Rev. roum. sci. techn. — Mec. appl. **26**, 1 (1981).
5. M. BUCULEI, D. BUZONARI, Vibrații mecanice, Ilisp. Univ. Craiova, 1980.
6. CHEȘ, PELECIOI, Teoria mecanismelor și mașinilor, Edit. Academiei, București, 1972.
7. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, Mecanică, Edit. didactică și pedagogică 1978.
8. M. ATANASIU, Mecanică, Edit. didactică și pedagogică, București, 1978.
9. M. BUCULEI, Analiză cinetoelastică a mecanismelor cu bare, St. cerc. mec. apl. 4 (1980).
10. M. BUCULEI, D. MARCHITI, Caracterul și studiul influenței filtrului de înregistrare din cuplele de translație în analiza vibrațiilor elementelor rectilinii ale mecanismelor, în vol. Simpoz. de mec. și transm. mec. Timișoara, 1980.

VIBRAȚIILE FLEXIONALE ALE ARBORILOR ȚINÎND SEAMĂ DE DEFORMAȚIILE DE FORFECARE ȘI DE INERȚIA DE ROTAȚIE

de MAGDALENA POSEA

Institutul de construcții București

Se prezintă două procedee pentru studiul vibrațiilor proprii ale arborilor drepți, unul bazat pe matricea dinamică de transmitere și celălalt pe matricea dinamică de rigiditate. În acest scop se stabilește ecuația vibrațiilor libere pentru o bară cu masă continuă, ținînd seama de deformațiile de forfecare și inerția de rotație, și pe această bază se determină, mai întîi, matricea dinamică de transmitere și apoi matricea dinamică de rigiditate.

Procedeul de calcul a vibrațiilor proprii cu folosirea matricei dinamice de transmitere este dezvoltat sub o formă generală, astfel încît se poate aplica la orice tip de arbore, static determinat sau static nedeterminat, fără sau cu mase concentrate (roți, semicuplaje etc.), cu reazeme rigide sau elastice.

Aceleași caracteristici de generalitate le prezintă și algoritmul bazat pe matricea dinamică de rigiditate. Pentru această matrice se prezintă și o formă aproximativă stabilită prin metoda elementelor finite.

Ambele procedee se pot transpune cu ușurință în programe pentru calculatoare electronice cifrice.

1. INTRODUCERE

Vibrațiile de încovoiere (flexionale) ale arborilor se încadrează în teoria generală a vibrațiilor transversale ale barelor cu masă continuă. Studiul acestora, în situația că se ține seama numai de inerția de translație a maselor și de deformațiile din încovoiere, conduce la ecuația diferențială [1], [2], a deplasărilor transversale v:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + A\,\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \tag{1.1}$$

în care, I, A sînt momentul de inerție, respectiv aria secțiunii transversale, iar ρ densitatea materialului.

Soluția acestei ecuații, folosind metoda parametrilor în origine [1], [4] este

$$v = \left[[v_0 S(\alpha x) + \frac{\varphi_0}{\alpha} T(\alpha x) - \frac{M_0}{EI\alpha^2} U(\alpha x) - \frac{T_0}{EI\alpha^3} V(\alpha x) \right] \cos pt \tag{1.2}$$

unde $S(\alpha x)$, $T(\alpha x)$, $U(\alpha x)$, $V(\alpha x)$ sînt funcţiile lui Krîlov; v_0, φ_0, M_0, T_0 parametrii în origine, iar

$$\alpha^4 = \frac{\rho A}{EI} p^2. \tag{1.3}$$

Considerînd tronsonul de bară 0—1 (fig. 1 *a*) de lungime l şi grupînd

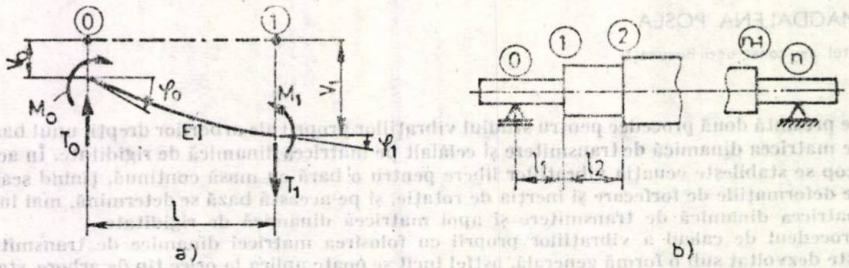


Fig. 1

parametrii în vectorii-coloane:

$$\underset{\sim}{Z}_0 = [v_0\ \varphi_0 M_0\ T_0]^{tr};\quad \underset{\sim}{Z}_1 = [v_1 \varphi_1 M_1 T_1]^{tr}, \tag{1.4}$$

se obţine relaţia matriceală

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ M_1 \\ T_1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{Z}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} S(\alpha l) & \frac{1}{\alpha} T(\alpha l) & -\frac{U(\alpha l)}{\alpha^2 EI} & -\frac{V(\alpha l)}{\alpha^3 EI} \\ \alpha\, V(\alpha l) & S(\alpha l) & -\frac{T(\alpha l)}{\alpha\, EI} & -\frac{U(\alpha l)}{\alpha^2 EI} \\ \alpha^2 EI\, U(\alpha l) & -\alpha EI\, V(\alpha l) & S(\alpha l) & \frac{T(\alpha l)}{\alpha} \\ -\alpha^3 E\, I\, T(\alpha l) & -\alpha^2 E\, I\, U(\alpha l) & \alpha V(\alpha l) & S(\alpha l) \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{A}_{01}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ T_0 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{Z}_0}, \tag{1.5}$$

care pune în evidenţă matricea de transmitere $\underset{\sim}{A}_{01}$ pentru tronsonul 0—1.

Prin folosirea matricelor de transfer se dezvoltă în lucrările [1], [4] un procedeu adecvat pentru studiul vibraţiilor proprii şi forţate ale barelor cu variaţii în trepte ale secţiunilor transversale (fig. 1 *b*).

Procedeul constă în scrierea succesivă a relaţiilor de recurenţă dintre parametrii de la noduri, ceea ce conduce la expresia

$$\underset{\sim}{Z}_n = \underset{\sim}{A}_{n-1,n} \cdots \underset{\sim}{A}_{12}\, \underset{\sim}{A}_{01} \underset{\sim}{Z}_0. \tag{1.6}$$

Introducînd condițiile la limită se obține un sistem de ecuații algebrice omogen. Întrucît există vibrații și deci sistemul trebuie să aibă soluții diferite de cea banală, condiția ca matricea caracteristică a sistemului să fie nesingulară constituie o ecuație transcendentă denumită ecuația pulsațiilor proprii. Din rezolvarea acesteia se obțin diferite rădăcini α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$ care, prin intermediul formulei (1.3), conduc la pulsațiile proprii $p_1 < p_2 < p_n \ldots$.

În cazul vibrațiilor forțate, cînd forțele perturbatoare au aceeași pulsație și fază, se introduc noduri în secțiunile de aplicare a forțelor exterioare și pe lîngă matricele de transfer ale tronsoanelor, se stabilesc matricele de transfer ale nodurilor. Se ajunge, de asemenea, la relații de tipul (1.6), care mai conțin în plus un termen depinzînd de matricele de noduri. Procedeul este similar celui folosit în lucrarea [3] pentru calculul deplasărilor arborilor.

Dacă necunoscutele de la capătul tronsonului 0—1 (fig. 1 *a*) se grupează sub forma :

$$\underset{\sim}{Q} = [M_0 T_0 M_1 T_1]^{tr}; \quad \underset{\sim}{\Delta} = [v_0 \varphi_0 v_1 \varphi_1]^{tr}, \tag{1.7}$$

se obține relația

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\Delta}, \tag{1.8}$$

care pune în evidență matricea de rigiditate a tronsonului respectiv. Evident, elementele acesteia [2] se stabilesc pornind de la soluția (1.2), cu ajutorul relațiilor cunoscute :

$$\varphi = \frac{dv}{dx}; \quad M = -EI\frac{d^2v}{dx^2}; \quad T = -EI\frac{d^3v}{dx^3}. \tag{1.9}$$

Pe baza matricei de rigiditate se poate dezvolta, de asemenea, un procedeu ușor de aplicat pentru studiul vibrațiilor proprii și forțate ale barelor sau sistemelor de bare.

Ambele procedee enunțate se vor folosi în continuare pentru studiul vibrațiilor de încovoiere a arborilor, luînd în considerație însă atît deformările produse de forțele tăietoare, cît și inerția de rotație a maselor.

2. ECUAȚIA VIBRAȚIILOR PROPRII ȚINÎND SEAMA DE DEFORMAȚIILE DE FORFECARE ȘI DE INERȚIA DE ROTAȚIE

În conformitate cu principiul lui d'Alambert, deformația dinamică a unei structuri se poate obține ca o deformată statică produsă de forțele efectiv aplicate și de forțele de inerție.

Se consideră un tronson de bară oarecare $i—j$ (fig. 2 *a*) și într-un punct curent x se izolează un element dx (fig. 2 *b*), pe care se introduc atît

forţele de legătură de la capete, cît şi torsorul forţelor de inerţie compus din :

— forţa de inerţie corespunzătoare translaţiei masei :

$$dF^i = -(\rho A\, dx)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.1}$$

— cuplul de inerţie corespunzător rotaţiei :

$$d\mathfrak{M}^i = -(\rho I\, dx)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{2.2}$$

În aceste relaţii s-a notat : ρ, densitatea materialului; A, I, aria, respectiv momentul de inerţie geometric al secţiunii transversale faţă de

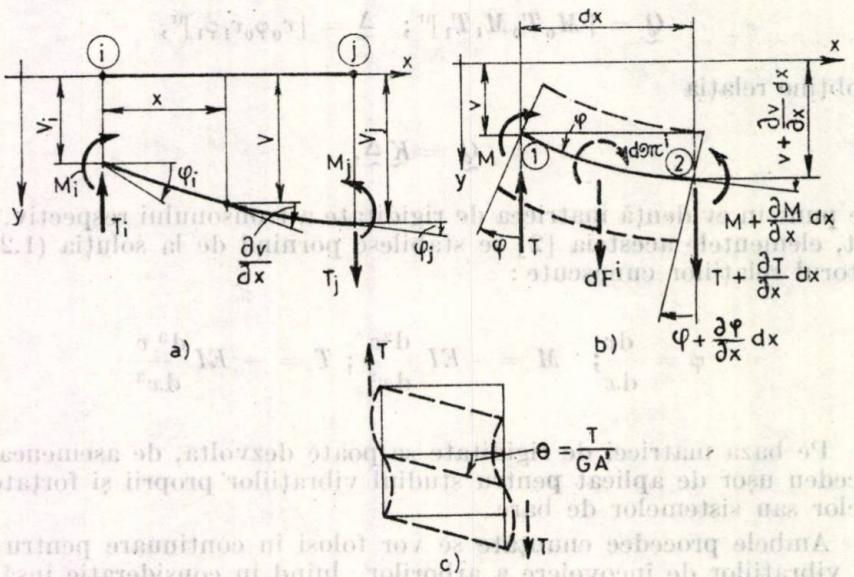


Fig. 2

axa de rotaţie; φ, rotirea secţiunii transversale.

Din ecuaţiile de echilibru dinamic, proiecţia pe axa y şi momentul faţă de punctul 2 (fig. 2 *b*), rezultă relaţiile :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.3}$$

$$T - \frac{\partial M}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{2.4}$$

Deformația produsă de forțele tăietoare [3], [5] nu conduce la rotirea secțiunii transversale, ci numai la o rotire a axei elementului (fig. 2 *c*), care se determină cu formula

$$\theta = \frac{T}{Gk'A}, \tag{2.5}$$

unde k' reprezintă coeficientul de formă al secțiunii transversale ($k' = 5/6$ pentru secțiunea dreptunghiulară, $k' = 9/10$ pentru secțiunea circulară).

În consecință, unghiul tangentei într-un punct curent al deformatei (fig. 2 *a*), în ipoteza micilor deplasări, este dat de relația

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi + \theta, \tag{2.6}$$

care rezultă din compunerea rotirii φ produsă de momentele încovoietoare cu rotirea θ din forțele tăietoare.

Din (2.5), (2.6) și (2.3) se obține relația

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{k'GA}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.7}$$

care, introdusă în expresia

$$M = -EI\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{2.8}$$

dedusă din ecuația fibrei medii deformate, conduce la

$$M = -EI\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{T}{k'GA}\right) = -EI\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right). \tag{2.9}$$

Derivînd (2.4) în raport cu x și ținînd seama de (2.3) și (2.9) se obține relația

$$\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) =$$

$$= \rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right),$$

care, pentru $EI = \text{const.}$, ia forma

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho\left(\frac{1}{k'G} + \frac{1}{E}\right)\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho A}{EI}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\rho^2}{k'EG}\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0, \tag{2.10}$$

și reprezintă ecuația vibrațiilor libere pentru bare la care se iau în considerație deformațiile de forfecare și inerția de rotație. Printr-o altă metodologie ea a fost stabilită prima oară de Timoshenko.

Alegînd o soluție de tip Fourier,

$$v = v(x)\cos pt, \tag{2.11}$$

efectuînd schimbarea de variabilă

$$\xi = \frac{x}{l} \tag{2.12}$$

și notînd operatorul $D = \frac{d}{d\xi}$, ecuația (2.10) devine

$$D^{IV} v + \rho l^2 p^2 \left(\frac{1}{k' G} + \frac{1}{E} \right) D^{II} v - \frac{\rho A l^4 p^2}{EI} \left(1 - \frac{\rho I}{k' AG} p^2 \right) v = 0. \tag{2.13}$$

Dacă se notează

$$a = \frac{\rho A l^4 p^2}{EI}; b = \frac{I}{al^2}; c = \frac{EI}{k'GAl^2}, \tag{2.14}$$

ecuația (2.13) ia forma

$$D^{IV} v + a(b + c) D^{II} v - a(1 - abc)v = 0 \tag{2.15}$$

și reprezintă o ecuație diferențială de ordinul IV cu coeficienți constanți omogenă.

Din ecuația caracteristică

$$r^4 + a(b + c)r^2 - a(1 - abc) = 0,$$

pentru cazul cînd $a\,b\,c < 1$, se obțin rădăcinile

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \sqrt{-\frac{a(b+c)}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}(b-c) + a}}, \\ \beta' = i\beta \; ; \; \beta &= \pm \sqrt{\frac{a(b+c)}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}(b-c) + a}}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

care permit scrierea soluției ecuației (2.15) sub forma

$$v(x) = C_1 \cos \beta\xi + C_2 \sin \beta\,\xi + C_3 \operatorname{ch}\alpha\,\xi + C_4 \operatorname{sh}\,\alpha\xi. \tag{2.17}$$

Prin aceasta expresia vibrațiilor libere (2.11) devine

$$v = v(x)\cos pt = (C_1 \cos \beta\xi + C_2 \sin \beta\xi + C_3 \operatorname{ch}\alpha\xi + C_4 \operatorname{sh} \alpha\xi)\cos pt. \tag{2.17'}$$

Se adoptă pentru rotirile secțiunilor transversale, adică pentru rotirile din momentele încovoietoare, expresia

$$\varphi(x) = C_1' \sin \beta\xi + C_2' \cos \beta\xi + C_3' \operatorname{sh} \alpha\xi + C_4' \alpha\xi, \tag{2.18}$$

în care C_1', C_2', C_3', C_4' sînt constante.
Introducînd funcțiile (2.17'), (2.18) în (2.7) aceasta trebuie să fie o identitate, ceea ce, ținînd seama că $\frac{\rho p^2}{k'G} = \frac{ac}{l^2}$, conduce la relațiile

$$C_1' = -\frac{\beta^2 - ac}{\beta l} C_1 = -\frac{e}{l} C_1; \qquad C_2' = \frac{\beta^2 - ac}{\beta l} C_2 = \frac{e}{l} C_2,$$
$$C_3' = \frac{\alpha^2 + ac}{\alpha l} C_3 = \frac{f}{l} C_3; \qquad C_4' = \frac{\alpha^2 + ac}{\alpha l} C_4 = \frac{f}{l} C_4. \tag{2.19}$$

în care

$$e = \frac{\beta^2 - ac}{\beta}; \quad f = \frac{\alpha^2 + ac}{\alpha}. \tag{2.20}$$

Înlocuind (2.19) în (2.18) rezultă funcția rotirilor

$$\varphi(x) = -C_1 \frac{e}{l} \sin \beta\xi + C_2 \frac{e}{l} \cos \beta\xi + C_3 \frac{f}{l} \operatorname{sh} \alpha\xi + C_4 \frac{f}{l} \operatorname{ch} \alpha\xi, \tag{2.21}$$

dependentă de aceleași constante ca funcția săgeților.
Din aceasta se obține

$$\varphi(xt) = \varphi(x)\cos pt. \tag{2.21'}$$

Prin introducerea funcției (2.21') în (2.8) se obține expresia momentelor încovoietoare

$$M(xt) = -\frac{EI}{l^2}(-C_1 \beta e \cos \beta\xi - C_2 \beta e \sin \beta\xi + C_3 \alpha f \operatorname{ch} \alpha\xi + C_4 \alpha f \operatorname{sh} \alpha\xi)\cos pt. \tag{2.22}$$

Pentru stabilirea expresiei forței tăietoare se folosește (2.4) în care se introduce (2.22) și (2.21'). Ținînd seama că $\rho I p^2 = \frac{EI}{l^2} ab$ și făcînd notațiile

$$g = f(\alpha^2 + ab); \quad h = e \quad (\beta^2 - ab), \tag{2.23}$$

rezultă expresia

$$T(xt) = -\frac{EI}{l^3} (C_1 h \sin \beta\xi - C_2 h \cos \beta\xi + C_3 g \operatorname{sh}\alpha\ \xi + C_4 g \operatorname{ch} \alpha\xi) \cos pt. \tag{2.24}$$

Cu expresiile (2.17), (2.21'), (2.22) și (2.24) se determină valorile dinamice ale săgeților, rotirilor, momentelor încovoietoare și forțelor tăietoare în timpul vibrațiilor.

Constantele C_1, C_2, C_3, C_4 se determină din condițiile la limită ale capetelor barei.

În cazul vibrațiilor libere, condițiile la limită conduc la un sistem omogen.

Întrucît soluția banală nu poate fi acceptată, deoarece în acest caz nu ar exista vibrații, determinantul caracteristic al sistemului trebuie să fie nul, ceea ce conduce la o ecuație transcendentă ale cărei rădăcini permit determinarea pulsațiilor proprii (una din constante alegîndu-se arbitrar) se obțin formele proprii de oscilație. *Observații.* 1. Aranjînd mărimile v, φ, M, T date de relațiile (2.17'), (2.21'), (2.22) și (2.24) sub forma (1.5), se obține matricea de transfer în cazul cînd se iau în considerație deformațiile de forfecare și inerția de rotație.

2. Dacă mărimile v, φ, M, T de la capetele unui tronson se aranjează în forma (1.7), se obține matricea de rigiditate pentru cazul cînd se ține seama de deformațiile de forfecare și de inerția de rotație. Aceste matrice vor fi precizate în capitolele următoare.

Dacă $a\ b\ c > 1$, soluțiile α (2.16) devin imaginare. Ținînd seama de acest fapt calculul se desfășoară după aceeași metodologie ca pentru $abc < 1$.

3. STUDIUL VIBRAȚIILOR PROPRII FOLOSIND MATRICELE DE TRANSMITERE

Ecuația vibrațiilor proprii (2.17') depinde de patru constante C_1, C_2, C_3, C_4. Scriind condițiile la limită, se obține un sistem de ecuații omogen al cărui determinant trebuie să fie nul. Se obține astfel o ecuație transcendentă ale cărei rădăcini permit aflarea pulsațiilor proprii.

Condițiile la limită se pun cu mai multă ușurință dacă constantele C_1, C_2, C_3, C_4 se exprimă în funcție de parametrii în origine v_0, φ_0, M_0, T_0. Sistematizarea calculelor pe baza acestora conduce la matricea de transmitere.

3.1 MATRICEA DINAMICĂ DE TRANSMITERE CU LUAREA ÎN CONSIDERAȚIE A DEFORMAȚIILOR DE FORFECARE ȘI A INERȚIEI DE ROTAȚIE

Se consideră tronsonul 0—1 din figura 1 și se definesc parametrii de la capete prin vectorii $\underline{Z}_0$, $\underline{Z}_1$, așa cum arată formulele (1.4). Folosind

formulele (2.17'), (2.21'), (2.22) și (2.24), în care se lasă de o parte funcția de timp, din condițiile la limită pentru $\xi = 0$, rezultă

$$v_0 = C_1 + C_3\,;\; l\varphi_0 = C_2 e + C_4 f = 0,$$

$$M_0 = -\frac{EI}{l^2}(-C_1\beta e + C_3\alpha f)\,;\; T_0 = \frac{EI}{l^3}(-C_2 h + C_4 g).$$

Din rezolvarea acestui sistem se obțin constantele:

$$C_1 = \frac{1}{\beta e + \alpha f}\left(\alpha f v_0 + \frac{M_0 l^2}{EI}\right);\; C_2 = \frac{1}{eg + hf}\left(gl\varphi_0 + f\frac{T_0 l^3}{EI}\right),$$
$$C_3 = \frac{1}{\beta e + \alpha f}\left(\beta e v_0 - \frac{M_0 l^2}{EI}\right);\; C_4 = \frac{1}{eg + hf}\left(h\,l\,\varphi_0 - e\,\frac{T_0 l^3}{EI}\right), \tag{2.25}$$

care se introduc în expresiile (2.17), (2.21), (2.22) și (2.24). În acest fe mărimile v, φ, M, T se exprimă în funcție de parametrii în origine v_0, φ_0, M_0, T_0.

Dacă se consideră mărimile adimensionale

$$\bar{v} = v\frac{1}{l_0}\,;\; \bar{\varphi} = \varphi\,;\; \bar{M} = M\frac{l_0}{(EI)_0}\,;\; \bar{T} = T\frac{l_0^2}{(EI)_0}, \tag{2.26}$$

și se notează

$$\frac{l}{l_0} = s\,;\; \frac{(EI)_0}{EI} = r, \tag{2.27}$$

parametrii $\underset{\sim}{Z}_1$ de la capătul 1 al barei 0—1 (fig. 1 *a*) se exprimă în funcție de parametrii $\underset{\sim}{Z}_0$ de la capătul 0 prin relația

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{T}_1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{Z}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 & R_1 & S_1 & U_1 \\ Q_2 & R_2 & S_2 & U_2 \\ Q_3 & R_3 & S_3 & U_3 \\ Q_4 & R_4 & S_4 & U_4 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{A}_{01}} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{M} \\ \bar{T}_0 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{Z}_0}, \tag{2.28}$$

unde matricea $\underset{\sim}{A}_{01}$ poartă denumirea de matricea dinamică de transmitere pe tronsonul 0—1. Folosind relațiile (2.17), (2.21), (2.22) și (2.24)

pentru $\xi = 1$, în care se introduc constantele (2.25) și ținînd seama de notațiile (2.26), (2.27), expresiile termenilor matricei $\underset{\sim}{A}_{01}$ (2.28) sînt :

$$Q_1 = \frac{1}{\beta e + \alpha f}(\alpha f \cos\beta + \beta e \operatorname{ch}\alpha); Q_2 = \frac{fe}{\beta e + \alpha f}(-\alpha \sin\beta - \beta \operatorname{sh}\alpha)\frac{1}{s},$$

$$Q_3 = \frac{\beta e\, \alpha f}{\beta e + \alpha f}(\cos\beta - \operatorname{ch}\alpha)\frac{1}{s^2 r}; Q_4 = \frac{1}{\beta e + \alpha f}(\alpha f h \sin\beta + \beta\, e\, g \operatorname{sh}\alpha)\frac{1}{rs^3},$$

$$R_1 = \frac{1}{eg + hf}(g \sin\beta + h \operatorname{sh}\alpha)\, s; R_2 = \frac{1}{eg + hf}(ge \cos\beta + hf \operatorname{ch}\alpha),$$

$$R_3 = \frac{1}{eg + hf}(ge\beta \sin\beta - fh\, \alpha \operatorname{sh}\alpha)\frac{1}{sr}; R_4 = \frac{gh}{eg + fh}(\cos\beta - \operatorname{ch}\alpha)\frac{1}{rs^2}, \tag{2.29}$$

$$S_1 = \frac{1}{\beta e + \alpha f}(\cos\beta - \operatorname{ch}\alpha)s^2 r; S_2 = -\frac{1}{\beta e + \alpha f}(e \sin\beta + f \operatorname{sh}\alpha)sr,$$

$$S_3 = \frac{1}{\beta e + \alpha f}(\beta e \cos\beta + \alpha f \operatorname{ch}\alpha); S_4 = -\frac{1}{\beta e + \alpha f}(h \sin\beta - g \operatorname{sh}\alpha)\frac{1}{s},$$

$$U_1 = \frac{1}{eg + fh}(f \sin\beta - e \operatorname{sh}\alpha)s^3 r; U_2 = \frac{ef}{eg + fh}(\cos\beta - ch\alpha)s^2 r;$$

$$U_3 = \frac{ef}{eg + fh}(\beta \sin\beta + \alpha \operatorname{sh}\alpha)s; U_4 = \frac{1}{eg + fh}(hf \cos\beta + ge \operatorname{ch}\alpha).$$

3.2. DETERMINAREA PULSAȚIILOR ȘI FORMELOR PROPRII PRIN UTILIZAREA MATRICELOR DINAMICE DE TRANSMITERE

A. ***Cazul unei bare cu un singur tronson*** (fig. 3 *a*)

Întrucît bara este încastrată în capătul 0 și simplu rezemată în capătul 1 (fig. 3 *a*), relația dintre vectorul parametrilor $\underset{\sim}{Z}_1$ și vectorul parametrilor din origine (2.28), devine

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\varphi}_1 \\ 0 \\ \overline{T}_1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{Z}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 & R_1 & S_1 & U_1 & 0 \\ Q_2 & R_2 & S_2 & U_2 & 0 \\ Q_3 & R_3 & S_3 & U_3 & 0 \\ Q_4 & R_4 & S_4 & U_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{A}_{01}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{M}_0 \\ \overline{T}_0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{}}$$

Datorită componentelor nule ale vectorului $\underset{\sim}{Z}_1$, se obține sistemul algebric omogen :

$$S_1\bar{M}_0 + U_1\bar{T}_0 = 0\,; \quad S_3\bar{M}_0 + U_3\bar{T}_0 = 0. \tag{2.30}$$

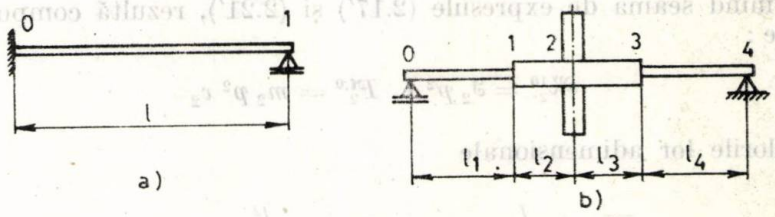


Fig. 3

Din condiția ca determinantul caracteristic să fie nul, se obține ecuația pulsațiilor proprii :

$$S_1U_3 - S_3U_1 = 0. \tag{2.31}$$

Pentru determinarea rădăcinilor acestei ecuații se aplică un procedeu numeric. Cel mai folosit procedeu constă în studiul schimbărilor de semn ale funcției $S_1U_3 - S_3U_1$ pentru valorile parametrului p care intră în componența constantei a (2.14) precum și a mărimilor α, β (2.16), e, f (2.20) și g, h (2.23).

După determinarea valorilor p care satisfac ecuația (2.31), alese în ordinea $p_1 < p_2 < \ldots p_n < \ldots$, se determină formele proprii de oscilație în modul cunoscut [1], [5]. De exemplu, pentru forma proprie p_i, se introduce această valoare în (2.30), se scrie o relație între $\bar{M}_0$ și $\bar{T}_0$, ceea ce face ca prin intermediul constantelor (2.25) funcția (2.17′) să rămînă dependentă de o singură constantă și să reprezinte forma proprie de oscilație de ordinul i, $v_i(x)$. Din condiția de normalizare a formei proprii respective

$$\int_0^l \bar{m}\, \mathrm{d}x\, v_i^2(x) = 1, \tag{2.32}$$

unde $\bar{m} = \rho A$ reprezintă masa barei pe unitatea de lungime, se poate obține valoarea constantei nedeterminate din componența funcției $v_i(x)$.

Observație. Pentru alte rezemări ale barei la capete se procedează în mod similar. Evident, alte componente ale vectorului $\underset{\sim}{Z}_0$ și $\underset{\sim}{Z}_1$ vor fi nule. Ecuațiile corespunzătoare valorilor nule ale vectorului $\underset{\sim}{Z}_1$ conduc la sistemul de ecuații al cărui determinant să fie nul.

B. *Cazul unui arbore drept*

În general un arbore drept (fig. 3 *b*) este alcătuit din mai multe tronsoane (în trepte), cu elemente geometrice diferite.

Pentru determinarea pulsațiilor proprii, în situația că se ține seama atît de deformațiile de lunecare, cît și de inerția de rotație a tuturor mase-

lor, se consideră noduri nu numai în dreptul schimbării diametrelor (secţiunilor), ci şi în dreptul maselor concentrate, reprezentate în figura 3 *b* prin discul din punctul 2. Evident, în timpul oscilaţiilor, masa discului introduce în nodul 2 o forţă de inerţie $F_2^i = -m_2 \ddot{v}_2$ şi un cuplu de inerţie $\mathfrak{M}_2^i = -\mathfrak{J}_2 \ddot{\varphi}_2$.

Ţinînd seama de expresiile (2.17′) şi (2.21′), rezultă componentele maxime :

$$\mathfrak{M}_2^{i0} = \mathfrak{J}_2 p^2 \; ; \quad F_2^{i,0} = m_2 p^2 v_2 \tag{2.33}$$

sau valorile lor adimensionale

$$\overline{\mathfrak{M}}_2^{i,0} = \frac{l_0}{EI_0} \mathfrak{J}_2 p^2 \overline{\varphi} \; ; \quad \overline{F}_2^{i,0} = \frac{l_0^2}{EI_0} m_2 p^2 \overline{v}. \tag{2.33′}$$

Dacă se notează vectorul parametrilor din stînga nodului 2 cu

$$\underset{\sim}{\overline{Z}}_{21} = \underset{\sim}{\overline{Z}}_{2st} = [\overline{v}_2 \; \overline{\varphi}_2 \; \overline{M}_{2st} \; \overline{T}_{2st}]^t \tag{2.34}$$

şi vectorul parametrilor din dreapta nodului 2 cu

$$\underset{\sim}{\overline{Z}}_{23} = \underset{\sim}{\overline{Z}}_{2dr} = [\overline{v}_2 \; \overline{\varphi}_2 \overline{M}_{2dr} \; \overline{T}_{2dr}]^t, \tag{2.35}$$

din echilibrul nodului 2 (fig. 4) se obţine relaţia

$$\begin{bmatrix} \overline{v}_2 \\ \overline{\varphi}_2 \\ \overline{M}_{2dr} \\ \overline{T}_{2dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{l_0}{EI_0} \mathfrak{J}_2 p^2 & 1 & 0 \\ -\dfrac{l_0^2}{EI_0} m_2 p^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{v}_2 \\ \overline{\varphi}_2 \\ \overline{M}_{2st} \\ \overline{T}_{2st} \end{bmatrix}$$

$$\text{sau} \quad \underset{\sim}{\overline{Z}}_{2dr} = \underset{\sim}{B}_2 \underset{\sim}{\overline{Z}}_{2st} \tag{2.36}$$

în care matrice $\underset{\sim}{B}_2$, a cărei expresie este evidentă din (2.36), este denumită matrice de transmitere peste nod. Folosind matricele de transmitere pe bare şi pe noduri, algoritmul pentru determinarea parametrilor de la noduri pentru arborele din figura 3 *b* se prezintă astfel :

$$\underset{\sim}{\overline{Z}}_{10} = \underset{\sim}{A}_{01} \underset{\sim}{\overline{Z}}_0 \; ; \quad \underset{\sim}{\overline{Z}}_{12} = \underset{\sim}{B}_1 \underset{\sim}{\overline{Z}}_{10} = \underset{\sim}{B}_1 \underset{\sim}{A}_{01} \underset{\sim}{\overline{Z}}_0 \; ; \quad \underset{\sim}{\overline{Z}}_{21} = \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{\overline{Z}}_{12},$$

$$\underset{\sim}{\overline{Z}}_{23} = \underset{\sim}{B}_2 \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{B}_1 \underset{\sim}{A}_{01} \underset{\sim}{\overline{Z}}_0 \; ; \quad \underset{\sim}{\overline{Z}}_{32} = \underset{\sim}{A}_{23} \underset{\sim}{\overline{Z}}_{23} \; ; \quad \underset{\sim}{\overline{Z}}_{34} = \underset{\sim}{B}_3 \underset{\sim}{A}_{23} \underset{\sim}{\overline{Z}}_{23}, \tag{2.37}$$

$$\underset{\sim}{\overline{Z}}_{43} = \underset{\sim}{\overline{Z}}_4 = \underset{\sim}{A}_{34} \underset{\sim}{\overline{Z}}_{34} = \underset{\sim}{A}_{34} \underset{\sim}{B}_3 \underset{\sim}{A}_{23} \underset{\sim}{B}_2 \underset{\sim}{A}_{12} \underset{\sim}{B}_1 \underset{\sim}{A}_{01} \underset{\sim}{\overline{Z}}_0.$$

Dacă se notează

$$\underset{\sim}{D}_{04} = \underset{\sim}{A}_{34}\underset{\sim}{B}_{3}\underset{\sim}{A}_{23}\underset{\sim}{B}_{2}\underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{B}_{1}\underset{\sim}{A}_{01}, \qquad (2.38)$$

ultima relație a algoritmului (2.37) devine

$$\overline{\underset{\sim}{Z}}_{4} = \underset{\sim}{D}_{04}\overline{\underset{\sim}{Z}}_{0}, \qquad (2.39)$$

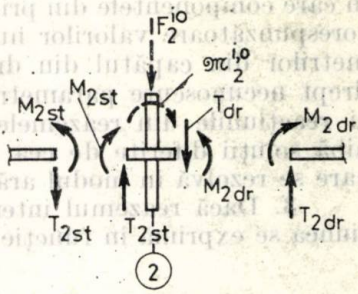


Fig. 4

unde $\underset{\sim}{D}_{04}$, o matrice 4×4, este matricea de transmitere de la nodul 0 la nodul 4.

Întrucît fiecare dintre vectorii $\overline{\underset{\sim}{Z}}_{4}$ și $\overline{\underset{\sim}{Z}}_{0}$ au cîte două componente nule ($\bar{v} = 0$ și $\bar{M} = 0$) ecuațiile corespunzătoare valorilor nule ale componentelor lui $\overline{\underset{\sim}{Z}}_{4}$ constituie un sistem algebric omogen în componentele care nu sînt nule ale vectorului $\overline{\underset{\sim}{Z}}_{0}$. Anularea determinantului caracteristic al acestui sistem,

$$\Delta(p^2) = 0, \qquad (2.40)$$

reprezintă ecuația pulsațiilor proprii.
Rezolvarea acestei ecuații transcendente, la fel ca și la bara cu o singură deschidere, se rezolvă prin studiul numeric al variației funcției $f = \Delta(p^2)$.
Observații. 1. Algoritmul exprimat prin relațiile de recurență (2.37) se aplică în aceeași formă indiferent de numărul tronsoanelor. Dacă la un nod nu există mase concentrate și nici rezemări, atunci matricea $\underset{\sim}{B}$ de trasmitere peste nod devine o matrice unitate (4×4) și deci componentele vectorului din stînga și din dreapta nodului sînt aceleași.

2. Cînd între capetele arborelui există rezemări intermediare, atunci în dreptul acestora se introduc automat noduri. În cazul arborelui din figura 5 *a*, cînd în nodul h este un reazem simplu, intervine la trecere peste nod vectorul necunoscut

$$\underset{\sim}{Q}_{h} = [0,\ 0,\ 0,\ R_h]^t. \qquad (2.41)$$

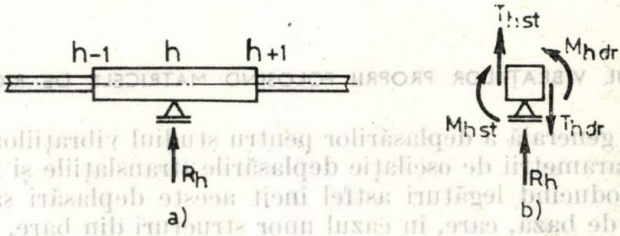


Fig. 5

Observînd figura 5 *b* este evidentă relația

$$\overline{\underset{\sim}{Z}}_{hdr} = \overline{\underset{\sim}{Z}}_{hst} + \underset{\sim}{Q}_{h}, \qquad (2.42)$$

în care componentele din prima linie sînt nule ($v_{h\text{st}} = v_{h\text{dr}} = 0$). Ecuaţiile corespunzătoare valorilor nule ale parametrilor intermediari şi ale parametrilor din capătul din dreapta formează un sistem de ecuaţii avînd drept necunoscute parametrii care nu sînt nuli de la capătul din stînga şi reacţiunile din reazemele intermediare. Condiţia ca acest sistem să aibă soluţii diferite de cea banală reprezintă ecuaţia pulsaţiilor proprii, care se rezolvă în modul arătat mai înainte.

3. Dacă reazemul intermediar este cu cedare elastică, atunci reacţiunea se exprimă în funcţie de deplasare prin relaţia

$$R_h = k_h v_h. \tag{2.43}$$

Introducînd mărimi adimensionale (2.36), se obţine

$$\bar{R}_h = \left(\frac{l_0^3}{EI_0} k_h\right) \bar{v}_h = \bar{k}_h \bar{v}_h, \tag{2.43'}$$

iar legătura dintre $\underset{\sim}{\bar{Z}}_{h\text{dr}}$ şi $\underset{\sim}{\bar{Z}}_{h\text{st}}$ devine

$$\underset{\sim}{\bar{Z}}_{h\text{dr}} = C\, Z_{h\text{st}} \tag{2.44}$$

unde matricea $\underset{\sim}{C}$ de transmitere peste nod are expresia

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{k}_h & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.45}$$

Dacă pe reazem există şi o masă concentrată, matricea de transmitere peste nod se obţine prin însumarea matricei de tip $\underset{\sim}{B}$ (2.36) cu matricea de tip $\underset{\sim}{C}$ (2.45).

4. STUDIUL VIBRAŢIILOR PROPRII FOLOSIND MATRICELE DE RIGIDITATE

Metoda generală a deplasărilor pentru studiul vibraţiilor structurilor alege drept parametrii de oscilaţie deplasările (translaţiile şi rotirile) unor secţiuni. Introducînd legături astfel încît aceste deplasări să fie nule se obţine forma de bază, care, în cazul unor structuri din bare, este formată numai din bare dublu încastrate. Relaţiile dintre eforturile şi deplasările de la capetele unei bare dublu încastrate, atunci cînd deplasările considerate ca parametrii independenţi variază periodic în timp, se stabilesc prin intermediul matricei de rigiditate dinamice. Ecuaţiile de mişcare ale structurii se obţin, fie prin aplicarea ecuaţiilor lui Lagrange, fie din echi-

librul dinamic al nodurilor (secțiunilor ale căror deplasări au fost considerate parametrii independenți) dacă se folosește principiul lui d'Alambert. În continuare, se va stabili matricea de rigiditate dinamică ținînd seama de deformările de lunecare și inerția de rotație a maselor și se vor analiza vibrațiile proprii flexionale ale arborilor drepți folosind metoda deplasărilor.

4.1. MATRICEA DINAMICĂ DE RIGIDITATE A UNEI BARE, LUÎND ÎN CONSIDERAȚIE DEFORMAȚIILE DE FORFECARE ȘI INERȚIA DE ROTAȚIE

Se consideră $i - j$ (fig. 6 *a*) izolată, dintr-o structură plană, iar deplasările (v, φ) și eforturile (M, T) pozitive, ca în figura 6 *b*. Se notează :

$$\underset{\sim}{Q}_i = [M_i \; T_i]^t ; \; \underset{\sim}{Q}_j = [M_j \; T_j]^t ; \; \underset{\sim}{Q} = [\underset{\sim}{Q}_i \; \underset{\sim}{Q}_j]^t \tag{4.1}$$

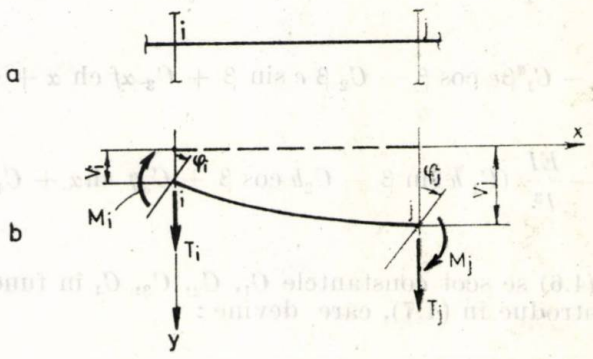


Fig. 6

vectorii eforturilor, și

$$\underset{\sim}{\Delta}_i = [\varphi_i \; v_i]^t ; \; \underset{\sim}{\Delta}_j = [\varphi_j \; v_j]^t ; \; \underset{\sim}{\Delta} = [\underset{\sim}{\Delta}_i \; \underset{\sim}{\Delta}_j]^t \tag{4.2}$$

vectorii deplasărilor.
Folosind modul de partiționare din [3], eforturile de la capetele elementului $i - j$ se exprimă în funcție de deplasări prin relațiile :

$$\underset{\sim}{Q}_i = \underset{\sim}{k}_{ii} \underset{\sim}{\Delta}_i + \underset{\sim}{k}_{ij} \underset{\sim}{\Delta}_j , \quad \underset{\sim}{Q}_j = \underset{\sim}{k}_{ji} \underset{\sim}{\Delta}_i + \underset{\sim}{k}_{jj} \underset{\sim}{\Delta}_j . \tag{4.3}$$

Submatricele $\underset{\sim}{k}_{ij}$ din (4.3) de dimensiuni 2×2 alcătuiesc matricea de rigiditate dinamică a barei

$$\underset{\sim}{K}^b = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}_{ii} & \underset{\sim}{k}_{ij} \\ \underset{\sim}{k}_{ji} & \underset{\sim}{k}_{jj} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

cu ajutorul căreia, ținînd seama de (4.1) și 4.2), rezultă

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{K}^b \underset{\sim}{\Delta} . \tag{4.5}$$

Pentru stabilirea componentelor matricei (4.4) se folosesc expresiile (2.17′), (2.21′) , (2.22) și (2.24), care, ținînd seama de semnele pozitive ale eforturilor și deplasărilor din figura 6 *b*, conduc la relațiile :

$$\varphi_i = C_2\frac{e}{l} + C_4\frac{f}{l}\,;\; v_i = C_1 + C_3, \tag{4.6}$$

$$\varphi_j = -C_1\frac{e}{l}\sin\beta + C_2\frac{e}{l}\cos\beta + C_3\frac{f}{l}\,\mathrm{sh}\,\alpha + C_4\frac{f}{l}\,\mathrm{ch}\,\alpha,$$

$$v_j = C_1\cos\beta + C_2\sin\beta + C_3\,\mathrm{ch}\,\alpha + C_4\,\mathrm{sh}\alpha$$

și

$$M_i = \frac{EI}{l^2}(C_1\,\beta e - C_3\,\alpha f),\quad T_i = \frac{EI}{l^3}(-C_2 h + C_4\,g), \tag{4.7}$$

$$M_j = \frac{EI}{l^2}(-C_1\beta e\cos\beta - C_2\,\beta\, e\sin\beta + C_3\,\alpha f\,\mathrm{ch}\,\alpha + C_4\alpha f\,\mathrm{sh}\,\alpha),$$

$$T_j = -\frac{EI}{l^3}\,(C_1\,h\sin\beta - C_2 h\cos\beta + C_3 g\;\mathrm{sh}\alpha + C_4\,g\,\mathrm{ch}\alpha).$$

Din sistemul (4.6) se scot constantele C_1, C_2, C_3, C_4 în funcție de φ_i, v_i, φ_j, v_j și se introduc în (4.7), care devine :

$$M_i = \frac{EI}{l^2\gamma}\,(\varphi_i l F_1 + v_i G_1 + \varphi_j l H_1 + v_j J_1)\,,$$

$$T_i = \frac{EI}{l^3\,\gamma}\,(\varphi_i l\,G_1 + v_i F_2 - \varphi_j l J_1 + v_j H_2), \tag{4.8}$$

$$M_j = \frac{EI}{l^2\,\gamma}\,(\varphi_i\,l\,H_1 - v_i\,J_1 + \varphi_j\,l\,F_1 - v_j G_1),$$

$$T_j = \frac{EI}{l^3\,\gamma}\,(\varphi_i\,l\,J_1 + v_i\,H_2 - \varphi_j\,l\,G_1 + v_j\,F_2).$$

În expresiile de mai sus s-au folosit notațiile

$$\eta = \frac{e}{f} \qquad \text{(unde } e, f \text{ sînt precizate de (2.20))},$$

$$\gamma = 2\eta\,(1-\cos\beta\,\mathrm{ch}\alpha) + (1-\eta^2)\sin\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha,$$

$$F_1 = (\alpha+\beta\eta)\,(\sin\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha - \eta\cos\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha),$$

$$F_2 = (h+g\eta)\,(\eta\sin\beta\,\mathrm{ch}\alpha + \cos\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha),$$

$$G_1 = f\eta\,[(\alpha-\beta\eta)\,(\cos\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha - 1) + (\beta+\alpha\eta)\sin\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha], \qquad (4.9)$$

$$H_1 = (\alpha+\beta\eta)\,(\eta\,\mathrm{sh}\,\alpha - \sin\beta),$$

$$H_2 = -(h+g\eta)\,(\eta\sin\beta + \mathrm{sh}\,\alpha),$$

$$J_1 = f\eta\,(\alpha+\beta\eta)\,(\cos\beta - \mathrm{ch}\alpha).$$

Dacă se folosesc mărimile adimensionale (2.26) și notațiile (2.27), forma dezvoltată a relației (4.5), în care se introduc (4.8) și (4.9), devine:

$$\begin{bmatrix}\bar{Q}_i\\ \bar{Q}_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{M}_i\\ \bar{T}_i\\ \bar{M}_j\\ \bar{T}_j\end{bmatrix} = \frac{1}{rs^2\gamma}\left[\begin{array}{cc:cc} sF_1 & G_1 & sH_1 & J_1\\ G_1 & \frac{1}{s}F_2 & -J_1 & \frac{1}{s}H_2\\ \hdashline sH_1 & -J_1 & sF_1 & -G_1\\ J_1 & \frac{1}{s}H_2 & -G_1 & \frac{1}{s}F_2 \end{array}\right]\begin{bmatrix}\bar{\varphi}_1\\ \bar{v}_i\\ \bar{\varphi}_j\\ \bar{v}_j\end{bmatrix} \cdot \qquad (4.10)$$

Relația (4.10) pune în evidență atît matricea dinamică de rigiditate a întregii bare $i-j$, care este simetrică, cît și submatricele precizate de (4.4). Evident, funcțiile F_1, F_2, G_1, H_1, H_2, J_1 depind de masa barei, de caracteristicile elastice și geometrice ale barei precum și de pulsația proprie, cuprinse în mărimile (2.14), (2.16), (2.20), (2.23).

4.2. DETERMINAREA PULSAȚIILOR VIBRAȚIILOR PROPRII FLEXIONALE ALE ARBORILOR FOLOSIND MATRICEA DE RIGIDITATE DINAMICĂ

Se presupune arborele divizat în elemente de secțiune constantă, introducînd noduri atît în dreptul variațiilor de secțiune, cît și în punctele în care se aplică mase concentrate, cum este roata din nodul H a arborelui din figura 7 *a*.

Particularitatea acestor structuri constă în faptul că elementele componente sînt în serie, astfel încît în fiecare nod nu intervin decît două elemente. Procedînd ca în lucrarea [3], unde s-a prezentat o metodă pentru calculul deformațiilor arborilor, se izolează un nod oarecare h (fig. 7 *b*) avînd în stînga elementul (e) și în dreapta elementul $(e+1)$. În acest nod, pentru generalitate, se consideră și o roată care introduce o forță de inerție F_h^i și un cuplu de inerție $\mathfrak{M}_h^i$, ale căror expresii sînt precizate de (2.33′) și ținînd seama de sistematizarea vectorului $\bar{\Delta}_h = [\bar{\varphi}_h\ \bar{v}_h]^t$, tot în componente adimensionale, se alcătuiește vectorul:

$$\underset{\sim}{\bar{Q}}_h = [\overline{\mathfrak{M}}_h]_{F_h} = \underset{\sim}{N}_h\underset{\sim}{\bar{\Delta}}_h \qquad (4.11)$$

în care matricea $\underset{\sim}{N}_h$ (2×2), denumită matrice inerțială a nodului, are forma :

$$\underset{\sim}{N}_h = \begin{bmatrix} \dfrac{l_0}{EI_0}\,\mathfrak{J}_h p^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{l_0^2}{EI_0}\,m_h p^2 \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

unde m_h, $\mathfrak{J}_h$ sînt masa, respectiv momentul de inerție al masei discului din nodul h.

Se introduc pe nodul h (fig. 7 *b*) componentele vectorilor eforturilor corespunzătoare elementelor adiacente, egale cu $\underset{\sim}{Q}_j^e$ pentru elementul

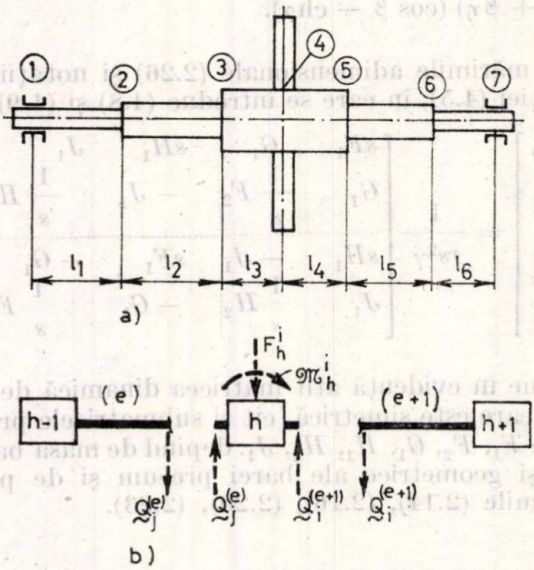


Fig. 7

(e) și cu $\underset{\sim}{Q}_i^{(e+1)}$ pentru elementul $(e+1)$ și se scrie echilibrul dinamic al nodului respectiv :

$$-\underset{\sim}{Q}_j^{(e)} - \underset{\sim}{Q}_i^{(e+1)} + \underset{\sim}{Q}_h = 0\,. \tag{4.13}$$

Trecînd la componente adimensionale și folosind relațiile (4.3), ale căror componente sînt precizate de (4.10), ecuația (4.13), ținînd seama că nodul h este legat la stînga de nodul $h-1$ și la dreapta de $h+1$, devine :

$$-(\bar{\underset{\sim}{k}}_{ji}^{(e)}\underset{\sim}{\bar{\Delta}}_{h-1} + \bar{\underset{\sim}{k}}_{jj}^{(e)}\underset{\sim}{\bar{\Delta}}_h) - (\bar{\underset{\sim}{k}}_{ii}^{(e+1)}\underset{\sim}{\bar{\Delta}}_h + \bar{\underset{\sim}{k}}_{ij}^{(e+1)}\underset{\sim}{\bar{\Delta}}_{h+1}) + \underset{\sim}{N}_h\underset{\sim}{\Delta}_h = 0. \tag{4.13'}$$

Ordonînd această ecuație matriceală în funcție de componentele $\underset{\sim}{\Delta}_{h-1}$, $\underset{\sim}{\Delta}_h$, $\underset{\sim}{\Delta}_{h+1}$, se obține relația

$$\bar{\underset{\sim}{k}}_{ji}^{(e)}\,\underset{\sim}{\bar{\Delta}}_{h-1} + (\bar{\underset{\sim}{k}}_{jj}^{(e)} + \bar{\underset{\sim}{k}}_{ii}^{(e+1)} - \underset{\sim}{N}_h)\,\underset{\sim}{\bar{\Delta}}_h + \bar{\underset{\sim}{k}}_{ij}^{(e+1)}\,\underset{\sim}{\bar{\Delta}}_{h+1} = 0\,, \tag{4.13''}$$

care, înmulțită cu $\cos pt$, exprimă vibrația proprie a nodului h. Dacă se notează elementul (e) din stînga nodului h cu $(h-1)$ și elementul $(e+1)$ din dreapta nodului h cu (h) și cu

$$\underset{\sim}{\bar{K}}_h = \underset{\sim}{\bar{k}}_{jj}^{(h-1)} + \underset{\sim}{\bar{k}}_{ii}^{(h)} - \underset{\sim}{N}_h \tag{4.14}$$

matricea de rigiditate dinamică a nodului h, ecuația (4.13'') devine:

$$\underset{\sim}{\bar{k}}_{ji}^{(h-1)} \underset{\sim}{\bar{\Delta}}_{h-1} + \underset{\sim}{\bar{K}}_h \underset{\sim}{\bar{\Delta}}_h + \underset{\sim}{\bar{k}}_{ij}^{(h)} \underset{\sim}{\bar{\Delta}}_{h+1} = 0. \tag{4.15}$$

Considerînd $h = 1, 2, \ldots, n$, ecuația matriceală (4.15) se transformă într-un sistem de ecuații omogen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\bar{K}}_1 & \underset{\sim}{\bar{k}}_{ij}^{(1)} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \cdots \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\bar{k}}_{ji}^{(1)} & \underset{\sim}{\bar{K}}_2 & \underset{\sim}{\bar{K}}_{ij}^{(2)} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \cdots \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\bar{k}}_{ji}^{(2)} & \underset{\sim}{\bar{K}}_3 & \underset{\sim}{\bar{k}}_{ij}^{(3)} & \underset{\sim}{0} \cdots \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{\bar{k}}_{ji}^{(n-1)} & \underset{\sim}{\bar{k}}_n \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\bar{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\bar{\Delta}}_1 \\ \underset{\sim}{\bar{\Delta}}_2 \\ \underset{\sim}{\bar{\Delta}}_3 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\bar{\Delta}}_n \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\bar{\Delta}}} = 0, \tag{4.16}$$

care, condensată, se scrie sub forma

$$\underset{\sim}{\bar{K}}\,\underset{\sim}{\bar{\Delta}} = 0, \tag{4.16'}$$

unde $\underset{\sim}{\bar{K}}$ reprezintă matricea de rigiditate dinamică a întregului sistem.

Întrucît s-a presupus că sistemul oscilează, sistemul (4.16) trebuie să admită soluții diferite de cea banală, ceea ce se realizează dacă este îndeplinită condiția ca determinantul să fie nul:

$$\left|\underset{\sim}{\bar{K}}\right| = 0, \tag{4.17}$$

denumită ecuația pulsațiilor proprii. Rădăcinile acesteia alese în forma $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$, sînt tocmai pulsațiile vibrațiilor proprii.

Determinarea vectorilor proprii ai matricei $\underset{\sim}{\bar{K}}$ [1], [5] reprezintă formele proprii de oscilație, prin combinarea cărora se obține vibrația liberă.

Observații. 1. Din sistemul de ecuații (4.16) se elimină ecuațiile corespunzătoare componentelor nule ale vectorilor Δ_h. Sistemul are însă aceeași formă atît pentru arborii static determinați, cît și pentru cei static nedeterminați, cu condiția ca în dreptul reazemelor să se introducă noduri.

2. Matricea dinamică $\underset{\sim}{\bar{K}}$ are formă de bandă, ceea ce permite determinarea valorilor și vectorilor (modurilor) proprii prin metoda resturilor [1].

3. În cazul reazemelor cu cedări în matricea de rigiditate a nodului (4.14) intervine și constanta elastică a reazemului precizată prin compo-

nente (2.43). Restul matricelor rămîn neschimbate, iar ecuaţia corespunzătoare din (4.16) nu se mai elimină.

4. Procedeul prezentat este uşor de transpus într-un program pentru un calculator cifric electronic.

5. DETERMINAREA MATRICEI DE RIGIDITATE DINAMICĂ PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE

Matricea de rigiditate dinamică pentru o bară, definită de (4.4) şi precizată de (4.10) ţinînd seama de deformaţiile de încovoiere, deformaţiile de forfecare şi inerţia de rotaţie, prezintă dificultăţi în aplicare datorită complexităţii funcţiilor trigonometrice şi hiperbolice care intervin. De aceea, în multe situaţii, se preferă folosirea matricei dinamice de rigiditate stabilită prin metoda elementelor finite. Evident, procedeul determinării pulsaţiilor şi formelor proprii descris în paragraful (4.2) rămîne integral valabil indiferent de forma adoptată pentru matricea de rigiditate, cea exactă analizată în paragraful 4.1 sau cea aproximativă stabilită prin metoda elementelor finite. Se consideră tronsonul $i - j$, de lungime l şi se alege originea sistemului de axe $x\ o\ y$ în mijlocul tronsonului.

Pentru eforturile şi deplasările capetelor se folosesc vectorii definiţi de (4.1) şi (4.2).

În cazul unei vibraţii armonice $v(xt) = v(x)\cos pt$, intensitatea forţei de inerţie este

$$f^i = -\overline{m}\,\ddot{v} = \overline{m}\,p^2\,v, \tag{5.1}$$

iar intensitatea cuplului de inerţie

$$m^i = -\rho I\,\ddot{\varphi} = \frac{\overline{m}\,I}{A}\,p^2\,\varphi, \tag{5.2}$$

unde $\overline{m}$ reprezintă masa pe unitatea de lungime a barei; A, I, aria secţiunii transversale a barei, respectiv momentul de inerţie al ariei A faţă de axa de rotaţie z.

Ca şi în lucrarea [3], se alege funcţia $v = v(x)$ sub forma

$$v = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3,$$

care, notînd vectorii

$$\underset{\sim}{\xi} = [1\ \ \xi\ \ \xi^2\xi^3], \tag{5.3}$$

$$\underset{\sim}{b} = [b_0\ b_1\ b_2\ b_3]^t, \tag{5.4}$$

devine

$$v = \underset{\sim}{\xi}\,\underset{\sim}{b}. \tag{5.5}$$

Folosind condițiile la limită pentru capetele i și j (fig. 8):

$$v = v_i\,; \quad \frac{dv}{d\xi} = \frac{l}{2}\varphi_i \text{ pentru } \xi = -1,$$

$$v = v_j\,; \quad \frac{dv}{d\xi} = \frac{l}{2}\varphi_j \text{ pentru } \xi = 1,$$

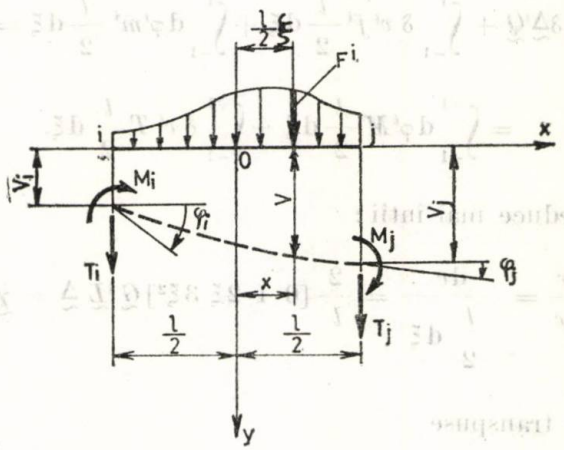


Fig. 8

se obține un sistem de ecuații algebrice din care se exprimă constantele b_0, b_1, b_2, b_3 în funcție de vectorul deplasărilor

$\underset{\sim}{\Delta} = [\varphi_i\ v_i\ \varphi_j\ v_j]^t$, sub forma

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\Delta}\,, \tag{5.6}$$

unde

$$\underset{\sim}{G} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Introducînd (5.6) în (5.5) se obține expresia deplasării transversale v în funcție de deplasările capetelor

$$v = \xi\,\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\Delta}. \tag{5.8}$$

Legătura, în timpul oscilației, dintre vectorul eforturilor și vectorul deplasărilor capetelor se stabilește prin folosirea principiului lui d'Alambert și teoremei lucrului mecanic virtual:

$$\bar{L}_{ex} = \bar{L}_{ef}. \tag{5.9}$$

În acest scop pentru bara din figura 8 acționată de vectorul Q, forțele de inerție (5.1) și cuplurile de inerție (5.2), se dă o deplasare virtuală $\delta\underset{\sim}{\Delta}$ și evaluînd termenii egalității (5.9) se obține:

$$\delta\underset{\sim}{\Delta}^t\underset{\sim}{Q} + \int_{-1}^{1} \delta v^t f^t \frac{l}{2}\,d\xi + \int_{-1}^{1} d\varphi^t m^t \frac{l}{2}\,d\xi =$$

$$= \int_{-1}^{+1} d\varphi^t M \frac{l}{2}\,d\xi + \int_{-1}^{+1} \delta v^t T \frac{l}{2}\,d\xi. \tag{5.10}$$

Din (5.8) se deduce mai întîi:

$$\varphi = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{\frac{l}{2}\,d\xi} = \frac{2}{l}[0\ 1\ 2\xi\ 3\xi^2]\,\underset{\sim}{G}^{-1}\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{\chi}\,\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\Delta} \tag{5.11}$$

și apoi valorile transpuse

$$\delta v^t = \delta\,\underset{\sim}{\Delta}^t\,\underset{\sim}{L}^t\,\underset{\sim}{G}^t\,\underset{\sim}{\xi}^t; \quad d\varphi^t = \delta\,\underset{\sim}{\Delta}^t\,\underset{\sim}{L}^t\,\underset{\sim}{G}^t\,\underset{\sim}{\chi}^t. \tag{5.12}$$

Folosind (5.1), (5.2), (5.11), (5.12) și faptul că $\bar{L}_{ef} = \delta\,\underset{\sim}{\Delta}^t\,\underset{\sim}{k}_s\,\underset{\sim}{\Delta}$, unde $\underset{\sim}{k}_s$ este matricea de rigiditate statică stabilită în lucrarea [3],

$$\underset{\sim}{k}_s = \frac{2\,EI}{l^3(1+12c)} \begin{bmatrix} 2l^2(1+3c) & 3l & l^2(1-6c) & -3l \\ 3l & 6 & 3l & -6 \\ l^2(1-6c) & 3l & 2l^2(1+3c) & -3l \\ -3l & -6 & -3l & 6 \end{bmatrix}, \tag{5.13}$$

dar ordonată în (5.13), în conformitate cu vectorul (4.2), relația (5.10) ia forma

$$\delta\,\underset{\sim}{\Delta}^t[Q + (\underset{\sim}{m} + \underset{\sim}{m}^*)\,p^2\,\underset{\sim}{\Delta}] = \delta\,\underset{\sim}{\Delta}^t\,\underset{\sim}{k}_s\,\underset{\sim}{\Delta}.$$

Această egalitate trebuie să fie valabilă pentru orice deplasare virtuală, ceea ce conduce la egalitatea:

$$\underset{\sim}{Q} = [\underset{\sim}{k}_s - (\underset{\sim}{m} + \underset{\sim}{m}^*)\,p^2]\,\underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{k}_D\,\underset{\sim}{\Delta}, \tag{5.14}$$

care pune în evidență matricea de rigiditate dinamică a barei:

$$\underset{\sim}{k}_D = \underset{\sim}{k}_s - (\underset{\sim}{m} + \underset{\sim}{m}^*)\,p^2. \tag{5.15}$$

În această expresie s-a notat :

— matricea maselor $\underset{\sim}{m}$ provenită din inerția de translație a masei distribuite $\overline{m}$,

$$\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{L}^t \underset{\sim}{G}^t \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{L}, \tag{5.16}$$

unde

$$\underset{\sim}{N} = \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} \overline{m} \, \underset{\sim}{\xi}^t \underset{\sim}{\xi} \, \mathrm{d}\xi; \tag{5.17}$$

— și matricea maselor $\underset{\sim}{m}^*$ provenită din inerția de rotație a masei distribuite $\overline{m}$

$$\underset{\sim}{m}^* = \underset{\sim}{L}^t \underset{\sim}{G}^t \underset{\sim}{N}_1 \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{L}, \tag{5.18}$$

unde

$$\underset{\sim}{N}_1 = \frac{2}{l} \int_{-1}^{+1} \frac{mI}{A} \cdot \underset{\sim}{\chi}^t \underset{\sim}{\chi} \, \mathrm{d}\xi \tag{5.19}$$

Pentru bara cu secțiune constantă, matricea $\underset{\sim}{N}$ (5.17) devine

$$\underset{\sim}{N} = \frac{\overline{m}\, l}{105} \begin{bmatrix} 105 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 21 \\ 35 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \tag{5.17'}$$

iar matricea $\underset{\sim}{N}_1$ (5.19),

$$\underset{\sim}{N}_1 = \frac{4}{15} \frac{\overline{m}I}{Al} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 27 \end{bmatrix}. \tag{5.19'}$$

Introducînd (5.7) și (5.17') în (5.16) se obține

$$\underset{\sim}{m} = \frac{\overline{m}l}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & 22l & -3l^2 & 13l \\ 22l & 156 & 13l & 54 \\ -3l^2 & -13l & 4l^2 & -22l \\ 13l & 54l & -22l & 156 \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

Folosind (5.7) și (5.19'), matricea $\underset{\sim}{m}^*$ (5.18) devine :

$$\underset{\sim}{m}^* = \frac{\overline{m}}{420} \frac{I}{Al^2} \begin{bmatrix} 56l^2 & 42l & -14l^2 & -42l \\ 42l & 504 & 42l & -504 \\ -14l & 42l & 56l^2 & -42l \\ -42l^2 & -504 & -42l & 504 \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

Dacă se notează

$$\lambda = \frac{\bar{m}l^4}{840EI} p^2 \; ; \; \lambda_1 = \frac{\bar{m}\, l^4}{840\, EI} \cdot \frac{I}{Al^2} p^2 \tag{5.22}$$

şi se folosesc relaţiile (5.13), (5.20) şi (5.21), matricea de rigiditate dinamică ia forma :

Matricea de rigiditate dinamică (5.23) ţine seama de deformările din forţele tăietoare prin termenii care conţin pe c definit de formula (2.14) şi de inerţia de rotaţie a maselor prin termeni care conţin pe λ_1. Făcînd $c = 0$, $\lambda_1 = 0$, se obţine matricea dinamică de rigiditate pentru situaţia cînd se ţine seama numai de deformările din momentele încovoietoare şi inerţia de translaţie.

Observaţii. 1. Procedeul descris pentru stabilirea matricei dinamice prin metoda elementelor finite poate fi folosit şi în cazul secţiunilor variabile continuu prin efectuarea integralelor (5.17) şi (5.19), ţinînd seama de variaţia masei $\bar{m}$ şi determinarea în consecinţă a matricei $\underset{\sim}{k}_s$, cum se arată în [3].

2. Folosirea matricei (5.23) în algoritmul prezentat în paragraful 4 al acestei lucrări uşurează calculul numeric, fără ca erorile introduse să fie importante. De altfel precizia poate fi îmbunătăţită prin mărirea numărului de elemente finite folosite.

Primită la redacţie la 19 ianuarie, 1981

BIBLIOGRAFIE

1. GH. BUZDUGAN, *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1975.
2. R. D. HENSHELL, G. B. WARBURTON, *Transmission of vibration in beam systems* International Journal for numerical methods in engineering, **1**, 47–66 (1969).
3. MAGDALENA POSEA, *Aspecte privind calculul deformaţiilor arborilor*, St. cerc. mec. apl., *2*, 1981.
4. A. RÎPIANU, I. CRĂCIUN, *Osii, arbori drepţi şi arbori cotiţi*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1977.
5. WARBURTON G.B., *The dynamical behaviour of structures*, Pergamon Press, Ltd. Oxford, England, 1976.
6. R. ZURMÜHL, *Ein Matrizenverfahren zur Behandlung von Biegeschwingungen ingenieurs*, Archiv, **XXXII**, 1963.

ECHILIBRAJ OPTIM ÎN MEDIE DE PRIMĂ APROXIMAȚIE A ROTORULUI CU MASĂ VARIABILĂ (DEZECHILIBRU VARIABIL)

de GHEORGHE PANAIT
Institutul de petrol și gaze Ploiești

În lucrare se prezintă o soluție pentru echilibrarea dinamică în medie într-o primă aproximație a rotorilor cu masă variabilă (cu dezechilibru variabil). Se pleacă de la ecuațiile generale ale mișcării rotorilor cu masă variabilă și se stabilesc condițiile acestui echilibraj.

1. GENERALITĂȚI

Echilibrarea rotorilor reprezintă una dintre cele mai importante, dificile și costisitoare operații ale construcției de mașini.

Echilibrajul este o problemă deosebit de actuală în special pentru mașinile care funcționează la turații mari.

Tehnica echilibrajului rotorilor cu masă constantă a făcut progrese foarte mari odată cu dezvoltarea electronicii și a calculatoarelor electronice. Datorită importanței pe care o are pentru tehnică, s-au construit dispozitive, mașini și instalații agregat de diferite tipuri, care funcționează după program și dau o productivitate ridicată, mai ales în producția de serie mare.

Spunem că un rotor este echilibrat dinamic (deci general) atunci cînd componentele dinamice ale reacțiunilor din lagăre sînt nule în timpul funcționării, indiferent de viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε, *adică axa de rotație trebuie să fie axă centrală și principală de inerție* ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$).

În lucrările de referință [1]; [2] și [3] se demonstrează care sînt condițiile generale de echilibrare ale unui *rotor cu masă constantă*.

De asemenea, în lucrarea [5] se face un studiu de sinteză asupra stadiului actual al problemei echilibrului rotorilor cu masă constantă, iar în lucrarea [4] se prezintă unele metode practice de echilibrare a rotorilor.

Dacă echilibrarea rotorilor cu masă constantă este o problemă atît de dificilă, problema echilibrării generale a unui rotor cu masă variabilă (cu dezechilibru variabil) este cu mult mai complicată atît din punctul de vedere al tratării matematice, dar mai ales a realizării practice.

În continuare se prezintă o posibilitate de echilibrare în medie într-o primă aproximație a rotorilor cu masă variabilă (cu dezechilibru variabil).

ST CERC. MEC APL., TOM 40, NR. 3, 1981, P. 401—407

2. ECHILIBRAJ OPTIM ÎN MEDIE DE PRIMĂ APROXIMAȚIE A ROTORULUI CU MASĂ VARIABILĂ (DEZECHILIBRU VARIABIL)

În lucrarea [5] sînt demonstrate ecuațiile generale de mișcare ale unui rotor cu masă variabilă :

$$\begin{aligned} M(t)\{\bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}(t)+\bar{\omega}\times[\bar{\omega}\times\bar{\rho}(t)]\} &= \bar{R}+\bar{\Phi}_r(t),\\ \tau(t)\,\bar{\varepsilon}+\bar{\omega}\times\tau(t)\,\bar{\omega} &= \bar{M}_e+\bar{M}_r(t), \end{aligned} \tag{1}$$

unde

$M(t)$ reprezintă masa rotorului la momentul t;
$\bar{\rho}(t)$ — vectorul de poziție al centrului de greutate C (fig. 1);
$\bar{\omega}$ — vectorul viteză unghiulară ($\bar{\omega}=\omega\cdot\bar{k}$);
$\bar{\varepsilon}$ — vectorul accelerație unghiulară ($\bar{\varepsilon}=\varepsilon\cdot\bar{k}$);
$\tau(t)$ — tensorul momentelor de inerție

$$\tau(t)=\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz}\\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz}\end{bmatrix} \tag{2}$$

$\bar{\Phi}_r(t)$ — rezultanta forțelor reactive;
$\bar{M}_r(t)$ — momentul rezultant al forțelor reactive;
$\bar{R}$ — rezultanta forțelor active și de legătură;
$\bar{M}_e$ — momentul rezultant al forțelor active și de legătură.

Considerînd ca axă de rotație axa $O_1z_1\equiv Oz$ (fig. 1), din ecuațiile vectoriale (1) proiectate pe axele triedrului $T(Oxyz)$ solidar cu rotorul, se obțin ecuațiile scalare :

$$\begin{aligned} -\varepsilon M\eta-\omega^2M\xi &= X+R_{1x}+R_{2x}+\Phi_{r,x},\\ \varepsilon M\xi-\omega^2M\eta &= Y+R_{1y}+R_{2y}+\Phi_{r,y},\\ 0 &= Z+R_{1z}+R_{2z}+\Phi_{r,z},\\ -\varepsilon J_{xz}+\omega^2J_{yz} &= M_x-lR_{2y}+M_{r,x},\\ -\varepsilon J_{yz}-\omega^2J_{xz} &= M_y+lR_{2x}+M_{r,y},\\ \varepsilon J_{zz} &= M_z+M_{r,z}. \end{aligned} \tag{3}$$

În aceste ecuații toate mărimile sînt funcții de timp, cu excepția proiecțiilor X, Y, Z ale rezultantei forțelor exterioare efectiv aplicate și a proiecțiilor M_x, M_y, M_z ale momentului rezultant al acestor forțe.

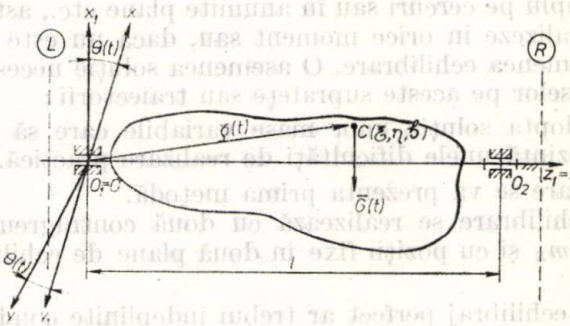


Fig. 1

Din relațiile (3) se pot explicita reacțiunile din lagăre:

$$R_{1x}(t) = \varepsilon\left(\frac{J_{yz}}{l} - M\eta\right) + \omega^2\left(\frac{J_{xz}}{l} - M\xi\right) - X - \Phi_{r,x} + \frac{1}{l}(M_y + M_{r,y}),$$

$$R_{1y}(t) = \varepsilon\left(M\xi - \frac{J_{xz}}{l}\right) + \omega^2\left(\frac{J_{yz}}{l} - M\eta\right) - Y - \Phi_{r,y} - \frac{1}{l}(M_x + M_{r,x}),$$

$$R_{2x}(t) = -\varepsilon\frac{J_{yz}}{l} - \omega^2\frac{J_{xz}}{l} - \frac{1}{l}(M_y + M_{r,y}), \tag{4}$$

$$R_{2y}(t) = \varepsilon\frac{J_{xz}}{l} - \omega^2\frac{J_{yz}}{l} + \frac{1}{l}(M_x + M_{r,x}),$$

$$R_{1z}(t) + R_{2z}(t) = -Z - \Phi_{r,z}.$$

Condițiile de echilibrare ale unui rotor de masă variabilă rămîn evident aceleași ca la rotorul cu masă constantă, adică *axa de rotație trebuie să fie axă centrală și principală de inerție* [$\xi(t) = 0$, $\eta(t) = 0$, $J_{xz}(t) = 0$, $J_{yz}(t) = 0$].

Dificultatea principală constă însă în faptul că atît coordonatele centrului de masă al rotorului, cît și momentele centrifugale de inerție sînt variabile în timp și în acest caz diferitele soluții valabile pentru cazul rotorului cu masă constantă *nu mai sînt aplicabile.*

În această situație problema echilibrării cu mase adiționale, constante în poziții fixe în plane de echilibrare nu mai este posibilă.

Problema ar putea căpăta în această situație trei soluții:

1) de a adopta totuși soluția clasică de folosire a unor mase constante în poziții fixe în raport cu rotorul punînd condiția unei echilibrări *optime*

în medie, într-un interval de timp (de exemplu o perioadă a mişcării de rotaţie), dar nu în orice moment t;

2) de a adopta soluţia unor mase constante care să ocupe în timpul mişcării poziţii variabile pe o anumită curbă sau o anumită suprafaţă impusă, de exemplu pe cercuri sau în anumite plane etc., astfel încît echilibrarea să se realizeze în orice moment sau, dacă nu este posibil, să se optimizeze o asemenea echilibrare. O asemenea soluţie necesită un studiu al mişcărilor maselor pe aceste suprafeţe sau traiectorii;

3) de a adopta soluţia unor mase variabile care să ocupe poziţii fixe. Soluţia prezintă unele dificultăţi de realizare practică.

În continuare se va prezenta prima metodă.

Această echilibrare se realizează cu două contragreutăţi cu mase constante m_L şi m_R şi cu poziţii fixe în două plane de echilibrare L şi R alese arbitrar.

Pentru un echilibraj perfect ar trebui îndeplinite condiţiile:

$$m_L X_L + m_R X_R + M(t)\xi(t) = 0\,; \quad m_L Y_L + m_R Y_R + M(t)\eta(t) = 0, \tag{5}$$

$$J_{xz}(t) + m_L X_L Z_L + m_R X_R Z_R = 0\,; \quad J_{yz}(t) + m_L Y_L Z_L + m_R Y_R Z_R = 0.$$

Dar aceste condiţii nu pot fi realizate cu mase constante m_L şi m_R în puncte fixe în raport cu rotorul, datorită faptului că $M(t)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$, $J_{xz}(t)$, $J_{yz}(t)$ sînt funcţie de timp.

Rezultă că la momentul t aceste expresii în loc să fie egale cu zero, au anumite valori ce depind de timpul t şi anume:

$$m_L X_L + m_R X_R + M(t)\xi(t) = A(t)\,; \quad m_L Y_L + m_R Y_R + M(t)\eta(t) = B(t), \tag{6}$$

$$J_{xz}(t) + m_L X_L Z_L + m_R X_R Z_R = C(t)\,; \quad J_{yz} + m_L Y_L Z_L + m_R Y_R Z_R = D(t),$$

unde $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ şi $D(t)$ sînt aceste valori.

Se consideră ca variabile momentele statice $m_L X_L$, $m_R X_R$, $m_R Y_R$, $m_R Y_R$ şi se formează funcţionala

$$I = \int_0^T [A^2 + B^2 + \lambda(C^2 + D^2)]\,dt, \tag{7}$$

unde $\lambda \geqslant 0$ este un factor constant arbitrar care asigură omogenitatea formulei şi se caută condiţiile pentru care această funcţională ia valoarea minimă, *corespunzătoare unui echilibraj optim în medie de primă aproximaţie într-un interval de timp impus* T, care poate fi, de exemplu, în cazul unei mişcări periodice egal cu perioada.

Condiţiile de minim sînt :

$$\frac{\partial I}{\partial(m_L X_L)} = \int_0^T 2A \frac{\partial A}{\partial(m_L X_L)}\,dt + \int_0^T 2B \frac{\partial B}{\partial(m_L X_L)}\,dt = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial(m_R X_R)} = \int_0^T 2A \frac{\partial A}{\partial(m_R X_R)}\,dt + \int_0^T 2B \frac{\partial B}{\partial(m_R X_R)}\,dt = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial(m_L Y_L)} = \int_0^T 2A \frac{\partial A}{\partial(M_L Y_L)}\,dt + \int_0^T 2B \frac{\partial B}{\partial(m_L Y_L)}\,dt = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial(m_R Y_R)} = \int_0^T 2A \frac{\partial A}{\partial(m_R Y_R)}\,dt + \int_0^T 2B \frac{\partial B}{\partial(m_R Y_R)}\,dt = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial I}{\partial(m_L X_L)} = \int_0^T 2C \frac{\partial C}{\partial(m_L X_L)}\,dt + \int_0^T 2D \frac{\partial D}{\partial(m_L X_L)}\,dt = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial I}{\partial(m_R X_R)} = \int_0^T 2C \frac{\partial C}{\partial(m_R X_R)}\,dt + \int_0^T 2D \frac{\partial D}{\partial(m_R X_R)}\,dt = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial I}{\partial(m_L Y_L)} = \int_0^T 2C \frac{\partial C}{\partial(m_L Y_L)}\,dt + \int_0^T 2D \frac{\partial D}{\partial(m_L Y_L)}\,dt = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial I}{\partial(m_R Y_R)} = \int_0^T 2C \frac{\partial C}{\partial(m_R Y_R)}\,dt + \int_0^T 2D \frac{\partial D}{\partial(m_R Y_R)}\,dt = 0.$$

Derivatele parţiale din ecuaţiile (8) au valorile :

$$\frac{\partial A}{\partial(m_L X_L)} = 1\,; \quad \frac{\partial A}{\partial(m_R X_R)} = 1\,; \quad \frac{\partial A}{\partial(m_L Y_L)} = 0\,; \quad \frac{\partial A}{\partial(m_R Y_R)} = 0\,;$$

$$\frac{\partial B}{\partial(m_L X_L)} = 0\,; \quad \frac{\partial B}{\partial(m_R X_R)} = 0\,; \quad \frac{\partial B}{\partial(m_L Y_L)} = 1\,; \quad \frac{\partial B}{\partial(m_R Y_R)} = 1, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial C}{\partial(m_L X_L)} = Z_L\,; \quad \frac{\partial C}{\partial(m_R X_R)} = Z_R\,; \quad \frac{\partial C}{\partial(m_L Y_L)} = 0\,; \quad \frac{\partial C}{\partial(m_R Y_R)} = 0,$$

$$\frac{\partial D}{\partial(m_L X_L)} = 0\,; \quad \frac{\partial D}{\partial(m_R X_R)} = 0\,; \quad \frac{\partial D}{\partial(m_L Y_L)} = Z_L\,; \quad \frac{\partial D}{\partial(m_R Y_R)} = Z_R.$$

Ţinînd seama de relaţiile (9), din relaţiile (8) se obţin condiţiile globale de echilibraj optim în medie de primă aproximaţie, cînd masa rotorului este variabilă, sub forma :

$$m_L X_L + m_R X_R + \frac{1}{T}\int_0^T M(t)\,\xi(t)\,dt = 0,$$

$$m_L Y_L + m_R Y_R + \frac{1}{T}\int_0^T M(t)\,\eta(t)\,dt = 0\,, \tag{10}$$

$$m_L X_L Z_L + m_R X_R Z_R + \frac{1}{T}\int_0^T J_{xz}(t)\,dt = 0,$$

$$m_L Y_L Z_L + m_R Y_R Z_R + \frac{1}{T}\int_0^T J_{yz}(t)\,dt = 0.$$

Acest sistem se poate rezolva în raport cu momentele statice $m_L X_L$, $m_R X_R$, $m_L Y_L$, $m_R Y_R$.

Poziţia planelor de echilibraj L şi R fiind arbitrară, Z_L şi Z_R se consideră cunoscute.

Direcţiile la masele m_L şi m_R sînt date de relaţiile :

$$\operatorname{tg}\alpha_L = \frac{m_L Y_L}{m_L X_L} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\alpha_R = \frac{m_R Y_R}{m_R X_R}\,. \tag{11}$$

Problema este complet fundamentată teoretic, iar realizarea practică se poate face fără dificultate.

Forma funcţiilor $\xi(t)$, $\eta(t)$, $J_{xz}(t)$, $J_{yz}(t)$ şi $M(t)$, depinde numai de ipotezele care se fac asupra variaţiei masei sau distribuţiei masei rotorului.

Practic, după explicitarea momentelor statice $m_L X_L$, $m_R X_R$, $m_L Y_L$, $m_R Y_R$, se pot alege masele m_L şi m_R şi rezultă coordonatele X_L, X_R, Y_L şi Y_R, sau se poate proceda invers, să se impună locul de montaj al celor două mase în planele de echilibrare L şi R şi să rezulte masele m_L şi m_R.

3. CONCLUZII

1. Procedeele clasice utilizate la echilibrarea rotorilor cu masă constantă nu pot fi aplicate în cazul rotorilor cu masă variabilă (dezechilibru variabil) datorită faptului că mărimile inerţiale sînt funcţii de timp ;

2. Se poate realiza un *echilibraj în medie (optim)* cu mase constante plasate în poziţii fixe. În acest caz condiţiile de echilibraj sînt date de relaţiile (10) ;

3. Prin metoda prezentată se poate realiza un echilibraj mediu într-un anumit interval de timp impus T dar nu în orice moment t ;

4. Intervalul T poate fi la un rotor chiar perioada unei rotații complete;

5. Pentru a putea aplica metoda cu bune rezultate, trebuie să se cunoască domeniul de variație a dezechilibrului, adică să se cunoască domeniile de variație în timp a mărimilor $M(t)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$, $J_{xz}(t)$ și $J_{yz}(t)$;

6. Practic, domeniile de variație ale mărimilor funcție de timp din relațiile (10) se pot stabili fără mari dificultăți pentru fiecare tip de rotor în parte.

Primită la redacție la 28 octombrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. N. MANOLESCU și colab., *Teoria mecanismelor și mașinilor*, Edit. didactică și pedagogică București, 1972.
2. RADU P. VOINEA ș.a., *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.
3. V. VÂLCOVICI, ȘT. BĂLAN, RADU VOINEA, *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, București, 1968.
4. T. RADU și D. BREBENEL, *Mașini, dispozitive și metode de echilibrare statică și dinamică*, Edit. tehnică, București, 1967.
5. GHEORGHE PANAIT, *Contribuții la studiul echilibrajului rotorilor cu masă variabilă*. Teză de doctorat, Institutul politehnic, București, 1978.

4. Intervalul T poate fi la fel de orice perioadă mai mică decât perioada completă;

5. Pentru a putea aplica metoda de bază rezultate, trebuie să se cunoască domeniul de variație a derivabilității, adică să se cunoască domeniile de variație în timp a mărimilor $M(t)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\sqrt{\ }_{xx}(t)$ și $\sqrt{\ }_{yy}(t)$;

6. Practic, domeniile de variație ale mărimilor funcție de timp din relațiile (10) se pot stabili fără mari dificultăți pentru fiecare tip de rotor în parte.

Primită la redacție la 24 octombrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. N. MANOLESCU și colab., Teoria mecanismelor și mașinilor, Edit. didactică și pedagogică, București, 1972.
2. RADU P. VOINEA a.a., Mecanica, Edit. didactică și pedagogică, București, 1973.
3. V. VALCOVICI, ȘT. BĂLAN, RADU VOINEA, Mecanica mecanică, Edit. tehnică, București, 1968.
4. T. RADU și D. BRÎNDEANU, Mașini, dispozitive și mecanisme de orientare staționară și giromecanică, Edit. tehnică, București, 1967.
5. GHEORGHE PAȘALIT, Contribuții la studiul echilibrării rotorilor cu masă variabilă, Teză de doctorat, Institutul politehnic, București, 1978.

DETERMINAREA STĂRII DE TENSIUNE ÎNTR-O MOARĂ DE MINEREU DE MARI DIMENSIUNI

de N. CONSTANTIN, M. BLUMENFELD, M. MUNTEANU, I. CONSTANTINESCU
Institutul politehnic București

În lucrare se prezintă modul în care au fost modelate geometria și sarcinile structurii de rezistență a unei mori în vederea analizei stării de tensiune, utilizînd metoda elementelor finite. Se dau sub formă de tabele și grafice unele din rezultatele obținute pentru structura în ansamblu și pentru două substructuri considerate în zone de concentrare a tensiunilor.

1. INTRODUCERE

Exploatarea minereurilor sărace existente în țară impune realizarea unor mori autogene de mari dimensiuni, cu productivități ridicate, care să facă rentabilă valorificarea zăcămintelor.

O astfel de moară autogenă este prezentată în figura 1. Elementele componente sînt ilustrate pe desen. Îmbinarea dintre tobă și capace (reali-

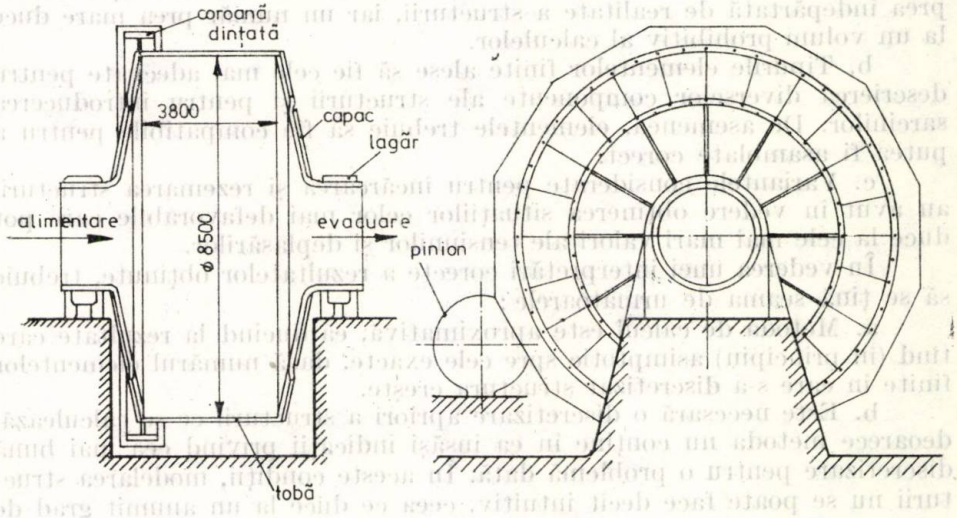


Fig. 1.

zate la rîndul lor din mai multe bucăți) se face cu șuruburi. Rezemarea se face pe lagăre hidrostatice, impuse de turația joasă (11,4 rot/min). Acționarea este asigurată de un motor sincron de joasă turație prin pinion

şi coroană dinţată, variantă care s-a dovedit a fi cea mai economică.

În vederea determinării stării de tensiune, s-a stabilit, mai întîi, schema optimă de calcul. Din analiza construcţiei morii se constată că aceasta este o structură complexă, formată din tronsoane de învelişuri cu forme diferite, cu grosimi constante sau variabile, avînd rigidizări cu nervuri şi asamblări demontabile cu şuruburi. Tronsoanele sînt realizate prin turnare sau sudare. Pe de altă parte, solicitarea este produsă de un sistem de sarcini ale cărui componente sînt : greutatea proprie, greutatea minereului şi a blindajelor, forţe centrifuge, forţe de angrenare (în coroana dinţată) şi forţe de prestrîngere (în asamblările demontabile).

Calculul ca bară al acestei structuri poate da unele indicaţii privind ordinul de mărime al tensiunilor cel mult în secţiunea de mijloc, în celelalte secţiuni fiind de aşteptat rezultate foarte depărtate de cele reale.

Calculul ca placă al structurii este practic posibil numai dacă se acceptă o schematizare de structură izotropă, axial-simetrică. În acest caz, însă, nu poate fi introdusă în calcul anizotropia constructivă datorată prezenţei nervurilor, asimetria solicitărilor produse de greutatea proprie şi forţa centrifugă a minereului în timpul funcţionării (cînd moara are o mişcare de rotaţie), precum şi grosimea variabilă a învelişului.

Ca urmare a celor arătate mai sus, rezultă că singura modalitate eficientă de abordare a calculului de rezistenţă al structurii este discretizarea acesteia şi utilizarea metodei elementului finit.

Aplicarea acestei metode generale de calcul s-a făcut avînd în vedere următoarele :

a. Numărul nodurilor şi al elementelor finite în care se descompune structura trebuie să fie optim ; un număr prea mic duce la o aproximare prea îndepărtată de realitate a structurii, iar un număr prea mare duce la un volum prohibitiv al calculelor.

b. Tipurile elementelor finite alese să fie cele mai adecvate pentru descrierea diverselor componente ale structurii şi pentru introducerea sarcinilor. De asemenea, elementele trebuie să fie compatibile pentru a putea fi asamblate corect.

c. Variantele considerate pentru încărcarea şi rezemarea structurii au avut în vedere obţinerea situaţiilor celor mai defavorabile care pot duce la cele mai mari valori ale tensiunilor şi deplasărilor.

În vederea unei interpretări corecte a rezultatelor obţinute, trebuie să se ţină seama de următoarele :

a. Metoda de calcul este aproximativă, ea ducînd la rezultate care tind (în principiu) asimptotic spre cele exacte, dacă numărul elementelor finite în care s-a discretizat structura creşte.

b. Este necesară o discretizare apriori a structurii ce se calculează, deoarece metoda nu conţine în ea însăşi indicaţii privind cea mai bună discretizare pentru o problemă dată. În aceste condiţii, modelarea structurii nu se poate face decît intuitiv, ceea ce duce la un anumit grad de arbitrar şi deci la un anumit risc.

c. Necunoscutele primare ale metodei elementelor finite sînt deplasările nodurilor, aceste mărimi fiind determinate cu precizie relativ bună pentru modelul ales. Eforturile şi tensiunile sînt mărimi secundare, care se obţin prin calcul plecînd de la deplasările nodurilor, ceea ce le face susceptibile de erori mai mari decît acestea. De asemenea, trebuie avut

în vedere că pentru fiecare tip de element valorile tensiunilor și eforturilor se dau sub altă formă și anume : la mijloacele laturilor sau în centrul elementului.

Pentru efectuarea analizei stării de tensiune, s-a utilizat programul SAP IV, implementat pe un calculator Felix C-512.

2. MODELAREA STRUCTURII

2.1. MODELAREA GEOMETRICĂ

Pentru analiza stării de tensiune cu o precizie suficient de mare și fără un volum exagerat al calculelor, s-au considerat mai multe etape.

În prima etapă s-a efectuat discretizarea structurii în ansamblu. Acest lucru s-a făcut cu ajutorul unei rețele de 368 noduri, ca în figura 2.

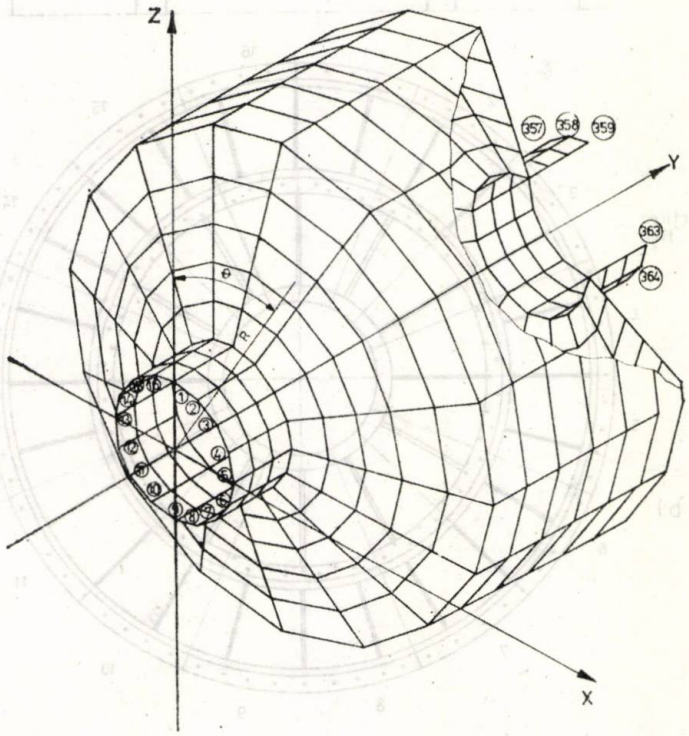


Fig. 2.

Coordonatele globale la care s-a raportat structura sînt figurate pe desen. Ținînd cont că axa Y este axă de rotație, pentru definirea nodurilor s-au folosit coordonatele cilindrice R, θ, Y. Prin această discretizare structura a fost împărțită în 16 fîșii meridiane, fiecare conținînd în lungul ei 22

elemente (fig. 3). Dimensiunile elementelor obţinute în felul acesta sînt comparabile. Tipul de element folosit a fost cel de înveliş subţire. Grosimea fiecărui element a fost luată egală cu grosimea locală reală pe porţiunile cu grosimi constante şi egală cu grosimea medie, pe porţiunile cu grosime variabilă.

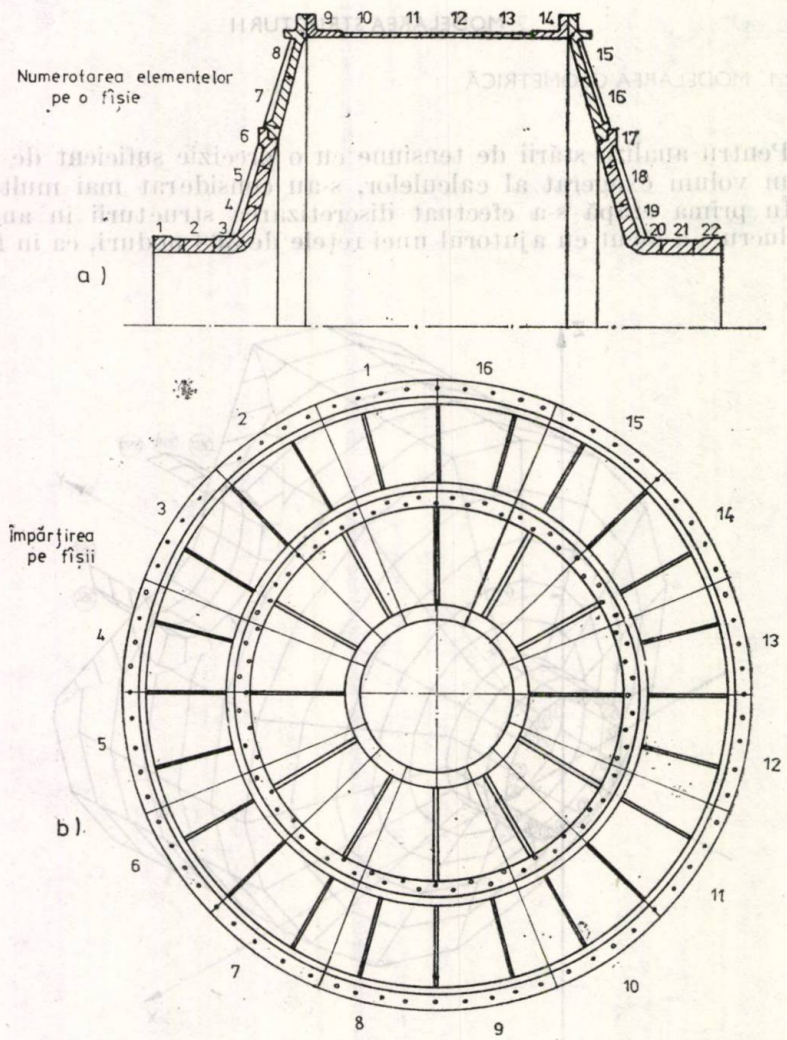


Fig. 3.

Pe această reţea globală s-au plasat şi elemente tridimensionale de bară, care au modelat nervurile şi coroana dinţată.

Nervurile au fost modelate prin 160 elemente de bară plasate pe raze în zona capacelor. Coroana dinţată a fost modelată prin 16 elemente

de bară, plasate cîte unul pe fiecare fişie, la graniţa dintre elementele 8 şi 9 (fig. 3 *a*).

În a doua etapă a studiului s-au considerat cîteva substructuri, în zonele de concentrare a tensiunilor, în care calculul de ansamblu nu putea da imagini satisfăcătoare ale stărilor de tensiuni.

O astfel de zonă este racordarea fusului cilindric cu capacul conic. Această zonă, numită în continuare substructura 1, a fost discretizată

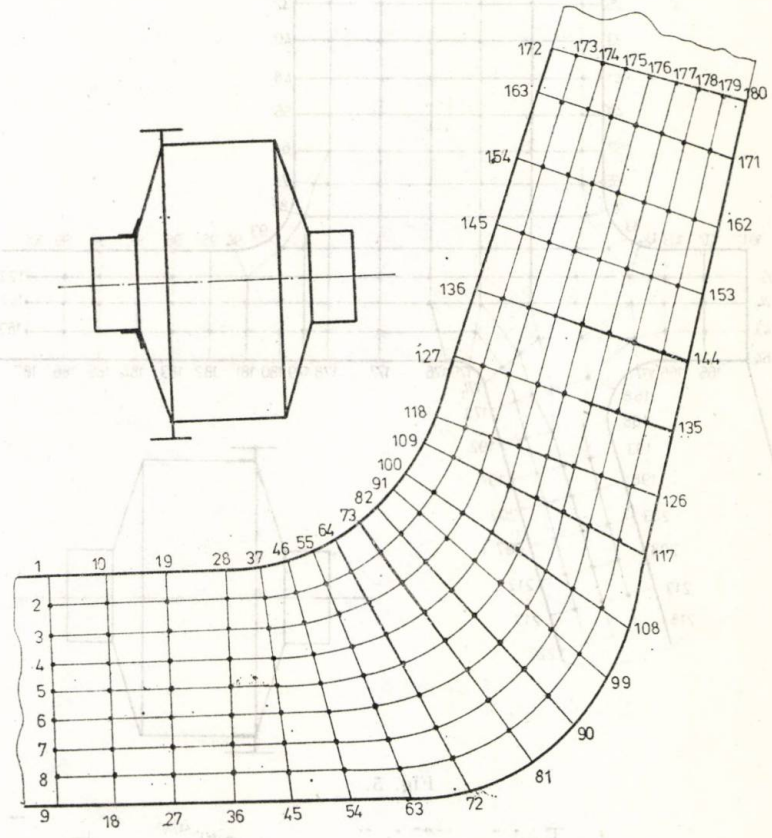


Fig. 4.

prin intermediul unei reţele în 180 noduri (fig. 4). Pentru analiza stării de tensiune s-au folosit 152 de elemente plane patrulatere de tip axial-simetric.

O altă zonă de concentrare a tensiunilor este racordarea între capacul conic şi toba cilindrică. Această zonă, numită în continuare substructura 2, a fost discretizată cu ajutorul unei reţele de 222 noduri (fig. 5). Pentru studiul stării de tensiune s-au folosit 184 de elemente plane patrulatere şi triunghiulare, de tip stare plană de deformaţii.

Rezemarea structurii în ansamblu a fost modelată în mai multe variante. În figura 6 se prezintă varianta finală, care s-a dovedit a fi cea mai dezavantajoasă.

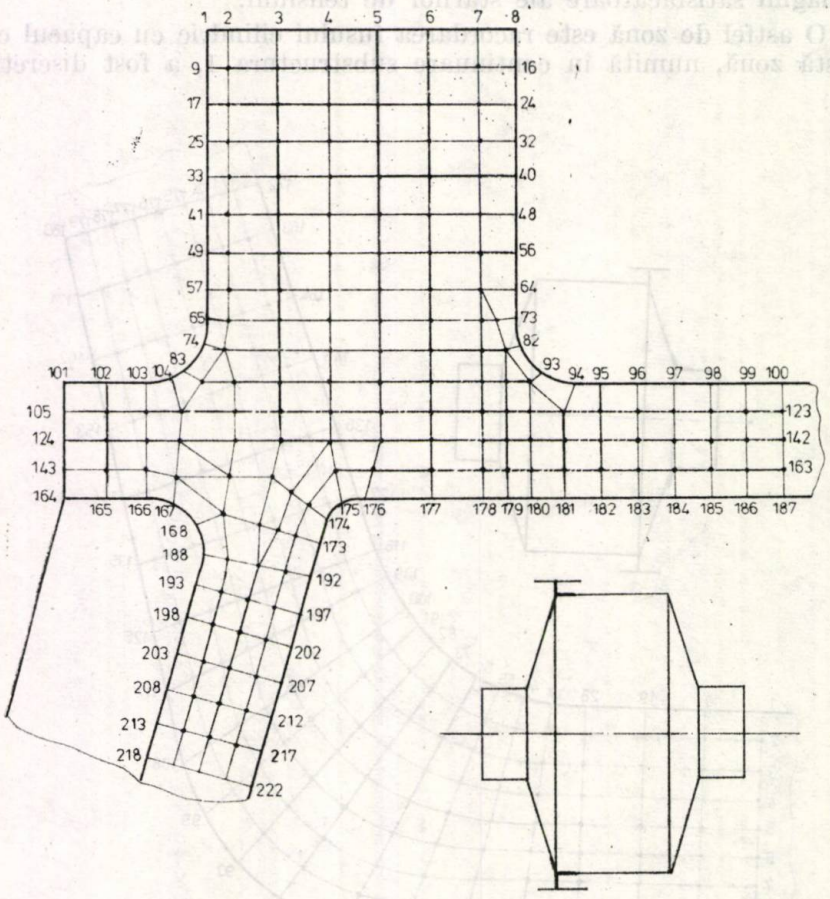


Fig. 5.

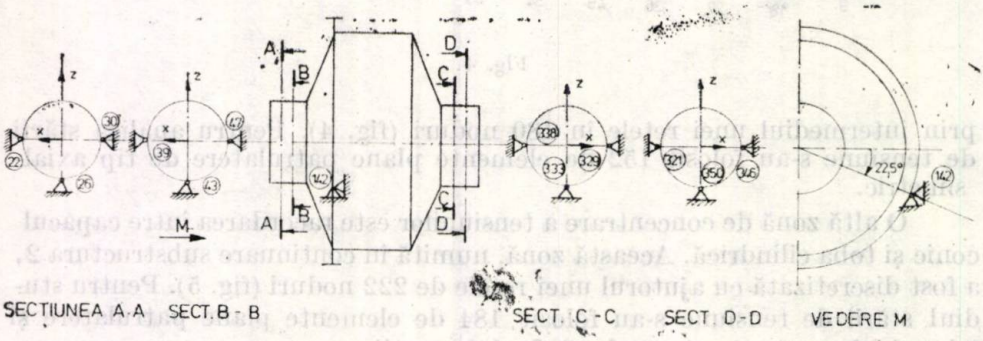


Fig. 6.

2.2. MODELAREA SARCINILOR

Sarcinile exterioare care solicită structura în ansamblu sînt formate din două categorii de forţe : forţe de greutate şi forţe de inerţie (forţe centrifuge). Cele două categorii de forţe au fost luate în considerare separat.

a. Greutatea proprie se compune din :

— greutate structură de rezistenţă (tobă, capace şi fusuri), $G_R = 2040$ kN ;

— greutate blindaje, $G_B = 1760$ kN ;

— greutate coroană dinţată, $G_C = 800$ kN ;

— greutate minereu şi bile, $G_M = 200$ kN.

Avînd în vedere că blindajele (care nu fac parte din structura de rezistenţă) sînt montate pe tobă şi pe capace, de ele s-a ţinut seama prin majorarea densităţii oţelului în zonele respective, conform relaţiei :

$$\rho_{ech_1} = \frac{G_R + G_B}{G_R}\,\rho = \frac{204+176}{204}\,7{,}8 \cdot 10^3 = 14{,}5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

unde $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3 este densitatea oţelului.

De greutatea coroanei dinţate s-a ţinut seama printr-o majorare suplimentară a densităţii elementelor din dreptul coroanei dinţate conform relaţiei :

$$\rho_{ech2} = \rho_{ech1} + \frac{G_C}{V_E} = 14{,}5 \cdot 10^3 + \frac{80 \cdot 10^3}{1{,}38} = 72{,}5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

în care $V_E = 1{,}38$ m^3 este volumul elementelor finite din dreptul coroanei dinţate.

Programul a calculat greutatea proprie, înmulţind volumul fiecărui element (determinat pe baza coordonatelor nodurilor şi a grosimii elementului) cu densitatea corespunzătoare.

Greutatea proprie a minereului şi a bilelor s-a introdus sub formă de forţe concentrate în nodurile reţelei din dreptul fişiilor 3 ... 10, corespunzătoare elementelor de pe tobă (9 ... 14, fig. 3), aşa cum reiese din figura 7. Astfel, pe fiecare şir de noduri a fost repartizată masa de minereu din zonele delimitate de liniile întrerupte. Pentru aceasta s-a considerat că minereul este repartizat uniform în lungul tobei.

Unghiul de 35° făcut de suprafaţa liberă a minereului cu orizontala s-a determinat din condiţia de desprindere de perete a particulelor de minereu aflate sub influenţa greutăţii proprii şi a forţei centrifuge, la turaţia de regim.

b. Forţele de inerţie se compun din forţele de inerţie ale structurii morii, ale blindajelor, precum şi ale minereului şi bilelor.

Forţele de inerţie s-au simulat prin introducerea unei densităţi echivalente, programul permiţînd orientarea forţei masice astfel obţi-

nute după direcţia radială. Forţa de inerţie corespunzătoare unui element s-a calculat cu relaţia

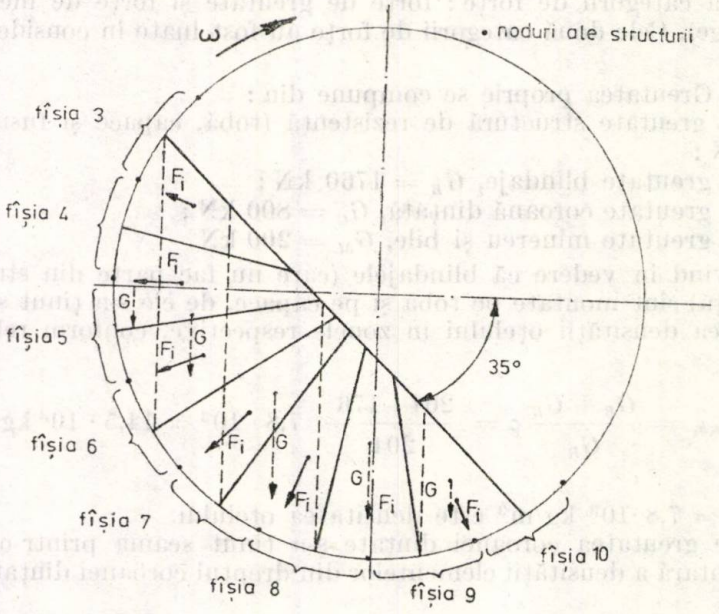


Fig. 7.

$$F = \rho V \omega^2 R,$$

unde ρ este densitatea materialului; V — volumul elementului (calculat ca mai sus);

$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 11}{30} = 1{,}15$ rad/s — viteza unghiulară a morii, corespunzătoare turaţiei de regim;

$n = 11$ rot/min; R — raza locală a centrului geometric al elementului.

De variaţia forţei de inerţie s-a ţinut seama prin introducerea unei densităţi echivalente:

$$\rho_{ech_3} = \rho_{ech1} \frac{R}{R_0},$$

unde R_0 este raza corespunzătoare fusului ($R_0 = 1{,}215$ m).

În acest fel forţele de inerţie corespunzătoare elementelor de pe fişiile 1, 2, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 se calculează cu relaţia

$$F_i = \rho_{ech_3} V \omega^2 R_0.$$

Înmulţirea masei elementului $\rho_{ech_3} V$ cu acceleraţia se face de către program introducînd un multiplicator egal cu $\omega^2 R_0$.

Forţele de inerţie ale minereului şi bilelor au fost luate în considerare printr-o nouă majorare a densităţii elementelor de pe tobă, corespunzătoare fişiilor 3 ... 9, pe care acestea acţionează, aşa cum reiese din figura 7 (liniile continui). Pentru aceste elemente densitatea echivalentă s-a calculat cu relaţia

$$\rho_{ech_i} = \rho_{ech_2} + \frac{F_{M_i}}{V_F},$$

unde F_{M_i} este forţa de inerţie a minereului corespunzătoare unei fişii (conţinută între două raze);

V_F — volumul elementelor finite de pe tobă, în lungul unei fişii.

La calculul lui F_{M_i} s-a considerat o densitate constantă a minereului şi bilelor $\rho_M = 2500$ kg/m^3. S-a utilizat relaţia

$$F_{M_i} = A_i L \rho_M \omega^2 r_i,$$

în care A_i este aria ce revine unei fişii (aria cuprinsă între două raze din figura 7); L — lungimea tobei; ω — viteza unghiulară a morii; r_i — raza corespunzătoare punctului de aplicaţie a forţei F_{M_i}.

3. CALCULUL STATIC

3.1. CALCULUL STATIC AL ANSAMBLULUI STRUCTURII

Acest calcul a fost efectuat pentru a se obţine o imagine generală asupra deplasărilor şi tensiunilor care au loc în structura morii.

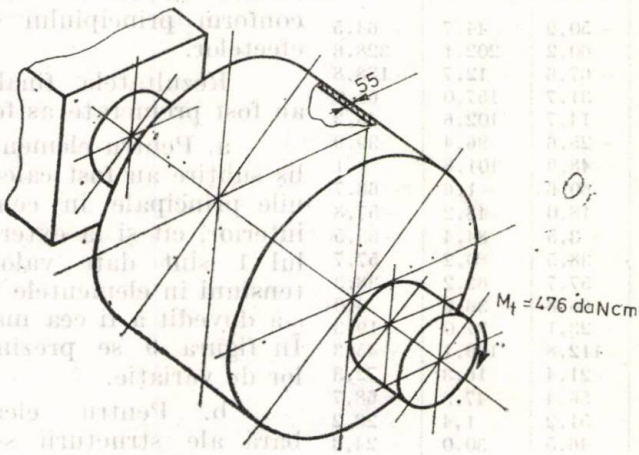


Fig. 8.

În prealabil, pentru verificarea discretizării de ansamblu a structurii s-a procedat la un calcul test. S-a imaginat o încărcare fictivă cu un cuplu aplicat pe unul din fusuri, celălalt fiind încastrat (fig. 8). În

această situaţie, porţiunea centrală a tobei poate fi considerată ca un profil subţire solicitat la răsucire pură, pentru care formula lui Bredt dă rezultate foarte bune:

$$\tau = \frac{M_t}{2\,\Omega t},$$

în care

$M_t = 486$ daNcm este momentul de răsucire aplicat;

$\Omega = 5{,}6212 \cdot 10^5$ cm^2 — aria închisă de conturul secţiunii;

$t = 5{,}5$ cm — grosimea tablei în secţiunea considerată.

Rezultă

$$\tau = \frac{486}{2.5{,}6212 \cdot 10^5 \cdot 5{,}5} = 0{,}786 \cdot 10^{-4} \text{daN/cm}^2.$$

Valoarea medie a tensiunii tangenţiale rezultată din calculul cu element finit pe aceeaşi zonă este:

$$\tau = 0{,}787 \cdot 10^{-4} \text{ daN/cm}^2.$$

Se remarcă coincidenţa celor două valori.

Tabelul 1

TENSIUNILE PRINCIPALE ÎN ELEMENTELE FÎŞIEI NR. 8

Element nr.	Tensiuni principale (daN/cm^2)			
	La interior		La exterior	
	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
1	63,6	−50,9	44,7	−64,5
2	276,6	60,2	−202,1	−328,6
3	239,6	−67,6	−12,7	−188,8
4	36,7	−31,7	157,0	61,0
5	14,6	−14,7	102,6	48,3
6	3,6	−25,6	96,4	39,9
7	3,5	−48,9	101,8	9,1
8	71,7	−60,6	−1,6	−68,7
9	89,6	−18,0	−48,2	−57,8
10	26,0	−3,5	84,4	−63,5
11	62,1	38,5	80,2	57,7
12	80,1	57,7	62,2	38,3
13	77,1	68,8	36,9	4,0
14	2,3	−23,1	37,0	−19,3
15	−95,9	−112,8	109,1	−45,3
16	44,2	−21,4	16,3	−72,3
17	138,0	56,4	−47,3	−68,7
18	105,0	51,2	−1,4	−28,2
19	144,3	46,5	30,0	−24,3
20	−51,3	−231,7	268,0	−63,8
21	−237,2	−386,2	305,1	84,2
22	35,6	−115,5	123,1	−44,9

Pentru calculul tensiunilor în ansamblul structurii, încărcată cu sarcinile exterioare reale, s-au efectuat două rulări. La prima rulare s-au introdus sarcinile exterioare datorate greutăţii proprii, iar în a doua, cele datorate forţelor de inerţie.

Rezultatele obţinute de la fiecare rulare au fost însumate conform principiului suprapunerii efectelor.

Rezultatele finale obţinute au fost prelucrate astfel:

a. Pentru elementele de înveliş subţire au fost calculate tensiunile principale în centru atît la interior, cît şi la exterior. În tabelul 1 sînt date valorile acestor tensiuni în elementele fîşiei 8, care s-a dovedit a fi cea mai solicitată. În figura 9 se prezintă graficele lor de variaţie.

b. Pentru elementele de bară ale structurii s-au calculat valorile tensiunilor normale maxime. Cea mai mare valoare obţinută a fost $\sigma = 411$ daN/cm^2.

c. În vederea obţinerii unei imagini asupra modului cum se ovalizează structura în zona fusului, s-au calculat valorile deplasărilor nodu-

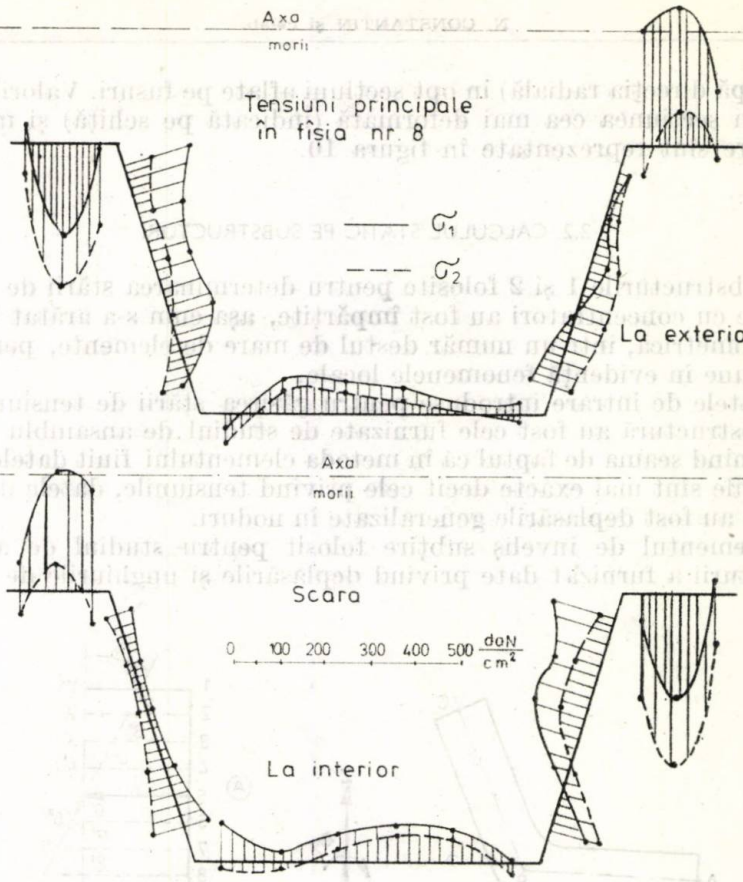

Axa
morii
Tensiuni principale
în fișia nr. 8
σ_1
σ_2
La exterior
Axa
morii
Scara
0 100 200 300 400 500 daN/cm²
La interior

Fig. 9. ↑

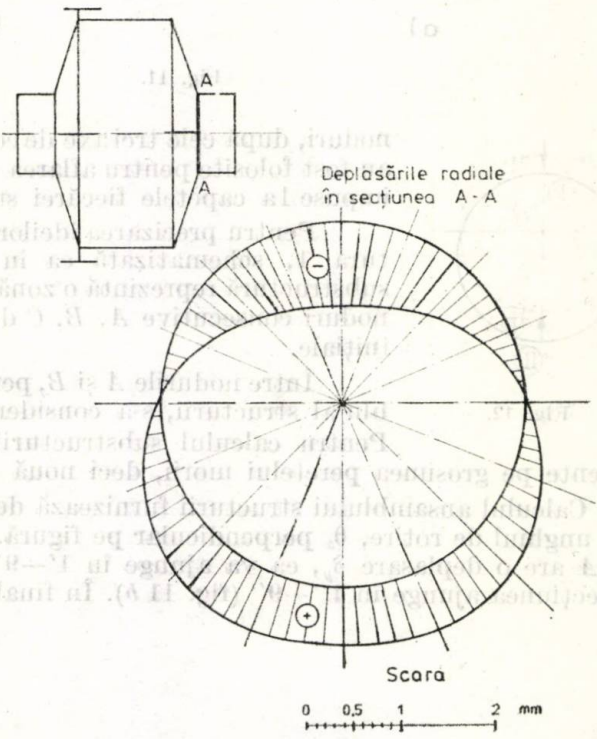

A
A
Deplasările radiale
în secțiunea A - A
Scara
0 0,5 1 2 mm

Fig. 10. ⟶

rilor (după direcţia radială) în opt secţiuni aflate pe fusuri. Valorile deplasărilor în secţiunea cea mai deformată (indicată pe schiţă) şi modul de deformare sînt reprezentate în figura 10.

3.2. CALCULUL STATIC PE SUBSTRUCTURI

Substructurile 1 şi 2 folosite pentru determinarea stării de tensiune în zonele cu concentratori au fost împărţite, aşa cum s-a arătat la modelarea geometrică, într-un număr destul de mare de elemente, pentru a se putea pune în evidenţă fenomenele locale.

Datele de intrare introduse pentru găsirea stării de tensiune în fiecare substructură au fost cele furnizate de studiul de ansamblu al structurii. Ţinînd seama de faptul că în metoda elementului finit datele privind deplasările sînt mai exacte decît cele privind tensiunile, datele de intrare utilizate au fost deplasările generalizate în noduri.

Elementul de înveliş subţire folosit pentru studiul de ansamblu al structurii a furnizat date privind deplasările şi unghiurile de rotire în

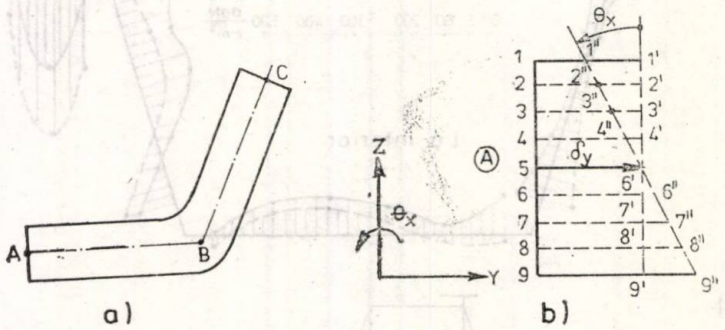


Fig. 11.

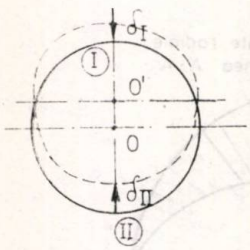


Fig. 12.

noduri, după cele trei axe de coordonate. Aceste date au fost folosite pentru aflarea deplasărilor ce trebuie impuse la capetele fiecărei substructuri.

Pentru precizarea ideilor, se consideră substructura 1, schematizată ca în figura 11 *a*. Această substructură reprezintă o zonă ce se întinde pe trei noduri consecutive *A*, *B*, *C* de pe o fişie a structurii iniţiale.

Între nodurile *A* şi *B*, pentru calculul de ansamblu al structurii, s-a considerat un singur element. Pentru calculul substructurii s-au considerat opt elemente pe grosimea peretelui morii, deci nouă noduri.

Calculul ansamblului structurii furnizează deplasarea în lungul axei *Y* şi unghiul de rotire, θ_x perpendicular pe figură. Considerînd că secţiunea *A* are o deplasare δ_y, ea va ajunge în $1'—9'$; suprapunînd rotirea θ_x, secţiunea ajunge în $1''—9''$ (fig. 11 *b*). În final, se pot determina din

aceste considerente deplasările tuturor nodurilor din secţiunea A (1—1″, 2—2″ etc.).

Substructura face parte însă dintr-un ansamblu la care se cunosc, în această fază de calcul, toate deplasările nodurilor.

Fie o secţiune transversală în lagăr (fig. 12), care înainte de a se deforma se prezintă sub forma cercului cu centrul în O (linie continuă). După deformaţie cercul descrie o curbă oarecare, desenată cu linie întreruptă. Deplasările punctelor cercului pot fi considerate ca formate din două componente:

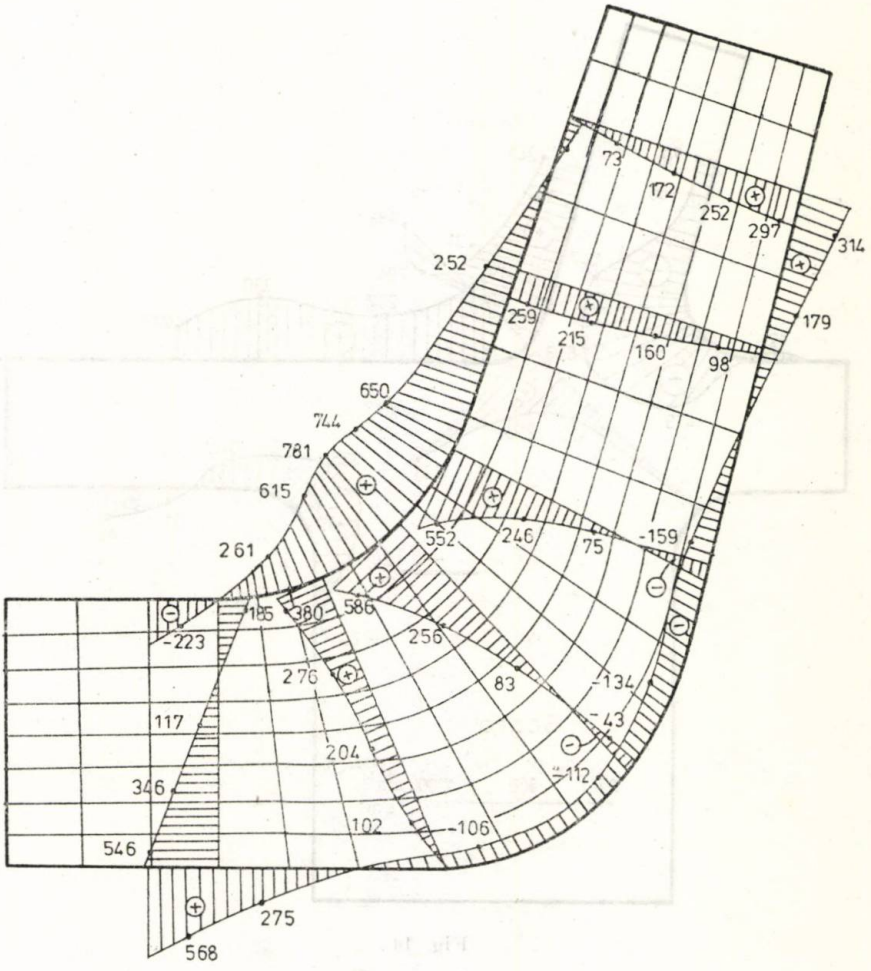


Fig. 13.

— o translaţie a centrului cercului datorată deformării ansamblului structurii, cu distanţa $OO_1 = \delta_I - \delta_{II}$, ce poate fi considerată pentru secţiunea dată ca deplasare de corp rigid;

— deplasări relative între punctele cercului, care produc schimbarea formei acestuia şi deci apariţia tensiunilor.

În introducerea datelor privind deplasările, s-a avut în vedere acest fapt, eliminîndu-se deplasările de corp rigid.

S-a procedat similar cu secţiunea C a substructurii 1 precum şi cu secţiunile de decupare ale substructurii 2.

Introducerea datelor de intrare sub formă de deplasări s-a făcut utilizînd elementul de contur. Acest element, care reprezintă o legătură elastică cu constanta de rigiditate foarte mare, transformă deplasările impuse la marginile de decupare ale substructurii în forţe concentrate,

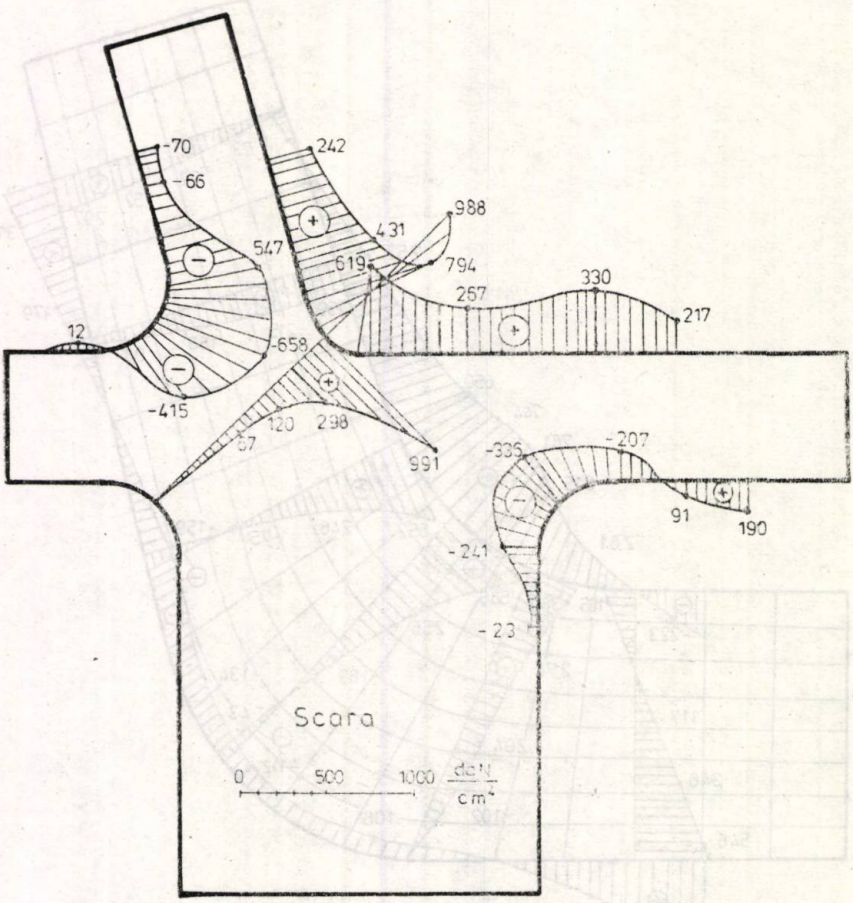


Fig. 14.

reprezentînd reacţiunea elementului elastic. Aceste forţe concentrate produc tensiuni locale care modifică starea de tensiune din imediata apropiere a marginilor de decupare, dar care, conform principiului lui Sain-Vénant, au o influenţă neglijabilă asupra unor puncte aflate la distanţă mare de punctele de aplicare a forţelor. Ca urmare, nu au fost luate în

considerare stările de tensiune din elementele aflate în aceste zone (capetele A și C).

Verificarea corectitudinii soluției a fost făcută utilizînd datele furnizate de calculul pentru structura de ansamblu în nodul intermediar B, care s-au comparat cu cele furnizate de către calculele pe substructuri. Valorile obținute în cele două situații au fost foarte apropiate, erorile putînd fi considerate inerente pentru calculul de ansamblu, la care structura a fost simplificată și efectul tensiunilor locale ignorat.

Calculul pentru substructura 1 s-a făcut presupunînd structura în ansamblu axial simetrică și luîndu-se în considerare două situații : în prima s-au introdus ca mărimi de intrare deplasările nodurilor elementelor de la racordarea capac-fus aflată în poziția superioară extremă, iar în a doua deplasările nodurilor aflate în poziția inferioară extremă.

În figura 13 sînt prezentate valorile tensiunilor atît pe conturul, cît și pe grosimea acestei substructuri, aflată în poziția superioară extremă, poziție în care apar tensiunile cele mai mari.

Calculul pentru substructura 2 s-a făcut în ipoteza stării plane de deformații, datorită faptului că această substructură se găsește într-o zonă a morii cu diametrul de peste 8 metri. Calculul s-a făcut în aceleași două situații luate în considerare la substructura 1.

În figura 14 sînt prezentate valorile tensiunilor pe conturul și în secțiunea cea mai solicitată a substructurii 2, pentru poziția inferioară extremă, poziție în care apar tensiunile cele mai mari.

4. CALCULUL DINAMIC

Calculul dinamic s-a făcut în vederea determinării frecvențelor proprii și ale modurilor proprii de vibrații libere ale structurii în ansamblu.

Discretizarea structurii a fost aceeași ca pentru calculul static, în acest mod obținîndu-se un sistem cu 2194 grade de libertate. În zonele în care moara are blindaj sau încărcătură de minereu și bile, elementelor corespunzătoare li s-au atribuit masa adiacentă respectivă, în mod analog cu cel descris la modelarea sarcinilor.

După cum se observă, structura se apropie în felul acesta foarte mult de o structură continuă, cu un număr infinit de grade de libertate. Au fost reținute însă numai primele moduri de vibrații, pentru care pulsațiile proprii ar putea avea valori apropiate de cea corespunzătoare turației de regim a morii.

Calculînd primele șase valori ale pulsațiilor proprii, s-au obținut primele două $\omega_1 = 71{,}1$ rad/s și $\omega_2 = 86{,}1$ rad/s, celelalte fiind mult mai mari. Aceste pulsații corespund unor turații $n_1 = 679$ rot/min și $n_2 = 822$ rot/min, considerabil mai mari decît 11 rot/min, turația de regim a morii.

5. CONCLUZII

Din analiza critică a rezultatelor obținute în calculul stării de tensiune a morii autogene Ø 8500 × 3800 mm, se pot formula următoarele concluzii mai importante :

a. Metoda de calcul, discretizarea structurilor, modul de introducere a încărcărilor sînt adecvate studiului efectuat deoarece :

— aspectul calitativ al rezultatelor concordă cu aprecierea globală bazată pe modelul elementar de bară din rezistenţa materialelor : în planul mediu tensiunile sînt apropiate de zero, tensiunile sînt de întindere în partea inferioară a structurii şi de compresiune în partea superioară etc. ;

— rezultatele obţinute concordă calitativ cu altele similare din literatura de specialitate ;

— nu există discontinuităţi inexplicabile ale deplasărilor sau tensiunilor în direcţii longitudinale sau circumferenţiale ;

— valorile tensiunilor tangenţiale la solicitarea simulată de răsucire pură, sînt identice cu cele date de relaţia lui Bredt ;

— verificarea deplasărilor nodurilor intermediare pentru substructurile 1 şi 2 este bună.

b. În zona tobei cilindrice tensiunile au valori mici, care corespund ca ordin de mărime cu cele obţinute prin teoria elementară de bară : tensiuni mai mari sînt în zona racordărilor capacelor cu fusurile şi toba, precum şi în zona fusurilor, datorită efectelor locale.

c. Variaţiile tensiunilor pe fişii sînt în acord cu condiţiile de încărcare, adică se obţin tensiuni mai mari în dreptul fişiilor 7, 8, 9, pentru care încărcarea datorată minereului este maximă.

Primită la redacţie la 26 ianuarie 1981.

SUSPENSII ECHIPATE CU AMORTIZOARE SECVENȚIALE

de T. SIRETEANU și O. GÜNDISCH

Institutul de fizică și tehnologia materialelor
București

Lucrarea prezintă două variante constructive de realizare a unor amortizoare secvențiale pentru automobile. Se dă o metodă de determinare analitică a funcțiilor de transfer aproximative ale sistemelor oscilante cu disipare secvențială, pe baza căreia se pot preciza caracteristicile de lucru ale amortizoarelor secvențiale astfel încît să se obțină o transmisibilitate mai redusă a vibrațiilor în vecinătatea frecvenței de rezonanță a caroseriei, decît în cazul amortizoarelor clasice.

1. VARIANTE CONSTRUCTIVE PENTRU AMORTIZOARE SECVENȚIALE

Amortizoarele clasice disipă energie pe toată durata unei mișcări oscilatorii sau a unei semioscilații, în funcție de viteza relativă dintre masa suspendată și masa nesuspendată a automobilului. Caracteristicile lor hidraulice sînt în general diferite la cursele de destindere și compresie și de obicei are loc o limitare a creșterii forțelor de amortizare cînd viteza de lucru depășește o anumită valoare.

Cercetările recente în direcția îmbunătățirii confortului și ținutei de drum a automobilelor au condus la soluții constructive (aflate încă în stadiu de experiment) bazate pe principii de funcționare diferite de cele clasice. O astfel de soluție o reprezintă amortizorul secvențial propus de Federspiel [1]. Acest tip de amortizor este conceput astfel încît suspensia să nu aibă amortizare atît timp cît sistemul se îndepărtează de poziția de echilibru, să fie puternic amortizate în momentul întoarcerii, pentru ca apoi amortizarea să se atenueze pe măsură ce se revine către poziția de echilibru. Se observă că această soluție diferă de cea clasică atît prin faptul că disiparea de energie se anulează pe anumite secvențe ale mișcării oscilante, cît și prin aceea că forțele de amortizare sînt maxime în vecinătatea vitezei relative nule și descresc atunci cînd viteza relativă crește, ceea ce nu se realizează cu nici un tip de amortizor clasic. În figura 1 este reprezentat schematic modul de funcționare a amortizorului secvențial în cursul unei mișcări oscilatorii complete a sistemului mecanic care modelează suspensia automobilului.

În figura 2 sînt trasate comparativ diagramele forță-deplasare și forță-viteză realizate de amortizoarele secvențiale și amortizoarele clasice în cazul unei mișcări oscilatorii complete.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 3, 1981, P. 425–437

Notînd cu z deplasarea relativă dintre capetele de prindere ale amortizorului, caracteristicile disipative secvențiale se pot exprima analitic sub forma

$$F(z, \dot{z}) = \begin{cases} F(\dot{z}), z\dot{z} \leqslant 0, \\ 0 \quad , z\dot{z} \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

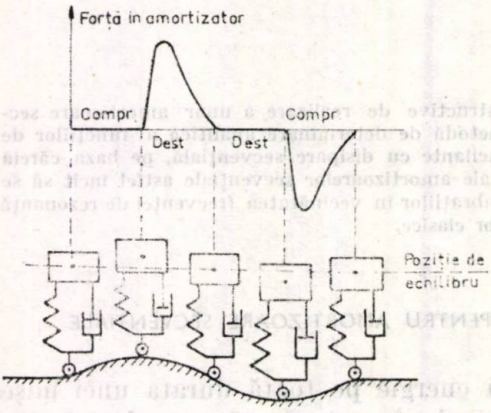


Fig. 1

în cazul în care funcționarea secvențială are loc numai pentru mișcări oscilatorii în jurul poziției $z = 0$ și sub forma

$$F(,z\ddot{z}) = \begin{cases} F(\dot{z}), \ \dot{z}\ddot{z} \geqslant 0, \\ 0, \quad \dot{z}\ddot{z} \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

atunci cînd amortizorul funcționează secvențial indiferent de poziția în jurul căreia se efectuează mișcarea oscilatorie.

Pentru realizarea unor amortizoare cu funcționare secvențială, Federspiel [1] propune două soluții constructive, bazate pe utilizarea unor amortizoare monotubulare cu pernă de gaz sub presiune.

Trebuie menționat că la ambele variante propuse de Federspiel, funcționarea secvențială a amortizoarelor are loc numai pentru mișcările

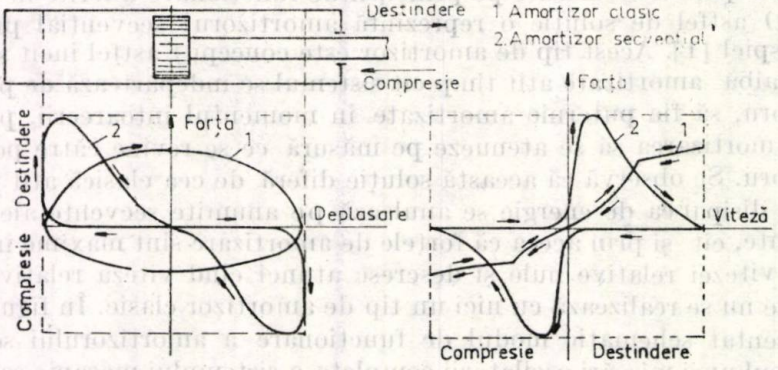


Fig. 2

oscilatorii ce se efectuează în jurul poziției de echilibru static a automobilului.

În cele ce urmează, se prezintă două variante constructive pentru realizarea unor amortizoare secvențiale pornind de la amortizoarele care

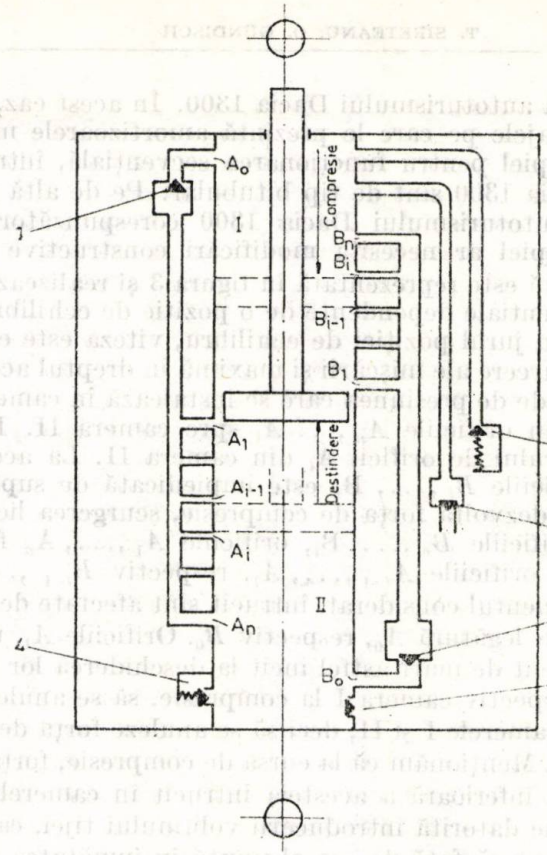

Ao
Compresie
Bn
Bi
Bi-1
B1
A1
Destindere
Ai-1
Ai
An
Bo
I
II
1
2
3
4
5
6

Fig. 3

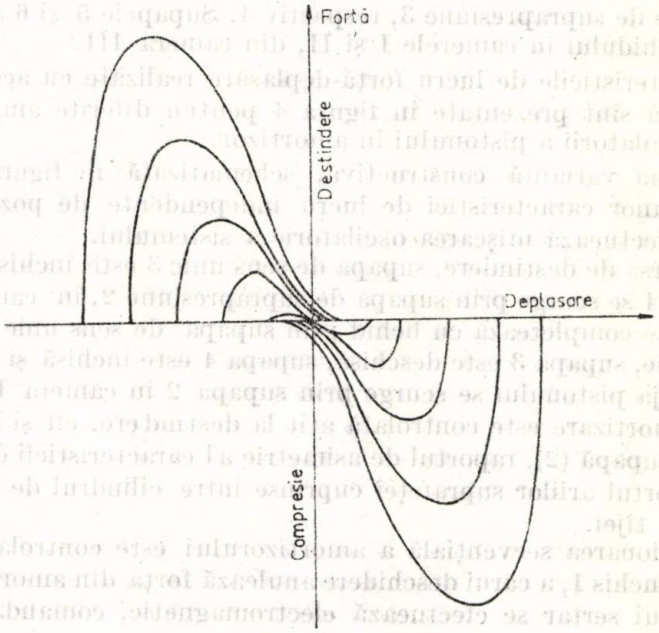

Forță
Destindere
Deplasare
Compresie

Fig. 4

echipează suspensia autoturismului Dacia 1300. În acest caz, nu se poate beneficia de avantajele pe care le prezintă amortizoarele monotubulare utilizate de Federspiel pentru funcționarea secvențială, întrucît amortizoarele pentru Dacia 1300 sînt de tip bitubular. Pe de altă parte, adaptarea suspensiei autoturismului Dacia 1300 corespunzător variantelor propuse de Federspiel ar necesita modificări constructive importante.

Prima variantă este reprezentată în figura 3 și realizează caracteristicile de lucru secvențiale dependente de o poziție de echilibru fixă. La o mișcare periodică în jurul poziției de echilibru, viteza este egală cu zero în punctele de întoarcere ale mișcării și maximă în dreptul acesteia. Forța de destindere depinde de presiunea care se instalează în camera I la scurgerea lichidului prin orificiile A_n ,... A_i spre camera II. Ea descrește cu creșterea numărului de orificii A_i din camera II. La această cursă, scurgerea prin orificiile B_i ,..., B_n este împiedicată de supapa de sens unic 2. Similar, se dezvoltă forța de compresie, scurgerea lichidului producîndu-se prin orificiile B_n ,..., B_i, orificiile A_1 ,..., A_n fiind blocate de supapa 1. Prin orificiile A_{i-1} ,..., A_1, respectiv B_{i-1} ,..., B_1 nu se scurge lichid la momentul considerat, întrucît sînt afectate de aceeași presiune ca orificiile de legătură A_0, respectiv B_0. Orificiile A_1, respectiv B_1, trebuie să fie suficient de mari astfel încît la deschiderea lor spre camera II la destindere, respectiv camera I la compresie, să se anuleze diferența de presiune dintre camerele I și II, deci să se anuleze forța de amortizare pentru restul cursei. Menționăm că la cursa de compresie, forța nu se anulează pe jumătatea inferioară a acesteia întrucît în camerele I și II se instalează o presiune datorită introducerii volumului tijei, care însă produce o forță mult redusă față de cea obținută în jumătatea superioară a cursei. Limitarea forței de destindere, respectiv de compresie, se obține cu supapele de suprapresiune 3, respectiv 4. Supapele 5 și 6 asigură completarea lichidului în camerele I și II, din camera III.

Caracteristicile de lucru forță-deplasare realizate cu această soluție constructivă sînt prezentate în figura 4 pentru diferite amplitudini ale mișcării oscilatorii a pistonului în amortizor.

A doua variantă constructivă, schematizată în figura 5 permite realizarea unor caracteristici de lucru independente de poziția în jurul căreia se efectuează mișcarea oscilatorie a sistemului.

La cursa de destindere, supapa de sens unic 3 este închisă și lichidul din camera I se scurge prin supapa de suprapresiune 2, în camera III, iar camera II se completează cu lichid prin supapa de sens unic 4. La cursa de compresie, supapa 3 este deschisă, supapa 4 este închisă și lichidul dislocuit de tija pistonului se scurge prin supapa 2 în camera III. Întrucît forța de amortizare este controlată atît la destindere, cît și la compresie de aceeași supapă (2), raportul de asimetrie al caracteristicii de lucru este dat de raportul ariilor suprafeței cuprinse între cilindrul de lucru și tijă și secțiunii tijei.

Funcționarea secvențială a amortizorului este controlată de sertarul normal închis 1, a cărui deschidere anulează forța din amortizor. Acționarea acestui sertar se efectuează electromagnetic, comanda fiind dată

de semnalul electric de ieșire a instalației analogice schematizate în figura 6, la intrarea căreia se aplică semnalele date de doi traductori de accelerație montați pe caroserie și punte.

Semnificația notațiilor din figura 6 este următoarea: T_1, T_2 — traductori de accelerație ($\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$); D — circuit de diferențiere ($\ddot{z} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$); I — circuit de integrare ($\dot{z} = \int \ddot{z}\, dt$); M — circuit de multiplicare ($u = \dot{z}\ddot{z}$); R — circuit de redresare (care lasă să treacă numai valorile negative ale lui u); A — circuit de amplificare; S — sertar normal închis acționat electromagnetic.

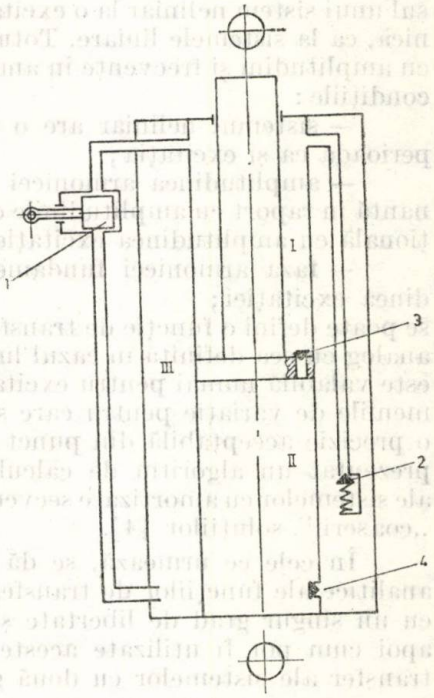


Fig. 5

Amortizorul reprezentat în figura 5 împreună cu instalația analogică schematizată în figura 6 permit realizarea unor caracteristici de amortizare de forma (1.2), independente de poziția în jurul căreia au loc vibrațiile automobilului. Această variantă prezintă un avantaj important în raport cu cele dependente de poziția de echilibru, întrucît funcționarea secvențială nu este afectată de încărcarea automobilului.

Experimentările efectuate pe un autoturism Dacia 1300 echipat cu amortizoare avînd funcționare secvențială în jurul unei poziții fixe au pus în evidență apariția pe diferite intervale de timp a unui fenomen de „îngropare" a automobilului, care constă în micșorarea necontrolată a gărzii la sol [2], [3]. În timpul manifestării fenomenului de „îngropare", amortizoarele pot ajunge în situația de a lucra unilateral (numai la destindere), ceea ce micșorează eficiența lor în reducerea nivelului de vibrații.

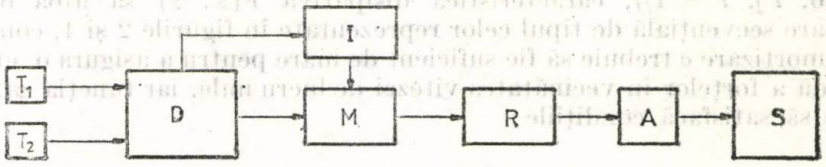


Fig. 6

Acest inconvenient nu apare la suspensiile cu amortizare secvențială independentă de poziția de lucru a pistonului în amortizor, așa cum este cazul celei de-a doua variante constructive.

2. FUNCȚII DE TRANSFER APROXIMATIVE PENTRU SISTEME OSCILANTE CU AMORTIZARE SECVENȚIALĂ

Sistemele oscilante cu amortizare secvențială nefiind liniare, nu se poate vorbi, în general, de funcții de transfer ale acestora întrucît răspunsul unui sistem neliniar la o excitație armonică nu mai este o funcție armonică, ca la sistemele liniare. Totuși, atunci cînd pentru excitații armonice cu amplitudini și frecvențe în anumite domenii de variație sînt îndeplinite condițiile :

— sistemul neliniar are o mișcare stabilizată periodică cu aceeași perioadă ca și excitația ;

— amplitudinea armonicei fundamentale a răspunsului este dominantă în raport cu amplitudinile celorlalte armonici și aproximativ proporțională cu amplitudinea excitației ;

— faza armonicei fundamentale nu depinde esențial de amplitudinea excitației ;

se poate defini o funcție de transfer aproximativă pentru sistemul neliniar, analog cu cea definită în cazul liniar. Evident, această funcție de transfer este valabilă numai pentru excitații avînd amplitudini și frecvențe în domeniile de variație pentru care sînt satisfăcute condițiile de mai sus (cu o precizie acceptabilă din punct de vedere practic). În lucrarea [3] este prezentat un algoritm de calcul al funcțiilor de transfer aproximative ale sistemelor cu amortizare secvențială liniară pe porțiuni, utilizînd metoda „coaserii" soluțiilor [4].

În cele ce urmează, se dă o metodă de determinare a expresiilor analitice ale funcțiilor de transfer, aproximative pentru sisteme oscilante cu un singur grad de libertate și cu amortizare secvențială, arătîndu-se apoi cum pot fi utilizate aceste rezultate pentru calculul funcțiilor de transfer ale sistemelor cu două grade de libertate.

Caracteristicile disipative $F(\dot{z}, \ddot{z})$ realizate de amortizoarele secvențiale cu funcționare independentă de poziția de echilibru pot fi aproximate satisfăcător prin expresii analitice de tipul (1.2) în care funcția $F(\dot{z})$ are forma

$$F(\dot{z}) = c\dot{z}\ [1 - \varphi(\dot{z})]. \tag{2.1}$$

Pentru ca în cadrul unei mișcări oscilatorii armonice $z(t) = Z \cos 2\pi ft$, $t \in [0, T]$, $T = 1/f$, caracteristica disipativă $F(\dot{z}, \ddot{z})$ să aibă o comportare secvențială de tipul celor reprezentate în figurile 2 și 4, constanta de amortizare c trebuie să fie suficient de mare pentru a asigura o creștere rapidă a forțelor în vecinătatea vitezei de lucru nule, iar funcția $\varphi(\dot{z})$ trebuie să satisfacă condițiile :

$$0 \leqslant \varphi(\dot{z}(t)) \leqslant 1, \quad t \in [0, T], \tag{2.2}$$

$$\varphi(\dot{z}(t)) = 0, \quad t = 0, \quad T/2, \quad T; \quad \varphi((\dot{z}t)) = 1, \quad t = T/4, \quad 3T/4.$$

Aceste condiții nu pot fi satisfăcute decît dacă funcția $\varphi(\dot{z})$ depinde parametric de amplitudinea Z și frecvența f a mișcării oscilatorii $z(t)$.

Din punct de vedere practic, sînt realizabile caracteristici de amortizare secvențiale pentru care

$$\varphi(\dot{z}) = |\dot{z}|^{\alpha}/(2\pi fZ)^{\alpha} \tag{2.3}$$

dacă $z = Z \cos 2\pi ft$.

Pentru $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, forțele maxime F_{max}, și vitezele de lucru $\dot{z}_m$, la care se ating aceste forțe, au expresiile

$$F_{max} = [n/(n+1)\sqrt[n]{n+1}]\, c\dot{z}_{max}. \tag{2.4}$$

$$\dot{z}_m = (1/\sqrt[n]{n+1})\, \dot{z}_{max},$$

iar pentru $\alpha = 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$, aceste forțe și viteze sînt date de relațiile

$$F_{max} = [n/(n+1)^{n+1}]\, c\dot{z}_{max},$$

$$z_m = [n/(n+1)]^n \dot{z}_{max}, \tag{2.5}$$

unde $z_{max} = 2\pi fZ$.

În figurile 7 și 8 sînt prezentate caracteristicile disipative obținute pentru $\alpha = 1, 2, \ldots$ și, respectiv, $\alpha = 1, 1/2 \ldots$ în cazul unei mișcări oscilatorii armonice $z(t) = Z \cos 2\pi ft$.

Cu notațiile din figura 9, ecuația de mișcare a sistemului oscilant cu un singur grad de libertate, avînd amortizare secvențială, poate fi pusă sub forma

$$M\ddot{z} + F(\dot{z}, \ddot{z}) + kz = -M\ddot{x}_0, \tag{2.6}$$

unde $z = x - x_0$, iar $F(\dot{z}, \ddot{z})$ este dată de relațiile (1.2), (2.1) și (2.3).

Pentru determinarea factorilor de amplificare și fază aproximativi ai sistemului neliniar (2.6) se consideră o excitație armonică $x_0(t) = X \cos 2\pi ft$ și se caută prima aproximație a soluției $z(t)$ utilizînd metoda Krîlov-Bogoliubov în cazul „rezonanței" [4]. În acest scop, se scrie ecuația (2.6) sub forma

$$\ddot{z} + (\varepsilon/M) F_1(\dot{z}, \ddot{z}) + 4\pi^2 f_0^2 z = -\varepsilon 4\pi^2 f^2 X_{01} \cos 2\pi ft, \tag{2.7}$$

unde $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$ este frecvența proprie de oscilație a sistemului neamortizat, iar ε este un parametru mic adimensional astfel încît $F(\dot{z}, \ddot{z}) = \varepsilon F_1(\dot{z}, \ddot{z})$, $X_0 = \varepsilon X_{01}$. Calculele se efectuează pentru $f \approx f_0$, întrucît comportarea sistemului în vecinătatea rezonanței este esențială din punct de vedere al reducerii nivelului de vibrații. Prima aproximație a soluției este de forma

$$z(t) = Z \cos(2\pi ft + \theta), \tag{2.8}$$

în care amplitudinea Z și faza θ satisfac ecuațiile diferențiale

$$\dot{Z} = \varepsilon A_1(Z, \theta) + \varepsilon^2 A_2(Z, \theta) + \ldots,$$
$$\dot{\theta} = \varepsilon B_1(Z, \theta) + \varepsilon^2 B_2(Z, \theta) + \ldots, \tag{2.9}$$

Neglijînd termenii în ε^2, soluția (2.8) este periodică dacă

$$A_1(Z, \theta) = 0, \quad B_1(Z, \theta) = 0, \tag{2.10}$$

ceea ce implică faptul că Z și θ nu depind de timp. Funcțiile $A_1(Z, \theta)$ și $B_1(Z, \theta)$ au expresiile [4].

$$A_1(Z, \theta) = (1/4\,\pi f\,\varepsilon)\,[D_1(Z) - 4\,\pi^2 f^2 X_0 \sin\theta],$$
$$B_1(Z, \theta) = (1/4\,\pi f Z\,\varepsilon)\,[C_1(Z) - 4\,\pi^2(f^2 - f_0^2)\,Z - 4\pi^2 f^2 X_0 \cos\theta], \tag{2.11}$$

nde

$$D_1(Z) = \frac{1}{\pi M}\int_0^{2\pi} F(\dot{z}, \ddot{z}) \sin\alpha\, d\alpha,$$
$$C_1(Z) = \frac{1}{\pi M}\int_0^{2\pi} F(\dot{z}, z) \cos\alpha d\alpha, \tag{2.12}$$

calculul integralelor (2.12) efectuîndu-se pentru $z = Z\cos(2\pi ft + \theta) = Z\cos\alpha$, $\dot{z} = -2\pi f Z \sin\alpha$ și $\ddot{z} = -4\pi^2 f^2 Z\cos\alpha$. Deoarece produsul $\dot{z}\ddot{z} = 8\pi^3 f^3 Z^2 \sin\alpha\cos\alpha = 4\,\pi^3 f^3 Z^2 \sin 2\alpha$ se anulează pentru $\alpha = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$, fiind pozitiv pentru $0 < \alpha < \pi/2$ și $\pi < \alpha < 3\pi/2$ și negativ pentru $\pi/2 < \alpha < \pi$ și $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$, în conformitate cu funcționarea secvențială (1.2), integralele (2.12) devin

$$D_1(Z) = \frac{1}{\pi M}\left[\int_0^{\pi/2} F(-2\,\pi f Z \sin\alpha) \sin\alpha\, d\alpha + \right.$$
$$\left. + \int_{\pi}^{3\pi/2} F(-2\pi f Z \sin\alpha) \sin\alpha d\alpha\right],$$
$$C_1(Z) = \frac{1}{\pi M}\left[\int_0^{\pi/2} F(-2\pi f Z \sin\alpha) \cos\alpha\, d\alpha + \right. \tag{2.13}$$
$$\left. + \int_{\pi}^{3\pi/2} F(-2\pi f Z \sin\alpha)\cos\alpha\, d\alpha\right].$$

Introduînd în (2.13) expresia analitică (2.1), încare funcția $\varphi(\dot{z})$ este dată de (2.3), se obține

$$D_1(Z) = -\frac{(2k+1)!!\,\pi - 2^{k+2}\,k!}{2\,(2k+1)!!\,\pi}\,\frac{2\pi fcZ}{M},$$
$$C_1(Z) = -\frac{2\,k-1}{(2k+1)\pi}\,\frac{2\pi\,fcZ}{M} \tag{2.14}$$

pentru $\alpha = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots,$

$$D_1(Z) = -\frac{2^k(k+1)! - (2k+1)!!}{2^{k+1}\,(k+1)!}\,\frac{2\pi\,fcZ}{M},$$
$$C_1(Z) = -\frac{k}{(k+1)\pi}\,\frac{2\pi fcZ}{M} \tag{2.15}$$

pentru $\alpha = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$ și

$$D_1(Z) = -\left\{\frac{1}{2} - \frac{2k(k+1)\,\Gamma[k+1)/2k]}{\sqrt{\pi}(2k+1)\;\Gamma\,(1/2k)}\right\}\frac{2\pi fcZ}{M}, \tag{2.16}$$
$$C_1(Z) = -\frac{1}{(2k+1)\pi}\,\frac{2\pi fcZ}{M}$$

pentru $\alpha = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$ În relațiile de mai sus $(2k+1)!! = 1.3.5 \ldots (2k+1)$, iar $\Gamma(u)$ este funcția gama. Introducînd coeficientul de amortizare relativă

$$\zeta = c/2\sqrt{kM} = c/4\;\pi f_0 M$$

și parametrul adimensional $\xi = f/f_0$, expresiile (2.14) — (2.16) pot fi puse sub forma

$$D_1(Z) = -8\pi^2 D_1 \xi\,\zeta f_0^2 Z\;;\quad C_1(Z) = -8\pi^2 C_1\,\xi\,\zeta f_0^2 Z, \tag{2.17}$$

în care D_1 și C_1 sînt constante pozitive. Înlocuind (2.17) în (2.11) și impunînd condițiile de periodicitate (2.10) se obține următorul sistem de ecuații pentru determinarea factorului de amplificare $|H_{zx_0}(\xi)| = Z/X_0$ și a factorului de fază $\theta(\xi) = \arg H_{zx_0}(\xi)$, unde $H_{zx_0}(\xi)$ este funcția de transfer aproximativă, a sistemului cu amortizare secvențială, în vecinătatea

rezonanței ($\xi \approx 1$):

$$\sin \theta(\xi) = -2D_1 \zeta |H_{zx_0}(\xi)| / \xi, \tag{2.18}$$

$$\cos \theta(\xi) = -[2C_1 \zeta \xi + (\xi^2 - 1)] |H_{zx_0}(\xi)| / \xi^2.$$

Din (2.18) rezultă

$$|H_{zx_0}(\xi)| = \xi^2/\{[2C_1 \zeta\xi + (\xi^2 - 1)]^2 + 4D_1^2 \zeta^2\xi^2\}^{1/2}, \tag{2.19}$$

$$\theta(\xi) = \operatorname{arctg}\{2D_1\zeta\xi/[2C_1\zeta\xi + (\xi^2 - 1)]\}. \tag{2.20}$$

Pentru obținerea factorului de amplificare $|H_{xx_0}(\xi)|$ și factorului de fază $\psi(\xi)$, corespunzători deplasării absolute $x = x_0 + z$ a masei suspendate a sistemului, se scrie

$$x(t) = x_0(t) + z(t) = \cos\{2\pi ft + |H_{zx_0}(\xi)| \cos[2\pi ft + \theta(\xi)]\} X_0 =$$

$$= |H_{xx_0}(\xi)| X_0 \cos[2\pi ft + \psi(\xi)],$$

de unde prin identificare rezultă

$$|H_{xx_0}(\xi)| = \{|H_{zx_0}(\xi)|^2 + 2|H_{zx_0}(\xi)| \cos\theta(\xi) + 1\}^{1/2}, \tag{2.21}$$

$$\psi(\xi) = \operatorname{arctg}\{|H_{zx_0}(\xi)| \sin\theta(\xi)/[|H_{zx_0}(\xi)| \cos\theta(\xi) + 1]\}. \tag{2.22}$$

Introducînd (2.19) în (2.21) și ținînd seama de $(2.18)_2$, se găsește

$$|H_{xx_0}(\xi)| = \left\{1 - \frac{\xi^2(\xi^2 + 4C_1\zeta\xi - 2)}{[2C_1\zeta\xi + (\xi^2 - 1)]^2 + 4D_1^2\zeta^2\xi^2}\right\}^{1/2}. \tag{2.23}$$

Se observă că factorul de amplificare $|H_{xx_0}(\xi)|$ este subunitar dacă

$$\xi^2 + 4C_1\zeta\xi - 2 > 0, \tag{2.24}$$

adică pentru

$$\xi > 2C_1\zeta + \sqrt{4C_1^2\zeta^2 + 2}. \tag{2.25}$$

Punînd condiția ca pentru $\xi = 1$ factorul amplificare să fie subunitar se obține relația

$$\zeta > 1/4C_1, \tag{2.26}$$

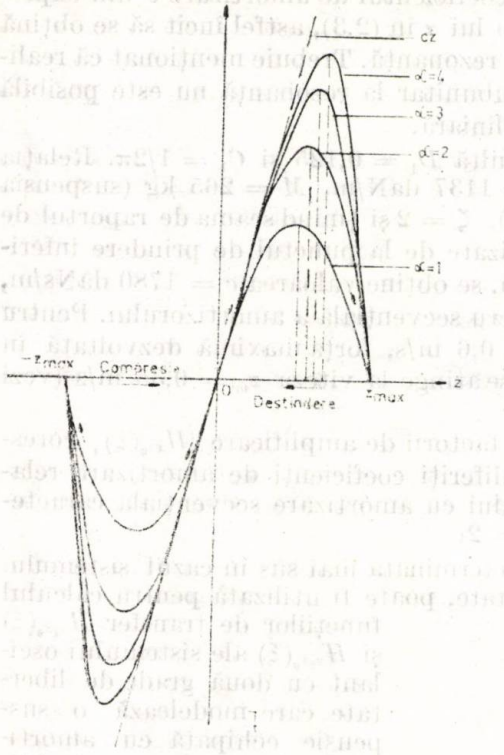


Fig. 7

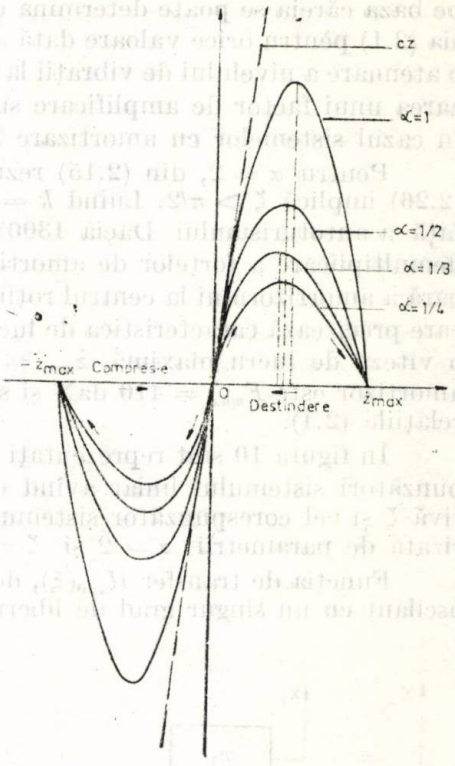


Fig. 8

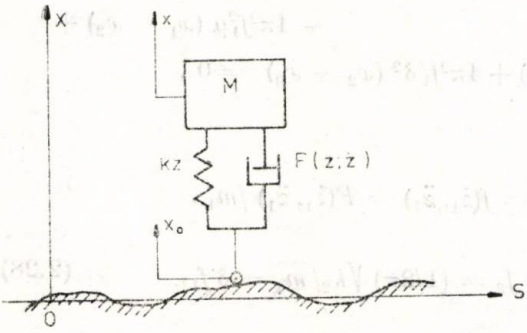


Fig. 9

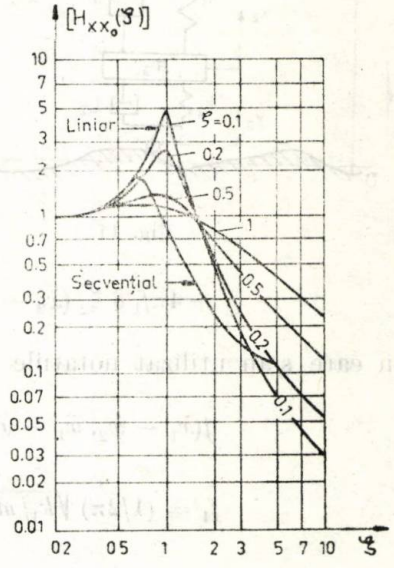


Fig. 10

pe baza căreia se poate determina coeficientul de amortizare c din expresia (2.1) pentru orice valoare dată a lui α în (2.3), astfel încît să se obţină o atenuare a nivelului de vibraţii la rezonanţă. Trebuie menţionat că realizarea unui factor de amplificare subunitar la rezonanţă nu este posibilă în cazul sistemelor cu amortizare liniară.

Pentru $\alpha = 2$, din (2.15) rezultă $D_1 = 0{,}125$ şi $C_1 = 1/2\pi$. Relaţia (2.26) implică $\zeta > \pi/2$. Luînd $k = 1137$ daN/m, $M = 265$ kg (suspensia faţă a autoturismului Dacia 1300), $\zeta = 2$ şi ţinînd seama de raportul de demultiplicare a forţelor de amortizare de la punctul de prindere inferioară a amortizorului la centrul roţii, se obţine valoarea $c = 1780$ daNs/m, care precizează caracteristica de lucru secvenţială a amortizorului. Pentru o viteză de lucru maximă, $\dot{z}_{max} = 0{,}6$ m/s, forţa maximă dezvoltată în amortizor este $F_{max} = 410$ daN şi se atinge la viteza $z_m = 0{,}35$ m/s (vezi relaţiile (2.4).

În figura 10 sînt reprezentaţi factorii de amplificare $|H_{xx_0}(\xi)|$ corespunzători sistemului liniar avînd diferiţi coeficienţi de amortizare relativă ζ şi cel corespunzător sistemului cu amortizare secvenţială caracterizată de parametrii $\alpha = 2$ şi $\zeta = 2$.

Funcţia de transfer $H_{xx0}(\xi)$, determinată mai sus în cazul sistemului oscilant cu un singur grad de libertate, poate fi utilizată pentru calculul funcţiilor de transfer $H_{x_1x_0}(\xi)$ şi $H_{x_2x_0}(\xi)$ ale sistemului oscilant cu două grade de libertate care modelează o suspensie echipată cu amortizoare secvenţiale (vezi fig. 11). Ecuaţiile de mişcare ale acestui sistem pot fi puse sub forma

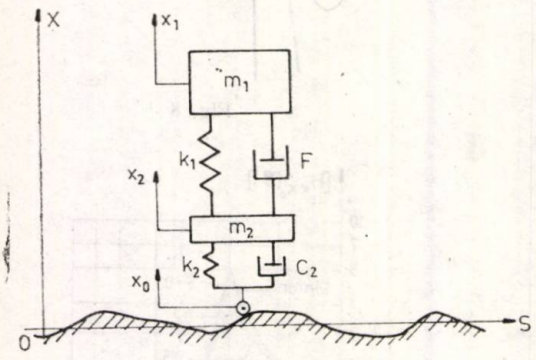


Fig. 11

$$\ddot{x}_1 + f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2, \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 4\pi^2 f_1^2 (x_1 - x_2) = 0 , \tag{2.27}$$

$$\ddot{x}_2 - \mu f (\dot{x}_1 - \dot{x}_2, \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) - 4\pi^2 f_1^2 \mu (x_1 - x_2) + 4\pi f_1 \delta \zeta_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_0) + 4\pi^2 f_1^2 \delta^2 (x_2 - x_0) = 0 ,$$

în care s-au utilizat notaţiile

$$f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2, \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = f(\dot{z}_1, \ddot{z}_1) = F(\dot{z}_1, \ddot{z}_1)/m_1 .$$

$$f_1 = (1/2\pi)\sqrt{k_1/m_1}; \quad f_2 = (1/2\pi)\sqrt{k_2/m_2} = \delta f_1, \tag{2.28}$$

$$\mu = m_1/m_2 , \quad \zeta_2 = c_2/2\sqrt{k_2 m_2}.$$

Înmulțind prima ecuație (2.27) cu μ și adunînd-o cu a doua, se obține

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 4\pi f_1 \delta \zeta_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_0) + 4\pi^2 f_1^2 \delta^2 (x_2 - x_0) = 0. \quad (2.29)$$

Punînd

$$x_0(t) = x_0 e^{i2\pi f_1 \xi t} \; ; \quad \xi = f/f_1 \; ; \quad x_2(t) = H_{x_2 x_0}(\xi) x_0(t), \quad (2.30)$$

$$x_1(t) = H_{x_1 x_2}(\xi)\, x_2(t) = H_{x_1 x_2}(\xi)\, H_{x_2 x_0}(\xi)\, x_0(t),$$

rezultă

$$\begin{aligned} x_2(t) - x_0(t) &= [H_{x_2 x_0}(\xi) - 1]\, x_0(t), \\ \dot{x}_2(t) - \dot{x}_0(t) &= i2\pi f_1 \xi\, [H_{x_2 x_0}(\xi) - 1]\, x_0(t), \\ \ddot{x}_1(t) &= -4\pi^2 f_1^2 \xi^2 H_{x_1 x_0}(\xi)\, H_{x_2 x_0}(\xi)\, x_0(t), \\ \ddot{x}_2(t) &= -4\pi^2 f_1^2 \xi^2 H_{x_2 x_0}(\xi)\, x_0(t), \end{aligned} \quad (2.31)$$

unde $H_{x_1 x_2}(\xi)$ este egală cu funcția de transfer $H_{xx_0}(\xi)$ corespunzătoare sistemului oscilant cu un singur grad de libertate, care este definită de relațiile (2.19) — (2.22). Introducînd (2.31) în (2.29) și rezolvînd ecuația astfel obținută în raport cu funcția de transfer $H_{x_2 x_0}(\xi)$, rezultă

$$H_{x_2 x_0}(\xi) = \frac{\delta^2 + 2i\delta\zeta_2\xi}{-\mu\xi^2 H_{x_1 x_2}(\xi) - \xi^2 + \delta^2 + 2i\delta\zeta_2\xi}. \quad (2.32)$$

Funcția de transfer $H_{x_1 x_0}(\xi)$ se obține direct din (2.30) sub forma

$$H_{x_1 x_0}(\xi) = H_{x_1 x_2}(\xi) H_{x_2 x_0}(\xi),$$

în care $H_{x_2 x_0}(\xi)$ este dată de (2.32).

Primită la redacție la 20 decembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. J. M. FEDERSPIEL, *Quelques aspects modernes des problèmes de dynamique automobile*, Ingineurs de l'automobile, *5*, 133 (1976).
2. * * * *Amortizoare secvențiale pentru suspensii antiplonjante pentru autoturisme*, Contract de cercetare științifică I.F.T.M.-I.C.P.A. Pitești, București, 1978.
3. F. DINCĂ, ș.a., *Amortizoare secvențiale pentru autovehicule*, St. cerc. mec. apl., **38** *1*, 89 (1979
4. F. DINCĂ, C. TEODOSIU, *Non-linear and Random Vibration*, București, New York, Edit. Academiei R.S.România, Academic Press, 1973.

ASUPRA REZISTENȚEI LA RULAREA ROȚILOR CU PNEURI PE CĂI NEDEFORMABILE

de CH. VASILIU
TR. CANȚĂ
OLTCIT

Rezistența la rulare pe căi nedeformabile a automobilelor, echipate cu roți cu pneuri, se determină, potrivit bibliografiei de specialitate, folosind relații empirice în care atît coeficientul de rezistență la rulare, cît și alți parametri folosiți în acest scop sînt determinați în urma unor încercări în laborator sau pe cale.
Aceasta se datorește, în primul rînd, complexității fenomenului rulării roților cu pneuri. În lucrare se analizează desfășurarea fenomenului de deformare a pneului, evidențiindu-se relațiile analitice ce conturează acest fenomen și prezintă — drept urmare — o metodică de abordare a acestui fenomen și unele relații analitice folositoare la determinarea rezistenței la rulare.

1. REZISTENȚA LA RULAREA ROȚILOR DE AUTOMOBIL PE CĂI NEDEFORMABILE

Rezistența la rularea roților autovehiculelor se datorește unui complex de fenomene fizico-mecanice care au loc în timpul deplasării acestora și care sînt reprezentate, în principal, de: deformările pneurilor; frecările în lagărele (rulmenții) roților; deformarea căii de rulare; percuția dintre elementele pneului și microneregularitățile căii de rulare etc.

Chiar în cazul căilor nedeformabile (șosele asfaltate, betonate, pavate, pietruite etc.), complexele fenomene ale rulării roților cu bandaj elastic (pneuri) au condiționat metodicile de evaluare a rezistenței la rulare a acestora.

Astfel, literatura de specialitate [1 ... 6] este unanimă în a recomanda folosirea — pentru determinarea, cu aproximație, a rezistenței la rulare — a așa numitului *coeficient de rezistență la rulare*, definit de raportul dintre forța de rezistență la rulare R_r, paralelă cu calea și opusă sensului de deplasare a vehiculului și reacțiunea verticală a căii, care este egală cu sarcina pe roată, G_r, adică

$$f = \frac{R_r}{G_r}, \tag{1}$$

ale cărei valori medii (prezentate în tabele) se determină experimental, în funcție de felul și starea căii.

Cercetările experimentale au scos în evidență influența vitezei de circulație, a presiunii din pneuri, a sarcinii radiale, a caracteristicilor constructive ale pneului, a momentului motor aplicat roții, a felului drumului.

Influențele vitezei și ale presiunii din pneu sînt, uneori, prezentate sub forma unor relații empirice, iar celelalte sînt redate grafic [2 ; 5 ; 6 ; 9].

S-a constatat că sursa principală a rezistenței la rulare ($0{,}7 \ldots 0{,}9R_r$) o formează deformațiile — radială și tangențială — ale pneului, deformații care necesită energie pentru acoperirea pierderilor nerecuperabile provocate de fenomenul de histerezis al materialului pneului.

Procesul de deformare radială se reprezintă (fig. 1) prin curba de variație a deformației δ_r în funcție de sarcina g, curbă care la încărcare trece prin punctele OAB, iar la relaxare prin punctele BCO', datorită fenomenului de histerezis al anvelopei din cauciuc.

Energia de deformare este reprezentată (la scară) de aria buclei $OABE$, iar cea recuperată — prin relaxare — de aria $O'CBE$.

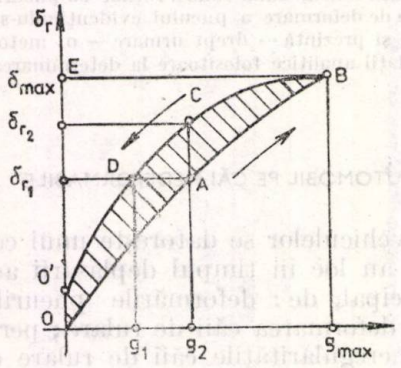


Fig. 1

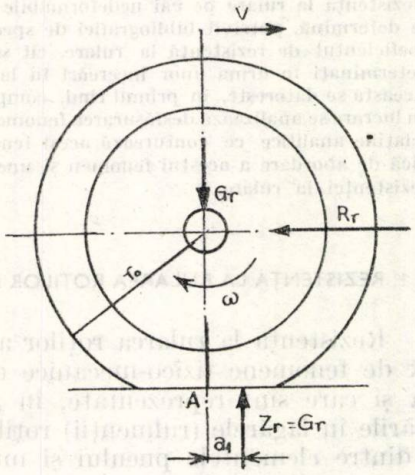


Fig. 2

Pierderea de energie prin histerezis datorită frecărilor interne ale materialului, este reprezentată de aria $OABCDO'O$, care se va manifesta prin ridicarea temperaturii pneului.

Diagrama arată că pentru orice element în curs de deformare, pentru aceeași deformație, efortul radial la încărcare g_2 este superior efortului g_1 la relaxare, pentru aceeași deformare δ_{r1}, ceea ce are drept efect deplasarea reacțiunii verticale a solului Z_r, înaintea verticalei ce trece prin centrul roții, în sensul de rulare a pneului (fig. 2) ; mărimea distanței de deplasare a_1, depinde de rigiditatea pneului.

Apare astfel un moment de rezistență la rulare [2 ; 6],

$$M_{rul1} = G_r a_1, \tag{2}$$

care este proporțional cu mărimea buclei închisă de curbele de histerezis.

Deformarea tangențială se datorește momentului aplicat roții, care produce o răsucire elastică a pneului în plan median, astfel că în porțiunile anterioare ale zonei de sprijin (de intrare în contact) se produce o comprimare tangențială, iar în porțiunile posterioare o alungire tangențială a pneului.

Datorită comprimării tangențiale a materialului periferic al anvelopei crește apăsarea specifică pe suprafața de contact în zona de intrare în contact cu calea, ceea ce produce o deplasare a reacțiunii verticale față de centrul suprafeței de contact, rezultînd un moment de rezistență la rulare [2 ; 6],

$$M_{rul\,2} = G_r\, a_2. \tag{3}$$

Momentul total de rezistență la rulare, datorit deformării pneului este su ma celor două momente :

$$M_{rul} = M_{rul1} + M_{rul2} = G_r\,(a_1 + a_2), \tag{4}$$

din care se poate determina rezistența la rulare prin raportare la raza de rulare a pneului.

2. DEFORMAREA PNEULUI ÎN CONTACT CU CALEA NEDEFORMABILĂ

Roata de automobil (cu pneuri) în contact cu o cale nedeformabilă (fig. 3) se deformează sub sarcina G_r, volumul deformației depinzînd atît de dimensiunile roții, cît și de caracteristicile vîscoelastice ale materialului anvelopei.

Volumul deformat este dat de produsul dintre aria segmentului de cerc $ACA'C'A$ și lățimea petei de contact [8] :

$$V_p = \frac{2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0}{2}\, r_0^2\, b, \tag{5}$$

în care

$2\alpha_0$ este unghiul la centru al lungimii petei de contact ;

r_0 — raza pneului înainte de a intra în contact cu calea (raza liberă) ;

b — lățimea petei de contact între pneu și cale.

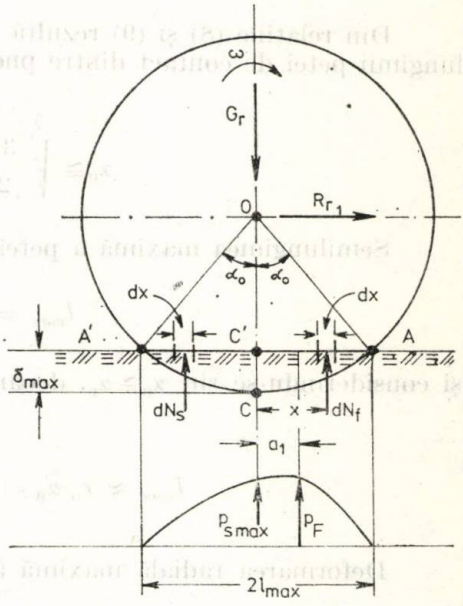


Fig. 3

În cazul cînd mărimea sarcinii radiale pe roată, G_r este apropiată de valoarea maximă admisă, lățimea petei de contact devine egală cu lățimea pneului, B,
deci

$$V_p = \frac{2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0}{2}\, r_0^2\, B. \tag{6}$$

Dezvoltînd în serie funcția trigonometrică

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{2\alpha_0}{1!} - \frac{(2\alpha_0)^3}{3!} + \frac{(2\alpha_0)^5}{5!}$$

și aproximîndu-i-se valoarea, deoarece unghiurile sînt mici, vom obține

$$\frac{2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0}{2} \cong \frac{2}{3}\alpha_0^3, \tag{7}$$

mărime, care introdusă în relația (6), ne dă

$$V_p \cong \frac{2}{3}\alpha_0^3 r_0^2 B. \tag{8}$$

Deformarea pneului este produsă de sarcina pe roată, G_r, și depinde de *rigiditatea* volumetrică a sa, q_p, potrivit relației

$$G_r = q_p V_p . \tag{9}$$

Din relațiile (8) și (9) rezultă mărimea unghiului la centru al semilungimii petei de contact dintre pneu și cale :

$$\alpha_0 \cong \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{\frac{G_r}{q_p B r_0^2}} . \tag{10}$$

Semilungimea maximă a petei de contact (fig. 3) fiind

$$l_{max} = r_0 \sin \alpha_0$$

și considerîndu-se $\sin \alpha_0 \cong \alpha_0$, deoarece unghiurile sînt mici, rezultă

$$l_{max} \approx r_0 \alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{\frac{G_r r_0}{q_p B}} . \tag{11}$$

Deformarea radială maximă a pneului (fig. 3) este dată de relația

$$\delta_{p_{max}} = r_0 (1 - \cos \alpha_0). \tag{12}$$

Dezvoltînd în serie funcția trigonometrică

$$\cos \alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0^2}{2!} + \frac{\alpha_0^4}{4!} - \ldots$$

și aproximînd mărimea acesteia, rezultă că

$$1 - \cos \alpha_0 \cong 1 - 1 + \frac{\alpha_0^2}{2} = \frac{\alpha_0^2}{2}.$$

Deci, relația deformației radiale maxime va deveni:

$$\delta_{p_{max}} = r_0 \frac{\alpha_0^2}{2} = \sqrt[3]{\frac{9}{32}} \sqrt[3]{\frac{G_r^2}{q_p^2 B^2 r_0}}. \tag{13}$$

Se constată că parametrii caracteristici ai deformării pneului în contact cu calea nedeformabilă au dependențe diferite față de dimensiunile și rigiditatea pneului, precum și față de sarcina pe roată, astfel:

— lungimea petei de contact, $2 l_{max} \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{\frac{G_r r_0}{q_p B}}$,

— deformarea radială maximă, $\delta_{p_{max}} = \sqrt[3]{\frac{9}{32}} \sqrt[3]{\frac{G_r^2}{q_p^2 B^2 r_0}}$.

3. REZISTENȚA LA RULAREA PNEURILOR PE CĂI NEDEFORMABILE

3.1. *Datorită deformărilor radiale.* Se consideră (fig. 3) că pe fiecare element de suprafață a pneului, $B\,dx$, ce intră în contact cu calea, acționează o forță elementară de comprimare radială, $p_F B\,dx$, în care s-a notat prin p_F presiunea pe anvelopă în zona anterioară.

Ținînd seama că presiunile medii din față diferă de cele din spatele medianei volumului deformat, datorită fenomenului de histerezis, va lua naștere o rezistență la rulare a pneului exprimată prin relația

$$R_{r_1} = \frac{1}{r}\left[\int_0^l x\,dN_f - \int_0^l x\,dN_s\right]$$

sau

$$R_{r_1} = \frac{1}{r}\left[\int_0^l x p_F\, B\,dx - \int_0^l x p_s\, B\,dx\right]. \tag{14}$$

Notînd prin K raportul dintre cele două presiuni și avînd în vedere curba de histerezis a pneului (fig. 1), avem:

$$K = \frac{p_s}{p_F} = \frac{AO'CBE}{AOABE} < 1. \tag{15}$$

Raportul K reprezintă de fapt coeficientul de restituire energetică a pneului supus la deformații. În consecință, relația (14), devine

$$R_{r_1} = \frac{1}{r} B p_F (1 - K) \int_0^l x \, dx. \tag{16}$$

Cu noscînd că $x = r \sin \alpha$, iar $dx = r \cos\alpha \, d\alpha$, rezultă

$$R_{r_1} = \frac{1}{r} B p_F (1 - K) \int_0^l r^2 \sin\alpha\cos\alpha \, d\alpha$$

sau

$$R_{r_1} = B r_0 p_F (1 - K) \frac{\sin^2 \alpha_0}{2}. \tag{17}$$

Dar sarcina G_r este echilibrată pe verticală, astfel că

$$G_r = p_F l B + p_s l B = B l p_F (1 + K) \tag{18}$$

relație, în care dacă introducem mărimea $l = r_0 \sin \alpha_0$, devine

$$G_r = B r_0 p_F (1 + K) \sin \alpha_0. \tag{19}$$

Din această relație se determină expresia presiunii p_F,

$$p_F = \frac{G_r}{B r_0 (1 + K) \sin \alpha_0},$$

care, introdusă în relația (19), va conduce la o expresie de forma

$$R_{r_1} = \frac{1 - K}{1 + K} G_r \frac{\sin\alpha_0}{2}. \tag{20}$$

Ținînd seama că unghiul la centru al lungimii petei de contact are mărimi sub 10°, se poate considera că $\sin \alpha_0 = \alpha_0$, relația căpătînd astfel forma

$$R_{r_1} = \frac{1 - K}{1 + K} \frac{\alpha_0}{2} G_r, \tag{21}$$

în care, dacă folosim relația (10), vom obține expresia rezistenței la rulare provocată de deformarea radială a pneului:

$$R_{r_1} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \frac{1 - K}{1 + K} \sqrt[3]{\frac{G_r^4}{q_p B r_0^2}}, \tag{22}$$

sau, dacă dorim să folosim mărimea diametrului pneului,

$$R_{r_1} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \frac{1-K}{1+K} \sqrt[3]{\frac{1}{q_p}} \sqrt[3]{\frac{G_r^4}{B D_0^2}}. \tag{23}$$

Din studiul asupra rulării roților cu pneuri pe căi plastic deformabile [8], relația care face posibilă determinarea — pe cale analitică — a rezistenței la înaintare pe astfel de drumuri, este de forma

$$R_r = 0{,}8585 \frac{\sqrt[3]{q_e^2}}{q_c} \sqrt[3]{\frac{G_r^4}{B D_0^2}},$$

formă care, comparată cu relația (23), indică dependențe identice față de sarcina pe roată și dimensiunile pneului, precum și dependințe specifice caracteristicilor materialelor corpurilor ce se află în interacțiune: pneul — calea.

În prima parte a studiului s-a arătat că datorită deformării radiale își face apariția un moment rezistent la rulare:

$$M_{rul1} = G_r a_1 = R_{r_1} r_0.$$

Se poate determina analitic mărimea excentricității de acționare a acestui moment, folosind relația:

$$a_1 = r_0 \frac{R_{r_1}}{G_r}, \tag{24}$$

în care, dacă se introduce relația (22), se obține

$$a_1 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \frac{1-K}{1+K} \sqrt[3]{\frac{G_r r_0}{q_p B}}. \tag{25}$$

Pentru a se determina poziția de acționare a reacțiunii solului Z_r (fig. 2), se va folosi raportul dintre relațiile (11) și (25):

$$\frac{a_1}{l_{max}} = \frac{1}{2} \frac{1-K}{1+K}, \tag{26}$$

în care se relevă mărimea a_1 în funcție de lungimea petei de contact și de caracteristicile pneului:

$$a_1 = \frac{1-K}{1+K} \frac{l_{max}}{2}. \tag{27}$$

De asemenea, se poate determina și mărimea unghiului α_h, de poziționare a punctului de acționare a reacțiunii solului Z_r (fig. 2), din relația

$$\alpha_h \approx \sin \alpha_h = \frac{a_1}{r_0} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\frac{1-K}{1+K}\sqrt[3]{\frac{G_r}{q_p B r_0}}. \tag{28}$$

Adoptînd aceeași metodică de determinare a dependenței parametrilor unghiulari, vom avea:

$$\frac{\alpha_h}{\alpha_0} = \frac{1}{2}\frac{1-K}{1+K}, \tag{29}$$

de unde

$$\alpha_h = \frac{1-K}{1+K}\frac{\alpha_0}{2}, \tag{30}$$

relație echivalentă cu (27).

3.2. *Datorită deformărilor tangențiale.* Se cunoaște că datorită solicitărilor, pneul roților de automobil se deformează radial, tangențial și lateral, raportul dintre solicitare și deformația respectivă, reprezentînd *rigiditatea liniară* a anvelopei.

Deformările tangențiale sînt produse numai de momentele aplicate roții, acestea fiind cuprinse în intervalul

$$M_r \in (0\,;\, \varphi\, G_r)\,,$$

în care φ este coeficientul de aderență dintre pneu și calea de rulare; în lipsa momentelor la roată această rezistență nu se manifestă.

Prin încercări au fost determinate valorile medii ale rigidităților liniare ale anvelopelor, ele fiind prezentate tabelar [6]. Se constată că rigiditatea tangențială este mult mai mare decît cea radială, ceea ce înseamnă că tangențial fenomenul de histerezis va avea o manifestare mult mai mică, respectiv și rezistența la rulare datorată acestor deformări va fi, în mod corespunzător, mai mică.

Notînd prin k raportul dintre rigiditatea radială și cea tangențială a pneului,

$$k = \frac{q_r}{q_t} < 1, \tag{31}$$

rezultă că rezistența la rulare provocată de deformarea tangențială va fi o parte din cea provocată de deformarea radială:

$$R_{r_2} = k\, R_{r_1}\,, \tag{32}$$

de unde, ținînd seama de relația (23), rezultă expresia acestei rezistențe la rulare :

$$R_{r_2} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\, k\, \frac{1-K}{1+K} \sqrt[3]{\frac{1}{q_p}} \sqrt[3]{\frac{G_r^4}{BD_0^2}}. \tag{33}$$

Mărimea excentricității a_2, datorită deformărilor tangențiale, va fi și ea afectată corespunzător, astfel că

$$a_2 = k\, a_1 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, k\, \frac{1-K}{1+K} \sqrt[3]{\frac{G_r\, r_0}{q_p B}}. \tag{34}$$

3.3. *Datorită pseudoalunecării pneului pe calea nedeformabilă.* Frecarea superficială dintre pneul de automobil și calea nedeformabilă, care apare la rostogolirea roților, a fost studiată — ca fenomen — fiind denumită „pseudoalunecare" [7].

Cu această ocazie au fost stabilite relații prin care să se determine, analitic, mărimea frecărilor de „pseudoalunecare", fie sub formă de putere pierdută prin „frecarea de alunecare locală", fie sub formă de forță rezistentă, ce acționează asupra bandajului elastic al pneului datorită acestui fenomen parazit.

Astfel, mărimea acestei forțe rezistente, care se manifestă tot ca rezistență la rulare, este dată de relația [7] :

$$R_{r_3} = 2\mu\, p_c\, B r_r\, \frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\operatorname{tg}\alpha_d} \left[\alpha_0 - \sin\alpha_d - \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_0}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha_d}{2}\right)} \cos\alpha_d \right], \tag{35}$$

în care μ este coeficientul de frecare dintre pneu și cale;
p_c — presiunea de contact dintre pneu și cale;
r_r — raza de rulare a pneului;
α_d — unghiul de poziționare a razei de rulare;
celelalte notații fiind arătate în lucrarea de față.

Valoarea medie a presiunii de contact p_c, se poate determina cu relația

$$p_c = \frac{G_r}{2\, B\, l_{max}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{\frac{G_r^4\, r_0}{q_p B^4}}, \tag{36}$$

iar mărimea razei de rulare, cu relația

$$r_r = \frac{30\, V}{\pi\, n_r}, \tag{37}$$

unde

V este viteza de mers a autovehiculului;

n_r — turația pneului, la această viteză.

Unghiul de poziționare a razei de rulare se determină din relația [7]:

$$\alpha_d = \text{arc cos} \frac{\pi n_r r_0 \sqrt{\frac{120 V^2}{n_r^2 r_0^2} - \frac{1}{3}}}{30V}. \tag{38}$$

3.4. *Datorită macrorugozităților.* Pentru depășirea unei macroneregularități de pe calea de rulare este necesară o energie, care depinde de sarcina pe roată, G_r, și de înălțimea neregularității, i_{max},

$$G_r i_{max} = R_{r_4} r_d, \tag{39}$$

în care r_d este raza dinamică, egală cu [7]:

$$r_d = r_0 \cos \alpha_0 \cong r_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{2}\right), \tag{40}$$

toate elementele fiind cunoscute.

După depășirea macrorugozității, pneul redă o parte din energia de deformare a sa, rămînînd, totuși, ca cealaltă parte din energia folosită inițial să fie pierdută, datorită fenomenului de histerezis.

Din figura 3 rezultă că energia pierdută este proporțională cu

$$\frac{A_{OABE} - A_{O'CBE}}{A_{OABE}} = 1 - K, \tag{41}$$

de unde rezultă că rezistența la rulare datorită acestei cauze va fi proporțională cu această energie:

$$R_{r_4} = (1 - K) G_r \frac{i_{max}}{r_d} = (1 - K) G_r \frac{i_{max}}{r_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{2}\right)} \tag{42}$$

sau

$$R_{r_4} = 2(1 - K) \frac{i_{max}}{r_0} \frac{G_r}{(2 - \alpha_0^2)}, \tag{43}$$

în care α_0 este dat de relația (10).

3.5. *Datorită frecărilor din lagărele roții.* Roțile autovehiculelor sînt montate pe axul lor prin lagăre de rostogolire (cîte doi rulmenți tronconici).

Frecările din acești rulmenți vor produce, în final, o rezistență la rularea pneului, dată de relația

$$R_{r_5} = \mu_0 G_r, \tag{44}$$

în care μ_0 este coeficientul de frecare la rostogolire a rulmenților.

4 CONCLUZII

Cu toate că rularea pneului de automobil pe căi nedeformabile este un proces destul de complex, ceea ce a făcut ca în literatura de specialitate să se recomande folosirea de relații empirice pentru determinarea rezistenței la rulare, totuși, o analiză mai aprofundată permite obținerea de relații analitice, care să descrie legăturile fizico-matematice dintre parametrii fizico-mecanici și constructivi ai pneului și rezistența la rulare.

Rezistența la rulare a roților cu pneuri pe o cale nedeformabilă va fi deci reprezentată de suma rezistențelor parțiale arătate mai sus,

$$R_r = \sum_{n=1}^{n=5} R_{r\,n}, \tag{45}$$

dîndu-se astfel, posibilitatea unor estimări analitice a acestei rezistențe la înaintarea autovehiculelor.

Se remarcă, totuși, că viteza de rostogolire a pneurilor, respectiv viteza de deplasare a autovehiculelor, influențează la rîndul său asupra unor caracteristici fizico-mecanice ale pneului sau ale ansamblului „roată de automobil".

Aceste influențe nu au fost reținute în relațiile prezentate, astfel că ele pot fi luate în considerație prin factori de corecție corespunzători, determinați experimental.

Primită la redacție la 10 octombrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. J. ELLIS, *Vehicle dynamics*, B.B.L., London, 1969.
2. C. GHIULAI, *Mecanica automobilului*. Edit. tehnică, București, 1965.
3. M. GORIANU, *Mecanica automobilelor și autoblindatelor*, Edit. Acad. Militare, București, 1974.
4. A. JANTE, *Zur Theorie des Kraftwagens*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
5. M. MITSCHKE, *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1972.
6. CH. VASILIU, *Dinamica autovehiculelor*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1975.
7. CH. VASILIU, *Frecarea superficială dintre pneul de automobil și calea nedeformabilă*, St. cerc. mec. apl., 2 (1973).
8. CH. VASILIU, *Asupra rulării roților cu pneuri pe căi deformabile*, St. cerc. mec. apl., 5 (1973).
9. TR. CANȚĂ, *Metode de determinare experimentală a rezistențelor la înaintare în teren a autovehiculelor de teren*. Referat teză doctorat, Institutul politehnic București, 1976.

INSTALAȚIE PENTRU DETERMINAREA CONSTANTELOR ELASTICE ALE ROCILOR

de GHEORGHE BĂDESCU
Institutul Național pentru Creație Științifică și Tehnică,
DAN-MIHAI ȘTEFĂNESCU
Institutul politehnic București

Se prezintă rezultatele cercetărilor întreprinse în scopul realizării unei instalații experimentale de concepție proprie, pentru determinarea, cu precizie ridicată, a constantelor elastice ale rocilor.

NOTAȚII

$\sigma_{(a)}$ — efortul unitar (admisibil) de compresiune [daN/mm^2];
N — forța axială de compresiune [daN];
A_0 — aria inițială a secțiunii transversale a probei [mm^2];
ε_l — contracția longitudinală specifică a probei [—];
Δl — contracția longitudinală a probei [mm];
l_0 — lungimea inițială a probei [mm];
ε_{tr} — dilatarea transversală specifică a probei [—];
Δd — dilatarea transversală a probei [mm];
d_0 — diametrul inițial al probei [mm];
E — modulul de elasticitate longitudinală [daN/mm^2];
G — modulul de elasticitate transversală [daN/mm^2];
ν — coeficientul lui POISSON [—];
K — modulul de compresibilitate sau elasticitate cubică [daN/mm^2];
A_n, A_{ef} — aria necesară, respectiv efectivă, a secțiunii mediane transversale prin corpul elastic al captorului de forță [mm^2];
Φ_e — diametrul exterior al captorului de forță [mm];
Φ_i — diametrul interior, în secțiunea mediană transversală [mm];
a — lățimea ferestrei captorului de forță [mm];
ε_c — deformația specifică a captorului de forță [—];
R — rezistența traductorului electrotensometric rezistiv-TER [Ω];
ΔR — variația de rezistență a TER [Ω];
k — constanta TER [—];
n — numărul de brațe active din puntea WHEATSTONE a captorului de forță [—];
U_a — tensiunea în diagonala de alimentare a punții [V];
U_m — tensiunea în diagonala de măsură [mV];
S — sensibilitatea captorului [mV/V];
Δl_i, Δd_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — deplasările măsurate de fiecare captor [mm];

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 3, 1981, P. 451—466

L_{i1}, L_{i2} ($i = 1, 2, 3, 4$) — inductanța unei bobine a captorului de deplasare diferențial cu miez mobil, L fiind valoarea la echilibru [mH];
ΔL — variația de inductanță a bobinei [mH];
w — numărul de spire al bobinei [—];
l_b — lungimea unei bobine [mm];
r_b — raza medie a unei bobine [mm];
l_m — jumătate din lungimea miezului [mm];
Δl_m — deplasarea miezului în interiorul captorului [mm];
r_m — raza miezului [mm];
μ_m — permeabilitatea efectivă a miezului [H/m];
R_L — rezistența proprie a bobinei [Ω];
R_e — rezistență folosită la echilibrarea punții, în varianta captorului de deplasare inductiv [Ω];
D — deplasare-etalon [mm];
I — indicația instrumentului de măsură [diviziuni];
$S_{\varepsilon j}(j = 1, 2, 3)$ — coeficient de sensibilitate globală a canalului de măsură [daN/$mm_{(h)}$ sau $mm_{(d)}/mm_{(h)}$];
u_{mj} — unitate de variație a mărimii mecanice [daN sau $mm_{(d)}$];
δ_j — deviația-etalon pe hîrtia de înregistrare [$mm_{(h)}$].

1. INTRODUCERE

Determinarea constantelor elastice ale rocilor prezintă o deosebită importanță pentru stabilirea soluțiilor optime de execuție sau consolidare a galeriilor de mină.

În acest scop, la solicitarea Institutului de cercetări și proiectări pentru minereuri și metalurgie neferoasă din Baia Mare, s-au întreprins cercetări fundamentale și aplicative privind realizarea unui sistem de măsură complet, alcătuit din captoare de concepție originală și amplificatoare și înregistratoare de fabricație românească, cu performanțe superioare celor obținute cu echipamentele existente la mașinile de încercat clasice.

2. CONSIDERAȚII TEORETICE

Rocile sînt medii stratificate în decursul erelor, cu anizotropie de structură și solicitare, de care trebuie să se țină seama la determinarea stării de efort și deformare a masivului [3]. Problema se poate aborda cu precizie prin metoda elementului finit, care necesită cunoașterea constantelor elastice ale fiecărui strat.

Comportarea complexă a materialelor reale nu poate fi descrisă decît printr-o idealizare a proprietăților lor. Determinările ce urmează au la bază, la nivelul probelor prelevate din diferite straturi, ipotezele teoriei elasticității liniare, aplicate corpurilor omogene și izotrope.

Relația fizică între eforturile unitare:

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \tag{1}$$

și deformațiile specifice longitudinale :

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{2}$$

se stabilește experimental [4]. Se supune proba la compresiune și se obține curba caracteristică a materialului. La oțeluri, caracteristica convențională

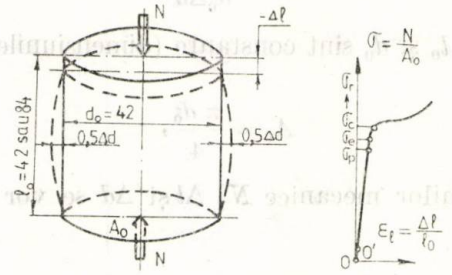


Fig. 1

are alura din figura 1. Pînă la limita de proporționalitate (σ_p) este valabilă legea lui HOOKE,

$$\sigma = E\varepsilon_l . \tag{3}$$

Rocilor li se atribuie, în mod convențional, un modul de elasticitate longitudinală, care se determină măsurînd panta tangentei la porțiunea inițială a curbei caracteristice sau asimilînd această porțiune cu o dreaptă.

Odată cu contracția longitudinală ($-\Delta l$) are loc o dilatare transversală a probei :

$$\varepsilon_{tr} = \frac{\Delta d}{d_0}, \tag{4}$$

legătura dintre cele două deformații specifice fiind dată de relația

$$\varepsilon_{tr} = -\nu\,\varepsilon_l . \tag{5}$$

În ipoteza corpului elastic liniar, omogen și izotrop este suficientă determinarea a două constante elastice independente. Luînd ca parametri de bază E (modulul lui YOUNG) și ν (coeficientul lui POISSON), se pot calcula celelalte perechi de constante elastice, ca, de exemplu,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6}$$

și

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} . \tag{7}$$

Făcînd înlocuirile corespunzătoare în formulele (1)—(5), rezultă următoarele relaţii pentru aflarea constantelor elastice:

$$E = \frac{l_0 N}{A_0 \Delta l} \tag{8}$$

şi

$$\nu = \frac{l_0 \Delta l}{d_0 \Delta d}. \tag{9}$$

Se observă că l_0 şi d_0 sînt constante (dimensiunile iniţiale ale probei), ca şi

$$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}, \tag{10}$$

iar variaţiile mărimilor mecanice N, Δl şi Δd se vor măsura electronic.

3. SISTEMUL DE MĂSURĂ

3.1. CAPTOARELE DE FORŢĂ

3.1.1. *Proiectarea.* Măsurarea forţei se face cu un captor aşezat în serie cu proba de dimensiuni standard (fig. 1), între cele două platouri ale unei prese cu acţionare hidraulică.

Datorită diversităţii rocilor ce trebuie studiate şi pentru a realiza o sensibilitate ridicată în toate cazurile, a fost necesar să se proiecteze trei captoare de forţă de compresiune, pentru sarcinile nominale de 5 000 daN, 25 000 daN şi 50 000 daN.

Cel mai adecvat, prin robusteţe şi liniaritate, este captorul cu traductoare electrotensometrice rezistive-TER [10], [12].

Forma constructivă adoptată: colivie cilindrică cu patru bare (fig. 2), corpul elastic de secţiune inelară asigurînd măsurarea forţei axiale cu influenţe reduse ale altor solicitări (încovoiere, răsucire) şi evitînd flambajul.

S-a utilizat formula de dimensionare la compresiune:

$$A_n = \frac{N}{\sigma_a}, \tag{11}$$

în care, pentru transmiterea proporţională prin adeziv, σ_a s-a limitat la 21 daN/mm².

Aria efectivă a secţiunii transversale s-a exprimat cu relaţia [2]:

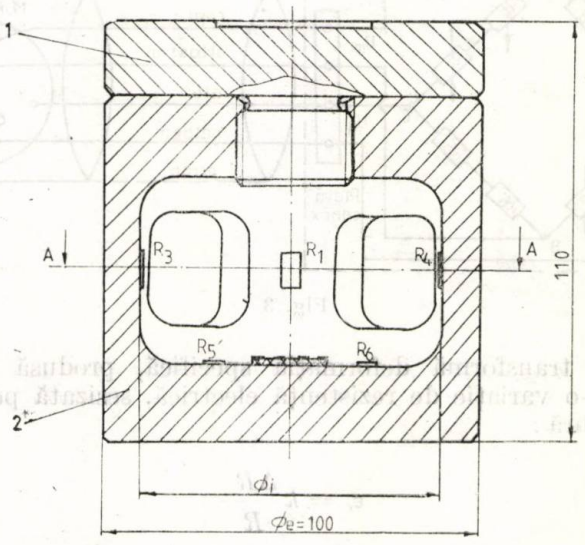
$$A_{ef} = \frac{\pi}{4}(\Phi_e^2 - \Phi_i^2) + \Phi_i^2 \arcsin \frac{a}{\Phi_i} - \Phi_e^2 \arcsin \frac{a}{\Phi_e} -$$

$$- a(\sqrt{\Phi_e^2 - a^2} - \sqrt{\Phi_i^2 - a^2}). \tag{12}$$

Cotele Φ_e şi Φ_i fiind alese din considerente tehnologice, s-a calculat a, rezultînd celelalte valori din tabelul 1:

Tabelul 1

N [daN]	Φ_e [mm]	Φ_i [mm]	a [mm]	A_{ef} [mm²]	σ_{ef} [daN/mm²]	ε_c $\times 10^{-6}$
5 000	60	50	29,3	245,5	20,367	1 071,9
25 000	100	80	39,1	1 208,7	20,683	1 088,6
50 000	100	70	26,4	2 394	20,886	1 099,3



Secțiunea A-A

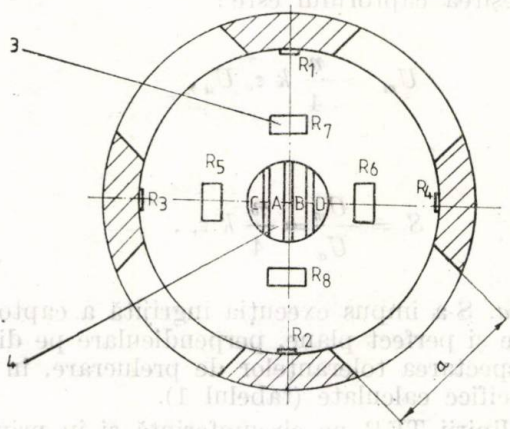


Fig. 2

În figura 2 este reprezentat captorul de 25 000 daN, alcătuit din : corpul elastic (2) și capacul (1), ambele din oțel inoxidabil marca V2A, TER(3) și plăcuța de conexiuni (4). TER sînt plasate la o distanță sufi-

cient de mare de locul de aplicare a forței, într-o zonă cu deformații mari și gradienți de tensiuni reduși. Ele sînt lipite în secțiunea mediană a captorului și conectate în punte WHEATSTONE [7], [18].

Pentru a elimina influența încovoierii și a mări sensibilitatea, se folosește o schemă de punte cu opt TER [21], în care $R_1 \ldots R_4$ sînt elementele active, iar $R_5 \ldots R_8$ joacă rol de compensare termică (fig. 3).

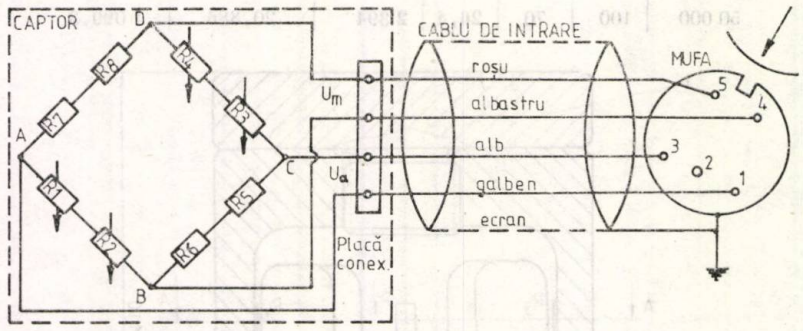


Fig. 3

Captorul transformă deformația specifică, produsă de solicitarea mecanică, într-o variație de rezistență electrică, sesizată pe canalul electronic de măsură:

$$\varepsilon_c = k \frac{\Delta R}{R}. \tag{13}$$

Tensiunea la ieșirea captorului este:

$$U_m = \frac{n}{4} k \, \varepsilon_c \, U_a, \tag{14}$$

iar sensibilitatea

$$S = \frac{U_m}{U_a} = \frac{n}{4} k \, \varepsilon_c. \tag{15}$$

3.1.2. *Realizarea.* S-a impus execuția îngrijită a captoarelor, pentru a obține fețe paralele și perfect plane, perpendiculare pe direcția de solicitare, precum și respectarea toleranțelor de prelucrare, în vederea atingerii deformației specifice calculate (tabelul 1).

Detalii asupra lipirii TER pe circumferință și în privința realizării punții se găsesc în lucrările [5] și [13]. TER sînt de tip 3/120 LB 15-HOTTINGER, compensate pentru oțel austenitic (coeficient de dilatare termică: 16×10^{-6}/°C), avînd $R = 120\ \Omega \pm 0{,}5\%$ și $k = 2{,}11 \pm 0{,}5\%$. Ele s-au lipit cu adeziv M-BOND 610-VISHAY, folosind un dispozitiv cu presiunea de strîngere de 0,028 daN/mm² (calibrat prin măsurarea depla-

sării arcurilor) și aplicînd tratamentul termic prescris de producător [20]. Protejarea TER contra umidității s-a efectuat cu lac siliconic, tip AEROSOL SI 991, produs de firma RHONE POULENC IND.

Cablurile de măsură — cele originale ale amplificatoarelor — s-au conectat la plăcuțele de conexiuni interne ale captoarelor (fig. 3). Ecranele cablurilor sînt legate la amplificatoare, nu și la captoare, evitîndu-se astfel formarea legăturilor parazite la masă.

3.1.3. *Etalonarea.* Etalonarea captoarelor s-a făcut la o mașină de încercat SCHENCK [19], dotată cu captor de forță de clasă 0,1. Fiecare captor realizat s-a conectat la amplificatorul asociat, reglîndu-se amplificarea acestuia astfel încît, pentru valoarea nominală a forței, să se obțină indicația la cap de scală 2 000 μm/m. Citirile pentru un ciclu complet (încărcare-descărcare) s-au sistematizat în tabelul 2.

Tabelul 2

N[daN]	× 10^3	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	25
I[div]	î	0	158	315	475	635	800	960	1125	1290	1455	1610	1765	2000
	d	0	160	315	480	635	805	965	1130	1290	1450	1605	1760	2000

Folosind metoda celor mai mici pătrate [14], s-a stabilit coeficientul de sensibilitate ca fiind panta dreptei care aproximează cel mai bine mulțimea perechilor de coordonate (forță aplicată-indicație instrument) găsite experimental. Ecuația dreptei de etalonare este

$$N = 12{,}47\ I + 40, \tag{16}$$

rezultînd panta de 0,080185 diviziuni/daN.

3.1.4. *Caracteristici tehnice.* Se dau următoarele caracteristici tehnice ale captorului [13], [18]:

— solicitarea : compresiune ; — sarcina nominală : 25 000 daN ; — suprasarcina maximă : 50 % ; — gabaritul : Ø 100 mm × 110 mm ; — rezistența de intrare : 240 Ω ; — rezistența de ieșire : 240 Ω ; — rezistența de izolație : 10GΩ ; — alimentarea : maximum $10V_{ef}$; — dezechilibrul inițial 500μ V/V ; — deriva nulului (după încălzirea captorului conectat la aparat timp de 30 minute) : 0,5 % ; — coeficientul de sensibilitate : 1,075 mV/V ; — rezoluția : 25 daN ; — eroarea de neliniaritate (raportată la întreaga capacitate a gamei) : 0,55 % ; — precizia : 1,05 %.

3.2. CAPTOARELE DE DEPLASARE

3.2.1. *Proiectarea.* Măsurarea deplasărilor prezintă unele dificultăți din cauza structurii neomogene a probelor supuse încercărilor, astfel încît s-a conceput un montaj care să permită măsurarea valorilor medii.

Măsurarea contracției longitudinale se face cu patru captoare de deplasare dispuse în colțurile unui pătrat care are în centru proba, astfel

încît contracția în axa probei să fie egală cu media deplasărilor măsurate de cele patru captoare :

$$\Delta l = \frac{1}{4}(\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4). \tag{17}$$

Măsurarea dilatării transversale se poate face în două moduri :

— plasînd patru captoare de deplasare pe două diametre perpendi-

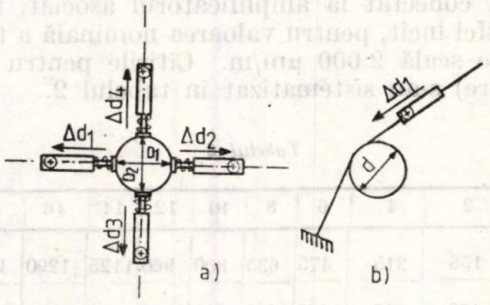


Fig. 4

culare ale probei centrate în mașina de încercat (fig. 4 *a*) și folosind relația

$$\Delta d = \frac{1}{2}(\Delta D_1 + \Delta D_2) = \frac{1}{2}(\Delta d_1 + \Delta d_2 + \Delta d_3 + \Delta d_4), \tag{18}$$

— cu un captor de deplasare unic, care măsoară extinderea circumferinței probei, în jurul căreia s-a înfășurat, pe o singură tură, un fir metalic inextensibil și flexibil (fig. 4 *b*) și calculînd Δd, care este independent de poziționarea probei în mașină, cu formula

$$\Delta d = \frac{1}{\pi}\Delta d_1. \tag{19}$$

În tema-program de cercetare [2] s-au estimat la maximum 10% atît $\Delta l/l_0$, cît și $\Delta d/d_0$, ceea ce implică următoarele domenii de măsură :

Δl_{max} : 4,2 mm sau 8,4 mm (cîte patru bucăți),

Δd_{max} : 2,1 mm (patru bucăți) sau 13,2 mm (o bucată).

Studiind comparativ mai multe tipuri de captoare de deplasare [12], s-a ajuns la concluzia că cel mai avantajos este cel inductiv. Deplasările care trebuie măsurate sînt prea mari pentru a fi preluate de un ansamblu elastic capacitiv sau rezistiv [1], [11].

Comparînd captorul inductiv cu miez mobil și cel cu întrefier variabil [9], s-a ales primul deoarece are un domeniu liniar de deplasare mai mare, deși cu o sensibilitate ceva mai mică.

S-a adoptat montajul diferențial (fig. 5), care asigură îmbunătățirea liniarității, creșterea sensibilității, scăderea forțelor electromagnetice asu-

pra miezului și reducerea influenței temperaturii, umidității și vibrațiilor [15].

Evitarea contactului sau frecării dintre bobine și miez s-a realizat prin centrarea corespunzătoare și îmbrăcarea acestuia în teflon. Sensibilitatea transversală, care reprezintă sub 1% din cea longitudinală, se elimină prin poziționarea corectă a captorului [8].

Captorul de deplasare inductiv diferențial cu miez mobil (fig. 6) mai are ca avantaje multiplele posibilități de montare și siguranța de funcționare ridicată (sfărîmarea probei nu duce la deteriorarea captorului, ci miezul iese prin celălalt capăt al acestuia).

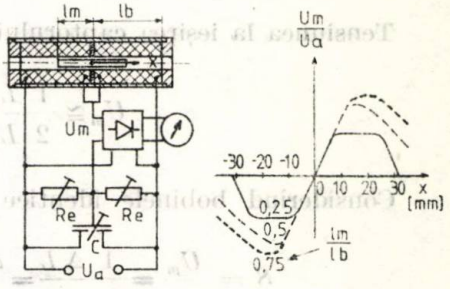


Fig. 5

Avînd în vedere gama dinamică mare, s-a adoptat o soluție constructivă unică (cu avantajul microproducției): domeniul maxim de măsură de 15 mm, respectiv $\pm$ 7,5 mm pentru captoarele diferențiale, urmînd ca, prin reglarea corespunzătoare a amplificării, să se măsoare cu maximum de precizie și deplasările mai mici.

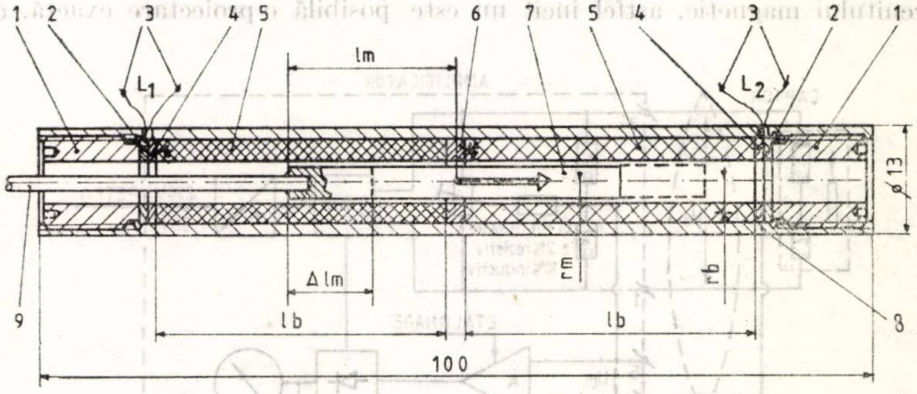


Fig. 6

Principiul de măsurare este dependența funcțională a inductanței bobinelor, alimentate în curent alternativ, de deplasarea miezului în circuitul magnetic. În montajul diferențial, L_2 crește proporțional cu scăderea lui L_1, adică

$$L_1 = L - \Delta L \qquad (20)$$

și

$$L_2 = L + \Delta L. \qquad (21)$$

Inductanța unei bobine se poate calcula cu formula [9]:

$$L = \frac{4\pi w^2}{l_b^2} [l_b r_b^2 + (\mu_m - 1) l_m r_m^2] 10^{-6}. \quad (22)$$

Tensiunea la ieșirea captorului diferențial este dată de relația [15]:

$$U_m \cong \frac{1}{2} \frac{L_2 - L_1}{L_1 + L_2} U_a. \quad (23)$$

Considerînd bobinele identice (L și ΔL respectiv egale), rezultă

$$S = \frac{U_m}{U_a} = \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta l_m}{l_m} \frac{1}{1 + \frac{(l_b/l_m)\,(r_b/r_m)^2}{\mu_m - 1}}. \quad (24)$$

Se observă că sensibilitatea este maximă dacă
$l_m \to l_b$ (miez mai lung, atrăgînd scăderea liniarității),
$r_m \to r_b$ (bobine subțiri, întinse și fără suport),
μ_m cît mai mare (material magnetic de calitate).

3.2.2. *Realizarea.* Formulele (22), (23) și (24) sînt destul de aproximative, deoarece s-au făcut o serie de neglijări în studierea configurației circuitului magnetic, astfel încît nu este posibilă o proiectare exactă, ci

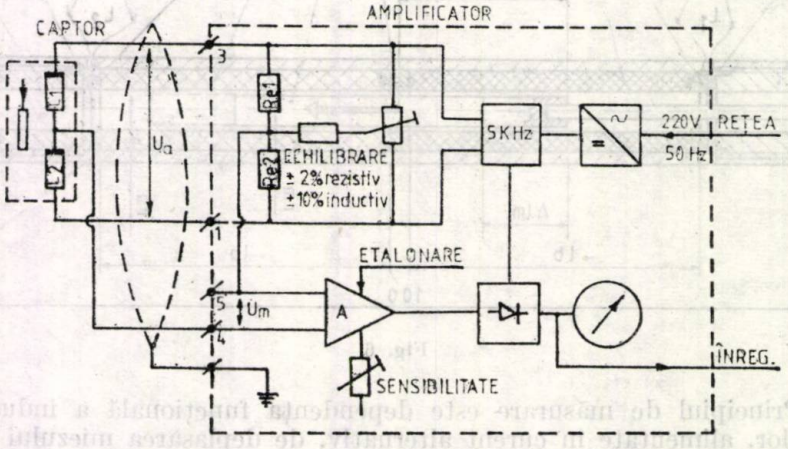


Fig. 7

se recomandă folosirea experienței obținute în realizarea unor circuite magnetice de același tip.

Problema esențială este de a se obține bobine cu o asemenea inductanță L (și, implicit, rezistență proprie R_L) încît să intre în plaja de echilibrare a amplificatorului (fig. 7), care completează puntea de măsură

printr-o semipunte rezistivă (R_{e_1} și R_{e_2}) și să satisfacă condiția complexă de echilibru:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_{L_1}}{R_{L_2}} = \frac{R_{e_1}}{R_{e_2}} \tag{25}$$

În acest scop este necesar ca fiecare captor diferențial să conțină două bobine cît mai asemănătoare, sortarea făcîndu-se mai ales după valoarea inductanței.

Configurația optimă (fig. 6), stabilită prin încercări, cuprinde bobinele (5), alcătuite din 12 straturi a cîte 50 spire, din fir de cupru emailat Φ 0,2 mm, bobinate cît mai uniform și impregnate cu lac epoxidic spre a nu-și schimba forma în timp și a afecta astfel stabilitatea curbei de etalonare, lacul constituind și un mijloc de protecție la solicitări mecanice și factori climatici [9]. Dimensionarea corespunzătoare micșorează pierderile în circuitul magnetic [12]: capacele (1), perete despărțitor (6) și carcasa (8), toate din oțel inoxidabil, asigură închiderea liniilor de cîmp magnetic. Peretele despărțitor reduce cuplajul mutual dintre bobine, îmbunătățind liniaritatea caracteristicii și contribuind la introducerea valorii L în plaja de echilibrare a amplificatorului. Capetele bobinelor sînt lipite la cîte o plăcuță de conexiuni din sticlotextolit placat (4), protejată de șaiba izolatoare din sticlotextolit (2). Legăturile exterioare sînt realizate cu fire lițate și izolate în varniș (3), fixate prin bride de ancorare pe carcasă. Miezul mobil (7), din oțel electrotehnic, este deplasat prin intermediul tijei de alamă (9), lipită cu cositor.

Reducerea influenței mediului s-a făcut prin folosirea unor materiale de calitate, realizarea unui circuit magnetic perfect simetric (repere-le-perechi 1, 2, 4 și 5), asamblarea îngrijită a componentelor captorului și eliminarea gradienților termici (instalația lucrează în condiții de laborator).

3.2.3. *Etalonarea.* Etalonarea fiecărui captor — împreună cu cablul respectiv, pentru a-i compensa efectele capacitive — s-a executat pe un stand special construit, în care miezul mobil s-a fixat la un șurub micrometric cu precizia de 0,01 mm. Pentru poziția de echilibru s-a trasat un reper pe tija captorului, apoi s-au dat deplasări de $\pm$ 5 mm, reglînd sensibilitatea amplificatorului (fig. 7) în vederea atingerii capătului de scală dorit.

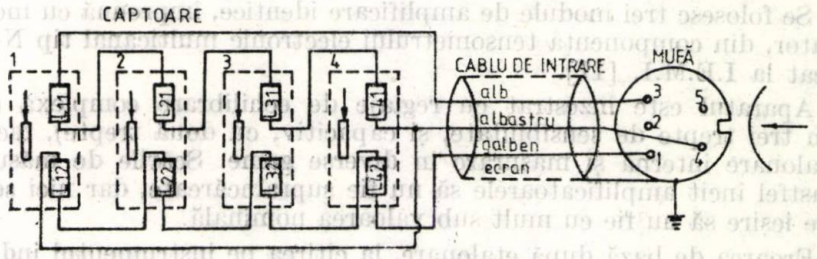


Fig. 8

Deoarece nu se fac interpretări ale anizotropiei rocilor la nivelul probelor recoltate, fiind și neeconomică folosirea a opt canale de măsură, captoarele s-au grupat cîte patru (fig. 8), mediind deplasările pe numai

două canale, conform formulelor (17) şi (18). Un asemenea grup de captoare s-a montat pe dispozitivul de etalonare, s-a echilibrat amplificatorul, s-a efectuat un ciclu de deplasări de $\pm$ 5 mm, alegînd sensibilitatea optimă pentru întreg ansamblul şi s-au consemnat citirile în tabelul 3.

Tabelul 3

D[mm]	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5
I[div]	−96	−80	−57	−40	−20	0	+20	+40	+60	+80	+100
$\times 10^3$	−98	−79	−58	−41	−20	0,4	+20,6	+41	+61	+81	+100

Ecuaţia dreptei de etalonare este

$$D = 0{,}00005042\ I - 0{,}0344, \tag{26}$$

rezultînd panta : 19 830 div/mm.

3.2.4. *Caracteristici tehnice.* Se certifică, pentru fiecare captor, următoarele caracteristici tehnice :

— solicitarea : deplasare liniară ; — gama nominală : $\pm$ 5 mm ; — gama extinsă : $\pm$ 7,5 mm ; — gabaritul : Φ 13 mm $\times$ 100 mm ; — inductanţa $(L_1 + L_2)$: 12 mH ; — rezistenţa în curent continuu $(R_{L_1} + R_{L_2})$: 44 Ω ; — alimentarea : maximum 10 V_{ef} ; — dezechilibrul iniţial : 0 (miezul se poziţionează pînă se obţine indicaţie nulă) ; — deriva zeroului : maximum 0,2 % ; — coeficientul de sensibilitate : 210 mV/V ; — rezoluţia : practic infinită ; — eroarea de neliniaritate : 1,46 % ; — precizia : 1,7 %.

3.3. AMPLIFICATOARELE

Aparatul de măsură are trei canale : unul pentru captor de forţă tensometric rezistiv şi două pentru captoare de deplasare inductive diferenţiale. Amplificatorul la care se pot conecta ambele tipuri de captoare este cel tensometric cu frecvenţă purtătoare (fig. 7).

Se folosesc trei module de amplificare identice, împreună cu modulul indicator, din componenţa tensometrului electronic multicanal tip N-2302, fabricat la I.E.M.I. [17].

Aparatul este înzestrat cu reglaje de echilibrare complexă (rezistiv, în trei trepte de sensibilitate, şi capacitiv, cu două trepte), facilităţi de etalonare internă şi măsurare în diverse game. Scările de măsură se aleg astfel încît amplificatoarele să nu fie supraîncărcate, dar nici semnalele de ieşire să nu fie cu mult sub valoarea nominală.

Eroarea de bază după etalonare, la citirea pe instrumentul indicator propriu, este de maximum $\pm$ 2 % (raportată la întreaga capacitate a gamei). Instrumentul are zero la mijloc. Pentru captoarele rezistive se foloseşte o singură polaritate (cea negativă, fiind vorba de compresiune), iar pentru captoarele inductive diferenţiale se folosesc ambele polarităţi ale instrumentului.

3.4. ÎNREGISTRATOARELE

Deşi încercarea este de tip static (viteza de solicitare sub 10daN/mm²/ /s), totuşi este incomodă comutarea permanentă, ca să se poată citi indicaţiile a trei canale de măsură pe un singur instrument. Se impune folosirea înregistratoarelor, care facilitează urmărirea simultană şi continuă a evoluţiei celor trei mărimi mecanice.

Amplificatoarele asigură largi posibilităţi de înregistrare în tensiune sau curent (fig. 9), iar frecvenţa scăzută a fenomenelor cercetate (sub 1 Hz)

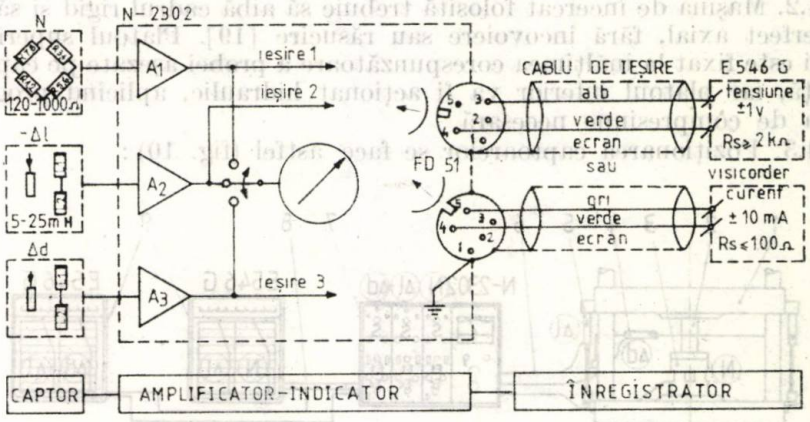


Fig. 9

dă posibilitatea folosirii oricărui tip de înregistrator.

Înregistrarea în curent, pe aparate multicanal de tip VISICORDER, dotate cu hîrtie sensibilă la raze ultraviolete şi bucle galvanometrice adecvate (ex : 1mA/cm), permite gruparea celor trei mărimi mecanice pe aceeaşi diagramă.

Folosirea a două înregistratoare de tensiune de tip XY sau a unui osciloscop cu memorie cu două spoturi facilitează vizualizarea dependenţelor $N/\Delta l$ şi $\Delta d/\Delta l$ ale parametrilor măsuraţi, deci determinarea rapidă a constantelor elastice.

Utilizarea unor înregistratoare de tensiune de tip XT duce la acelaşi mod de inscripţionare ca la VISICORDER, impunînd, pentru aflarea constantelor elastice, prelucrarea ulterioară destul de laborioasă.

Din producţia autohtonă se pot folosi două aparate bicanal, tip E 546 G-F.E.A. [16], sincronizate prin faptul că deplasarea longitudinală Δl este mărimea comună înregistrată. Diagramele au lăţimea de 250 mm şi viteza maximă de avans de 2 mm/sec. Înregistratoarele F.E.A., la care sînt posibile funcţiuni suplimentare, precum folosirea a două domenii de măsurare şi avertizarea la întreruperea circuitului de intrare sau depăşirea domeniului stabilit, au sensibilitatea de 0,1 % şi precizia de $\pm$ 0,3 %.

Etalonarea diagramelor se face folosind semnalele interne de etalonare de la amplificatoare.

Pentru efectuarea unor determinări corecte se parcurg următoarele etape:

4. METODOLOGIA DE MĂSURARE

4.1. La confecționarea probelor se urmărește ca cele două baze să fie perpendiculare pe axa solicitării și să aibă fețe perfect plane, în scopul evitării solicitărilor compuse. Probele nu trebuie să aibă zgîrieturi, fisuri, urme de lovituri. Măsurarea dimensiunilor probelor se face cu o precizie cel puțin egală celei a măsurării electronice care va urma [6].

4.2. Mașina de încercat folosită trebuie să aibă cadrul rigid și să solicite perfect axial, fără încovoiere sau răsucire [19]. Platoul superior al mașinii este fixat la înălțimea corespunzătoare a probei așezate pe captorul de forță, iar platoul inferior va fi acționat hidraulic, aplicînd progresiv sarcina de compresiune necesară.

4.3. Poziționarea captoarelor se face astfel (fig. 10):

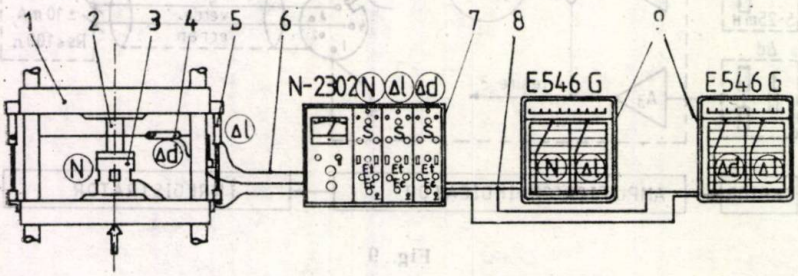


Fig. 10

4.3.1. Captorul de forță (3) trebuie perfect centrat în axa de solicitare a mașinii (1), fiind utilă trasarea a patru repere la 90° pe corpul său și pe platoul inferior.

4.3.2. Ținînd seama că dilatarea probei este neuniformă (mai mică la capete, datorită frecării de platouri, și maximă la mijloc) captorul de deplasare transversală (4) se plasează în secțiunea mediană a probei (2).

4.3.3. Captoarele de deplasare longitudinală (5) se poziționează după ce se aplică o prestrîngere de circa 10%, în scopul fixării probei între platouri (echivalent cu pornirea diagramei de compresiune din punctul 0′ al figurii 1, aspect neesențial, căci determinările se fac pe baza variațiilor de forțe și distanțe); corpurile captoarelor se prind de platoul superior al presei, folosind elemente universale de fixare, iar tijele mobile, poziționate după reperele mediane, se atașează de platoul inferior cu ajutorul unor piese gravimetrice sau magnetice.

4.4. Se completează lanțul de măsură electronic cu: cablurile de intrare (6), amplificatoarele (7), cablurile de ieșire (8) și înregistratoarele (9). Se încălzește aparatura timp de 30 minute, se echilibrează și se înregistrează pe diagrame nivelele de referință.

4.5. Se introduc semnalele de etalonare electronice, conform celor arătate anterior, și se înregistrează pe diagrame nivelele corespunzătoare,

calculînd, pentru fiecare canal, un coeficient de sensibilitate globală de forma

$$S_{gj}=\frac{u_{mj}}{\delta_j}. \tag{27}$$

4.6. Se revine la nivelul de referință și se încarcă lent proba cu diferite sarcini de compresiune, înregistrînd simultan variațiile celor trei mărimi mecanice.

4.7. Se citesc pe diagrame valorile corespunzătoare aceluiași moment de timp, repetîndu-se operațiunea în mai multe puncte caracteristice și tabelînd datele experimentale. Estimarea raporturilor $N/\Delta l$ și $\Delta d/\Delta l$ cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate este independentă de forma repartiției rezultatelor sau erorilor de măsurare [14].

4.8. Se calculează, pe baza formulelor (8) și (9), E și ν, rezultînd G (6) și K (7) pentru proba testată.

4.9. Folosind mai multe eșantioane din același strat, se face determinarea statistică a constantelor elastice.

4.10. Se procedează analog pentru toate straturile și se sistematizează datele obținute într-un tabel sinoptic, care relevă concluziile privind comportarea masivului în ansamblu.

5. CONCLUZII

S-a realizat o instalație complexă pentru determinarea constantelor elastice ale rocilor, cu captoare de forță și de deplasare de concepție originală și aparatură de măsură de fabricație românească, obținîndu-se astfel însemnate economii valutare.

Sistemul de măsură, care este întrebuințat cu foarte bune rezultate la I.C.P.M.M.N.-Baia Mare, asigurînd o precizie ridicată a determinărilor experimentale, se poate folosi și la încercarea altor materiale. Cu mici modificări, el se poate adapta la toate mașinile de încercat clasice, contribuind la modernizarea acestora și facilitînd utilizarea sistemelor automate de culegere și prelucrare a datelor.

De asemenea, performanțele captoarelor realizate și ale aparaturii electronice permit studierea comportării dinamice, problemă de mare actualitate în încercările de materiale.

Primită la redacție la 26 decembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. A. AKÖZ YALÇIN, *A new Testing Technique for Evaluation Stress Freezing Materials*, Al II-lea Simpozion național de tensometrie, cu participare internațională. Vol. I, 55—76, Institutul politehnic Cluj-Napoca, 1980.

2. GH. BĂDESCU, I. MATEI, *Sistem de măsură a modulului de elasticitate și coeficientului lui Poisson*, Lucrare internă INCREST, București, N-1335/1979.

3. A. BELEȘ, C. MIHĂILESCU, S. MIHĂILESCU, *Calculul construcțiilor amplasate pe terenuri deformabile. Interacțiunea structură-fundație-teren*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1977.
4. GH. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*, Ediția XI, Edit. tehnică, București, 1980.
5. GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, *Tensometria electrică rezistivă*, Edit. tehnică, București, 1966.
6. GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, GH. RUSIU, E. DUMITRESCU, *Rezistența materialelor. Lucrări de laborator*, Ediția VI, Institutul politehnic București, 1979.
7. I. CONSTANTINESCU, *Captoare*. În : *Analiza experimentală a tensiunilor*, vol. I, 448—488, sub redacția I. MOCANU, Edit. tehnică București, 1976.
8. E.O. DOEBELIN, *Measurement Systems : Application and Design*, Mc Graw-Hill, New York, 1966.
9. H. K. P. NEUBERT, *Instrument Transducers*, Clarendon Press, Londra, 1963.
10. T. POTMA, *Strain Gauges. Theory and Application*, Philips Paperbacks, Eindhoven, 1967.
11. A. B. RENSKII, *Tenzometrirovanie stroitelnîh konstrucții i materialov*, Stroiizdat, Moscova, 1977.
12. CHR. ROHRBACH, *Handbuch für elektrisches Messen mechanischer Gröben*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1967.
13. D. M. ȘTEFĂNESCU, *Măsurarea variațiilor de presiune folosind traductoare electrotensometrice rezistive*. Rev. transp. telec., VI, 6, 335—339 (1979).
14. M. TIRON, *Prelucrarea statistică și informațională al datelor de măsurare*, Edit. tehnică, București, 1976.
15. I. D. VINOGRADOV, V. M. MAȘINISTOV, S. A. ROZENTIL, *Electronie izmeritelnie sistemî dlia controlia malih peremeșcenii*, Izdat Mașinostroenie, Moscova, 1976.
16. * * * F.E.A, *Catalog de produse*.
17. * * * I.E.M.I, *Cartea tehnică a tensometrului electronic cu șase canale, tip N-2302*.
18. * * * S. A. BUDD, *La réalisation des capteurs a jauges électriques*, NIT-12, ian. 1969.
19. * * * DILLON, INSTRON, MTS-TESTING PRODUCTS DIVISION, SCHENCK, *Documentație tehnică*.
20. * * * HOTTINGER BALDWIN MESSTECHNIK, VISHAY MICRO-MEASUREMENTS, *Cataloage și prospecte de firmă*.
21. * * * TAKEDA-RIKEN, *Low Level Digital Data Acquisition*. Application Note no. 1, febr. 1969.

RECENZII

ASUPRA FRECVENȚELOR PROPRII A MEDIULUI CONTINUU. (Bracketing of eigenfrequencies of continuos structures). Budapesta, Akadémiai Kiadó, 1980, 767 p. cu il.

Lucrările colocviului european de mecanică desfășurate la Budapesta între 21—23.02. 1979 sub patronajul Academiei de științe a Republicii Populare Ungară sînt publicate în prezenta lucrare sub redacția lui A. Boznay, profesor la Universitatea tehnică din Budapesta. Cei 59 participanți din 10 țări au prezentat 38 referate axate pe următoarele direcții :

A. Caracterizarea variațională a valorilor proprii a mediului continuu în general și a frecvențelor proprii în special.

B. Noi aplicații ale metodei clasice Ritz-Rayleigh-Poincaré în rezolvarea de valori proprii.

C. Tehnici matematice moderne aplicate problemelor de valori proprii ale mediului continuu.

D. Optimizări în legătură cu frecvențele proprii ale mediului continuu cu diferite geometrii și rezemări.

E. Metode de determinare a frecvențelor proprii într-un interval numeric dat.

Problema valorilor proprii bazată pe citul Rayleigh se referă la : determinarea frecvențelor fundamentale a plăcilor plane rectangulare anizotrope din beton armat cu diferite condiții de rezemare a marginilor, valorile frecvențelor proprii a grinzilor de diferite tipuri, condiții de stabilitate a sistemelor elastice supuse la încărcări neconservative.

De o largă dezvoltare se bucură metodele moderne de abordare a problemei valorilor proprii. Astfel, aplicarea invarianților ortogonali pentru sisteme de ecuații diferențiale ordinare liniare, transformarea afină în determinarea limitelor valorilor proprii a plăcilor elastice, metode iterative, metoda operatorilor intermediari sînt numai cîteva procedee cu rezultate concrete aplicate în probleme de valori proprii.

Pe baza proiectării optimale sînt abordate diferite elemente din alcătuirea construcțiilor : stîlpi cu lungime și rigiditate arbitrară, bare cu secțiune dreptunghiulară cu rol de stîlp și rol de tirant, plăci curbe subțiri cilindrice, în legătură cu forma și frecvența proprie de oscilație, posibilitatea fenomenului de rezonanță sub încărcări dinamice.

Determinarea valorilor limită a frecvențelor proprii de oscilații pentru diferite medii continue într-un interval numeric dat ocupă un loc de larg interes în cadrul lucrărilor colocviului : plăci plane elastice, plăci plane subțiri, corpuri inelastice etc.

Posibilitatea utilizării calculului automat în problema valorilor proprii și abordarea metodei elementului finit în cadrul aceleiași probleme sînt alte aspecte care pot fi consultate în această lucrare.

Problema determinării teoretice și experimentale a formelor proprii de oscilație a diferitelor construcții (cu multe nivele, cu schelet portant alcătuit diferit, antene, fundații de mașini, castele de apă etc.) sînt evidențiate de articole susținute la colocviu.

Bibliografia indicată de autori se referă la 422 publicații datate între 1923 și 1978 din domeniul științelor tehnice și matematice.

Colecția de articole cuprinse în această carte se adresează atît inginerilor constructori și mecanici, cît și fizicienilor și matematicienilor a căror interes se îndreaptă către aprofundarea cunoștințelor și posibilităților de investigare a mediului continuu.

Acad. *Dan Mateescu, Iuliu Dimoiu*

RECENZII

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 40, nr. 4 iulie—august 1981

SUMAR

STUDII

MIHAI POPESCU, Asupra condiţiilor adiţionale de tip Bolza utilizate în studiul transferului optimal din punctele lagrangiene . . . . . Pag. 471

I. SETEANU, M. ERHAN, Transportul aluviunilor în regim nepermanent. IV. Studiul refacerii zonei de influenţă în procesul de eroziune-depunere 497

S. VLASE, Analiza cinematică a mecanismelor plane cu articulaţii pe modele topologice 511

VASILE CÎRTOAJE, Modelarea matematică a garniturii de foraj 527

ALEXANDRU POPA, Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în calculul barelor curbe plane 543

VASILE ILLE, CORNEL BIA, IACOB BORŞ, Placa plană dreptunghiulară având două laturi adiacente încastrate, iar celelalte două libere 553

VITALIE PIETRARU, DAN STEMATIU, MIRCEA ŞELĂRESCU, Regimul subpresiunilor la centrala hidroelectrică Porţile de Fier II 563

T. OROVEANU, S. POPOVICIU, Al. D. STAN, Scurgerile de gaze prin defectele conductelor cu presiuni mari. 579

S. GĂLETUŞE, Asupra proiectării elicei eoliene de randament maxim 593

CH. VASILIU, TR. CANŢĂ, Mişcarea şi înscrierea în curbă a automobilului. . . . 607

A. PAVEL, L. RIZEA, C. MATEESCU, M. CULIN, N. GRIGORE, Acordarea electrorezistivă a tiranţilor rezervoarelor sferice. 619

RECENZII. 629

ASUPRA CONDIȚIILOR ADIȚIONALE DE TIP BOLZA UTILIZATE ÎN STUDIUL TRANSFERULUI OPTIMAL DIN PUNCTELE LAGRANGIENE

de MIHAI POPESCU
Institutul național pentru creație științifică și tehnică, București

Pentru a analiza traiectoriile optime care asigură transferul în vid din punctele Lagrangiene, echilaterale și coliniare, trebuie verificate condițiile necesare și suficiente de extremum. Dintre acestea, condiția privind variația de ordinul doi a funcționalei de-a lungul extremalei generează o problemă adițională de optimizare. Determinarea clasei de mulțimi a variațiilor care induc satisfacerea condiției necesare de extremum precum și a condițiilor suficiente constituie obiectul acestei lucrări, care formulează problema transferului din punctele Lagrangiene ale sistemului Pământ—Lună cu viteză finală maximă.

1. INTRODUCERE

În studiile elaborate anterior ne-am ocupat de o clasă largă de probleme privind atingerea punctelor Lagrangiene, coliniare și echilaterale ale sistemului Pământ—Lună în condițiile în care se urmărea optimizarea unor indici de performanță. În acest sens s-au determinat legile de optimum care guvernează mișcarea comandată a unui vehicul spațial astfel încît transferul de pe orbite ale Pământului sau Lunii în punctele Lagrangiene să se facă cu consum minim de combustibil, ceea ce implică rezolvarea unor probleme de tip Lagrange cu extremități fixe [1], [2].

În studiul mișcării din punctele Lagrangiene pe orbite ale Pământului sau Lunii s-a formulat o problemă care vizează transferul la distanță maximă, din punctele Lagrangiene coliniare, în cazul simplificat cînd se maximizează doar o componentă a distanței, ceea ce revine la rezolvarea unei probleme de tip Mayer cu extremități libere [3].

De asemenea, într-o lucrare anterioară [5] s-a rezolvat cu ajutorul analizei funcționale una dintre problemele cele mai actuale vizînd transferul în timp optimal din punctele Lagrangiene ale sistemului Pământ—Lună. Utilizarea analizei funcționale permite o tratare simplificată evitînd neliniaritățile care se obțin prin tratarea cu ajutorul calculului variațional.

Determinarea traiectoriilor optimale, problemă de primă importanță în dinamica spațială, a impus metode riguroase de verificare a satisfacerii condițiilor de extremum pentru funcționalele corespunzătoare cerințelor de optimalitate.

Abordarea cu ajutorul calculului variațional presupune un studiu aprofundat al naturii extremului. De aceea, condițiile lui Clebsch și Weier-

strass care rezidă din studiul variației de ordinul întîi a unei funcționale sînt insuficiente pentru elaborarea unei analize complete privind natura extremului. Avînd în vedere aceasta, lucrarea de față și-a propus să prezinte o metodă care să stabilească semnul variației de ordinul doi a funcționalei.

Pe linia cercetărilor întreprinse de autor rezumate anterior, determinarea semnului variației de ordinul doi a funcționalei se referă la o problemă de stabilire a direcției și implicit a traiectoriei optimale care asigură transferul din punctele Lagrangiene ale sistemului Pămînt—Lună cu viteză finală maximă într-un timp dat.

2. TEORIA GENERALĂ

PROBLEME VARIAȚIONALE DE TIP BOLZA

Se consideră sistemul comandat prezentat prin ecuațiile de stare

$$\dot{x}_i = f_i(x_1 \ldots x_i,\ u_1 \ldots u_m,\ t),\quad i = 1 \ldots n, \tag{1}$$

unde $x_1(t) \ldots x_n(t)$ sînt variabile de stare, iar $u_1(t) \ldots u_m(t)$ variabilele de comandă definite pe intervalul de timp.
Problema de tip Bolza este să determinăm parametrii de comandă astfel încît să se realizeze minimul sau maximul unei funcționale, numită indice de performanță, care în cazul cel mai general poate fi de forma

$$J = G\,(x(t_1),\ u(t_1),\ t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t),\ u(t),\ t)\mathrm{d}t, \tag{2}$$

unde

$$x = (x_1 \ldots x_n),\quad u = (u_1 \ldots u_m), \tag{3}$$

astfel încît să fie satisfăcute în orice moment următoarele ecuații

$$\Phi_i = \begin{cases} \dot{x}_i - f_i\,(x,u,\ t) = 0, & i = 1,..n, \\ h_j(x,\ u,\ t) = 0, & j = 1,...p < m \end{cases} \tag{4}$$

și următoarele condiții la capete

$$\Psi_p = \begin{cases} g_k^0(x(t_0),\ t_0) = 0, & k = 1_1 \ldots r_0, \\ g_l^1(x(t_1),\ t_1) = 0, & l = 1_1 \ldots r_1. \end{cases} \tag{5}$$

Funcțiile G, f_0, f_i și h_j sînt funcții continui în raport cu toate argumentele și avînd derivatele parțiale de un ordin suficient de mare pe o mulțime deschisă.

Varietățile S_0 de dimensiune $n - r_0$ și S_1 de dimensiune $h - r_1$ definite de ecuațiile (5) se presupun netede.

Problema lui Mayer este o problemă de tip Bolza pentru care $f_0(x, u, t) \equiv 0$, iar problema lui Lagrange o problemă de tip Bolza pentru care $G(x, u, t)\big|_{t_0}^{t_1} = 0$.

În cele de urmează vor fi tratate probleme de tip Bolza care generalizează probleme de optimalitate.

Introducînd variabilele suplimentare x_{n+1}, u_{m+1} definite,

$$\dot{x}_{n+1} = u_{m+1} = f_{n+1}, \tag{6}$$

$$h_{p+1} = x_{n+1} - G(x, u, t) = 0,$$

problema de tip Bolza se reduce la următoarea problemă de tip Lagrange:

Să se determine funcţia de comandă u care extremează funcţionala

$$J(\hat{x}(t), t) = \int_{t_0}^{t_1} F(\hat{x}, \hat{u}, t, \hat{\mu})\, \mathrm{d}t, \tag{7}$$

unde

$$F = u_{m+1} + f_0 + \sum_{j=1}^{p+1} \mu_j h_j, \tag{8}$$

$$\hat{x} = (x, x_{n+1}) \quad \hat{\mu} = (\mu, \mu_{p+1}) = (\mu_1, \ldots \mu_p, \mu_{+p1})$$

şi care satisfac în orice moment ecuaţiile

$$\dot{x}_i - f_i(x, \hat{u}, t) = 0, \qquad i = 1, \ldots n + 1, \tag{9}$$

$$h_j(\hat{x}, \hat{u}, t) = 0, \qquad j = 1, \ldots p + 1$$

şi condiţiile (5).

Din anularea variaţiei de ordinul întîi a funcţionalei (7) se deduc ecuaţiile Euler-Lagrange care pot fi scrise

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots m,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots n, \tag{10}$$

unde

$$F = f_0 + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - f_i). \tag{11}$$

CONDIȚIA DE TRANSVERSALITATE

Cînd capătul inițial al extremalei variază în cadrul condițiilor (5), schimbarea în J trebuie să fie zero. Aceeași concluzie se impune cînd capătul final variază. Deci se poate scrie

$$\mathrm{d}J(\hat{x}(t),\ t)|_{t=t_s} = 0, \qquad s = 0,1. \tag{12}$$

Ținînd seama că pe extremală $h_j = 0 (j = 1, \ldots p)$, condiția (12) devine

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\mathrm{d}x_i + \left(F - \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)\mathrm{d}t\Bigg]_0^1 + \mathrm{d}G + c_p\,\mathrm{d}\Psi_p = 0, \tag{13}$$

unde pentru fiecare alegere a lui $\mathrm{d}t_0$, $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}t_1$, $\mathrm{d}x_{i1}$, c_p formează o mulțime de constante necunoscute.

Relația (13) reprezintă condiția de transversalitate.

VARIAȚIA DE ORDINUL DOI A FUNCȚIONALEI

Considerăm familia de curbe avînd extremitățile fixe

$$\Gamma = \{\tilde{x}_i(t) = x_i(t) + \delta x_i(t) / \delta x_i(t_0) = \delta x_i(t_1) = 0\}. \tag{14}$$

Dezvoltînd în serie Taylor funcția F, expresia variației de ordinul doi a funcționalei este

$$\delta^2 J = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t} - \dot{\tilde{x}}_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\xi^2 + 2\frac{\partial F}{\partial x_i}\xi(\dot{\tilde{x}}_i \xi + \eta_i)\right]_0^1 +$$

$$+ 2Q + c_p\, 2Q_p + \int_{t_0}^{t} 2\Omega \mathrm{d}t, \tag{15}$$

în care

$$2Q = \frac{\partial^2 G}{\partial t_0^2}\xi_0^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\xi_1^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_{i0}\partial x_{k0}}(\dot{x}_{i0}\xi_0 + \eta_{i0})(\dot{x}_{k_0}\xi_0 + \eta_{k0}) +$$

$$+ \frac{\partial^2 G}{\partial x_{i1}\partial x_{k1}}(\dot{x}_{i1}\xi_1 + \eta_{i1})(\dot{x}_{k1}\xi_1 + \eta_{k1}) + \frac{2\partial^2 G}{\partial t_0 \partial x_{i0}}\xi_0(\dot{x}_{i0}\xi_0 + \eta_{i0}) +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 G}{\partial t_0 \partial t_1}\xi_0\xi_1 + 2\frac{\partial^2 G}{\partial t_0 \partial x_{i1}}\xi_0(\dot{x}_{i1}x_1 + \eta_{i1}) + 2\frac{\partial^2 G}{\partial x_{i0}\partial t_1}\xi_1(\dot{x}_{i0}\xi_0 + \eta_{i_0}) +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 G}{\partial x_{i0}\partial x_{k1}}(\dot{x}_{i0} + \eta_{i0})(\dot{x}_{k1}\xi_1 + \eta_{k1}) + 2\frac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial x_{i1}}\xi_1(\dot{x}_{i1}\xi_1 + \eta_{i1}), \tag{16}$$

iar 2 Q_p este o expresie similară în Ψ_p, și

$$2\Omega = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}\eta_i\eta_k + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial \dot{x}_k}\eta_i\,\dot{\eta}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_k. \tag{17}$$

Variația de ordinul doi a funcționalei joacă un rol fundamental la deducerea condițiilor suficiente de extremum slab, de aceea este esențial să stabilim semnul acestei variații de-a lungul extremalei. În acest scop se folosește condiția lui Legendre care se formulează astfel:

CONDIȚIA LUI LEGENDRE

Dacă curba $x(t) \in C^1$ realizează maximul lui J, atunci pentru orice funcție $\beta(t)$, cu proprietatea $\beta(t_0) = \beta(t_1) = 0$ din clasa C^1 avem îndeplinită relația

$$\delta^2 J \leqslant 0. \tag{18}$$

Demonstrația acestei proprietăți este imediată.

Într-adevăr, să presupunem prin absurd că pentru o anumită funcție $\beta(t)$ am avea $\delta^2 J > 0$ și să considerăm familia de funcții

$$\Gamma_1 = \{x(t) + u\beta(t)\}, \tag{19}$$

atunci

$$J(x(t) + u\beta(t)) - J(x(t)) = u\delta J + u^2\,\delta^2 J + \varepsilon, \tag{20}$$

unde δJ și $\delta^2 J$ sînt variațiile de ordinul întîi, respectiv doi ale funcționalei J, iar ε tinde la zero odată cu u. Întrucît prin ipoteză curba $x = (x(t)$ realizează un maxim, rezultă că $\delta J = 0$ și prin urmare pentru valori suficient de mici ale lui u avem

$$\operatorname{sign}[J(x(t) + u\beta(t)) - J(x(t))] = \operatorname{sign}\delta^2 J, \tag{21}$$

de unde rezultă

$$J(x(t) + u\beta(t)) - J(x(t)) > 0, \tag{22}$$

ceea ce contrazice condiția de maxim.

PROBLEMA ADIȚIONALĂ

Variația de ordinul doi a funcționalei este negativă sau zero pentru fiecare mulțime admisibilă de variații, satisfăcînd pe extremală ecuațiile

în variații

$$\Phi_j = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}\eta_i + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \dot{x}_i}\dot{\eta}_i = 0, \tag{23}$$

$$\Psi_p = \left\{\frac{\partial \psi_p}{\partial t_0} + \dot{x}_{i0}\frac{\partial \psi_p}{\partial x_{i0}}\right\}\xi_0 + \frac{\partial \psi_p}{\partial x_{i0}}\eta_i(t_0) + \left\{\frac{\partial \psi_p}{\partial t_1} + \dot{x}_{i1}\frac{\partial \psi_p}{\partial x_{i1}}\right\}\xi_1 +$$

$$+ \frac{\partial \psi_p}{\partial x_{i1}}\eta_i(t_1) = 0.$$

Întrucît variația de ordinul doi $\delta^2 J$ trebuie să fie negativă pentru toate mulțimile admisibile de variații ξ_0, ξ_1 $\eta_i(t)$ este necesar să formulăm o problemă adițională de maximum. Această problemă adițională este de a determina acea mulțime a variațiilor ξ_0, ξ_1, $\eta_i(t)$ satisfăcînd ecuațiile (23) care maximizează variația a doua $\delta^2 J$.

Se observă că putem scrie

$$\delta^2 J(\xi,\eta) = 2\gamma[\xi_0, \eta(t_0), \xi_1, \eta(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega\,(t,\eta,\dot{\eta},)\mathrm{d}t. \tag{24}$$

Maximizarea lui $\delta^2 J$ este o problemă de tip Bolza.

Funcția fundamentală pentru problema auxiliară este dată de

$$\bar{\Omega}(t,\ \eta,\ \dot{\eta},\ l) = \Omega + l_j \Phi_j \tag{25}$$

unde $l_j(t)$ formează o mulțime de multiplicatori nedeterminați. Ecuațiile diferențiale pentru problema adițională corespunzătoare ecuațiilor Euler—Lagrange enunțate anterior sînt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \dot{\eta}_i}\right) = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \eta_i}. \tag{26}$$

Condițiile de transversalitate pentru problema adițională devin

$$\left[\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \dot{\eta}_i}\,\mathrm{d}\eta_i\right]_0^1 + \mathrm{d}\gamma + \varepsilon_p\,\mathrm{d}\psi_p = 0. \tag{27}$$

S-a prezentat pe scurt teoria care va fi utilizată în dezvoltările impuse de studiul variației de ordinul doi pentru traiectoria optimală analizată.

3. FORMULAREA PROBLEMEI

CONSIDERAȚII PRIVIND DEDUCEREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

Problema determinării mișcării unui corp infinitezimal (corp a cărui masă este neglijabilă comparativ cu centrul sau centrele de atracție) în cîmpul a două corpuri de mase finite este cunoscută ca problema restrînsă a celor trei corpuri.

Considerăm vehiculul spațial ca fiind corpul de masă infinitezimală ce se deplasează în cîmpul generat de cele două planete care evoluează pe o orbită circulară. Se presupune că orbitele corpurilor de masă finită se află în același plan trecînd prin centrul maselor.

Pentru a analiza mișcarea masei infinitezimale care se deplasează în cîmpul maselor finite m_1 (masa Pămîntului), m_2 (masa Lunii) se introduce un sistem de coordonate carteziene Gxy care se rotește cu masele finite și care are originea în centrul maselor comune G. Sistemul de unități adoptat este : unitatea de lungime este distanța dintre m_1m_2, unitatea de masă este m_1 și unitatea de timp este aleasă astfel încît parametrul gravitațional al corpului de masă m_1 să fie egal cu 1.

Ecuațiile mișcării masei infinitezimale sînt

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \tag{28}$$

unde

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x-r_1)^2+y^2}} + \frac{m^*}{\sqrt{(x+r_2)^2+y^2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{m^*}{1+m^*} + \omega^2(x^2+y^2)\right], \tag{29}$$

în care r_1, r_2 reprezintă distanța de la centrul maselor G la Pămînt, respectiv Lună, ω — viteza unghiulară de rotație în jurul lui G, iar $m^* = m_2/m_1$.

S-a demonstrat că în planul mișcării punctului de masă infinitezimală aflat sub influența atracției corpurilor de masă finită există cinci puncte de echilibru dintre care trei coliniare cu masele finite, celelalte două fiind situate în puncte simetrice față de axa comună a centrelor maselor finite și care formează triunghiuri echilaterale cu centrele de masă finită.

Coordonatele punctelor Lagrangiene se determină din condiția

$$\nabla\Phi = 0. \tag{30}$$

Dezvoltînd în serie Taylor în jurul coordonatelor punctelor Lagrangiene și reținînd doar termenii liniari, ecuațiile de stare ale unui vehicul spațial

care este acţionat de forţă de propulsie de mică tracţiune pot fi scrise sub forma

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = K_1 x_1 + K_3 x_3 + 2\omega x_4 + f\cos\theta,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4, \tag{30'}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = K_3 x_1 - 2\omega x_2 + K_2 x_3 + f\sin\theta,$$

unde x_{2k-1}, $x_{2k}(k = 1,2)$ reprezintă coordonatele vehiculului spaţial respectiv, vitezele acestora, iar $(f\cos\theta, f\sin\theta)$ sînt componentele acceleraţiei forţei de propulsie în sistemul rotitor cu originea în punctele Lagrangiene.

Pentru cazul punctelor Lagrangiene echilaterale din sistemul Pămînt—Lună în urma dezvoltării calculelor, constantele $K_i(i = 1, 2, 3)$ sînt date de

$$K_1 = \frac{3}{4}(1 + m^*),$$

$$K_2 = \frac{9}{4}(1 + m^*), \tag{31}$$

$$k_3 = \mp\frac{3}{4}\sqrt{3}\,(1 - m^*).$$

Analog, se găseşte pentru punctele coliniare

$$K_1 = 1 + m^* + \frac{2}{r^3} + \frac{2m^*}{\rho^3}, \tag{32}$$

$$K_2 = 1 + m^* - \frac{1}{r^3} - \frac{m^*}{\rho^3},$$

$$K_3 = 0,$$

unde r, ρ reprezintă distanţa de la punctul Lagrangian la Pămînt, respectiv la Lună.

PROBLEMA DE OPTIMUM DE TIP MAYER

Considerăm varietăţile

$$S_0 = \{x/x_i - x_i^0 = 0, \quad i = 1,\ldots 4\} = \{x^0\}, \tag{33}$$
$$S_1 = \{x/x_i - x_i^1 = 0, \quad i = 1,\ldots 4\} = \{x^1\},$$

unde S_0 coincide cu punctele Lagrangiene.

Ne propunem să determinăm funcţiile de comandă, prin urmare traiectoria optimală urmată de un vehicul spaţial astfel încît transferul din punctele Lagrangiene ale sistemului Pămînt—Lună într-un timp dat să inducă o viteză finală maximă.

Cazul tratat de noi implică faptul că varietăţile S_0, S_1 sînt de dimensiune zero, respectiv 4, iar condiţiile la capete (5) devin:

$$\Psi_p \equiv \begin{cases} \psi_1 = x_1^0 = 0, \\ \psi_2 = x_2^0 = 0, \\ \psi_3 = x_3^0 = 0, \\ \psi_4 = x_4^0 = 0, \\ \psi_5 = t_0 = 0, \\ \psi_6 = t_1 - T = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Indicele de performanţă care trebuie maximizat este dat de

$$G(x_2(t_1),\ x_4(t_1)) = \sqrt{(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2} = V_1. \tag{35}$$

În cele ce urmează vom trata cele două cazuri corespunzătoare punctelor Lagrangiene echilaterale, respectiv coliniare, ale sistemului Pămînt—Lună.

4. TRANSFERUL DIN PUNCTELE LAGRANGIENE ECHILATERALE

INTEGRAREA ECUAŢIILOR EULER-LAGRANGE

Rezolvarea problemei de optimum formulată mai sus pentru punctele Lagrangiene echilaterale implică determinarea parametrilor de comandă care maximizează expresia (35) astfel încît să fie satisfăcute ecuaţiile (9)

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \ddot{x}_1 - x_2 = 0, \\ \Phi_2 &= \ddot{x}_2 - K_1 x_1 - K_3 x_3 - 2\omega x_4 - f\cos\theta = 0, \\ \Phi_3 &= \ddot{x}_3 - x_4 = 0, \\ \Phi_4 &= \ddot{x}_4 - K_3 x_1 + 2\omega x_2 - K_2 x_3 - f\sin\theta = 0, \\ \lambda_2 f\sin\theta &- \lambda_4 f\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

şi condiţiile la capete (34).

Expresia (11) devine

$$F = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \Phi_i, \tag{37}$$

astfel încît ecuaţiile Euler-Lagrange pot fi scrise

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -K_1\lambda_2 - K_3\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 + 2\omega\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_3 &= -K_3\lambda_2 - K_2\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_4 &= -2\omega\lambda_2 - \lambda_3 \end{aligned} \tag{38}$$

sau, scris sub forma matriceală,

$$\dot{\bar{\lambda}} = L\bar{\lambda}. \tag{39}$$

Un sistem fundamental de soluţii pentru (39) se obţine căutînd soluţii de forma

$$\lambda_i = A_i\, e^{st}, \qquad i = 1, \ldots 4. \tag{40}$$

Înlocuind în sistemul (38) se obţine un sistem liniar şi omogen în raport cu necunoscutele A_i, iar condiţia ca acest sistem să aibă soluţii nu toate nule, conduce la ecuaţia algebrică

$$\Delta = |L - sE| = 0, \tag{41}$$

E fiind matricea unitate.

Se găseşte

$$s^4 + (4\omega^2 - K_2 - K_1)s^2 + K_1K_2 - K_3^2 = 0, \tag{42}$$

cu soluţiile

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \pm ia, \\ s_{3,4} &= \pm ib, \end{aligned} \tag{43}$$

a, b avînd expresiile

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 + \sqrt{(4\omega^2 - K_1 - K_2)^2 - 4(K_1K_2 - K_3^2)}}{2}}, \\ b &= \sqrt{\frac{K + K_2 - 4\omega^2 - \sqrt{(4\omega^2 - K_1 - K_2)^2 - 4(K_1K_2 - K_3^2)}}{2}}. \end{aligned} \tag{44}$$

Rădăcinilor distincte ale ecuațiilor (39) le corespund patru vectori proprii coloană $\overline{V}_i$ și patru soluții particulare de forma (40) ce constituie un sistem fundamental de soluții în domeniul $|t| < +\infty$ $|\lambda_i| < +\infty$ $(i = 1,\ldots 4)$ cu ajutorul cărora soluția generală a sistemului de ecuații (40) se scrie imediat.

Expresiile vectorilor proprii sînt date de

$$\overline{V}_i = (L_{kj})_{s=s_i}, \quad i,\ k,\ j = 1,\ldots 4, \tag{45}$$

unde L_{kj} sînt complementii algebrici ai liniei k a determinantului $\Delta(s_i)$. Dacă notăm cu $\lambda_i^p (i = 1,\ldots 4)$ soluțiile particulare obținute din (40), un sistem fundamental de soluții poate fi luat

$$\overline{\lambda}_1^p = \frac{\lambda_1^p + \lambda_2^p}{2}, \overline{\lambda}_2^p = \frac{\lambda_1^p - \lambda_2^p}{2i}, \lambda_3^p = \frac{\lambda_3^p + \lambda_4^p}{2}, \lambda_4^p = \frac{\lambda_3^p - \lambda_4^p}{2i}. \tag{46}$$

Soluția generală scrisă cu ajutorul sistemului fundamental de soluții (46) va fi

$$\overline{\lambda} = \sum_{i=1}^{4} C_i\ \overline{\lambda}_i^p, \tag{47}$$

unde $\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda}_i^p$ sînt vectori coloană, iar $C_i (i = 1,\ldots 4)$ sînt constante arbitrare. Din relația (47) și pe baza dezvoltării calculelor se obțin soluțiile pentru sistemul (39):

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= C_1[-a(4\omega^2 - K_2 - a^2)\sin at - 2\omega K_3 \cos at] + \\
&+ C_2[a(4\omega^2 - K_2 - a^2)\cos at - 2\omega K_3 \sin at] + \\
&+ C_3[-b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\sin bt - 2\omega K_3 \cos bt] + \\
&+ C_4[b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\cos bt - 2\omega K_3 \sin bt], \\
\lambda_2(t) &= C_1(a^2 + K_2)\cos at + C_2(a^2 + K_2)\sin at + C_3(b^2 + K_2)\cos bt + \\
&+ C_4(b^2 + K_2)\sin bt, \\
\lambda_3(t) &= C_1(-K_3 a \sin at - 2\omega K_2 \cos at) + C_2(K_3 a \cos at - 2\omega K_2 \sin at) + \\
&+ C_3(-K_3 b \sin bt - 2\omega K_2 \cos bt) + C_4(K_3 b \cos bt - 2\omega K_2 \sin bt), \\
\lambda_4(t) &= C_1(-2\omega a \sin at - K_3 \cos at) + C_2(2\omega a \cos at - K_3 \sin at) + \\
&+ C_3(-2\omega b \sin bt - K_3 \cos bt) + C_4(2\omega b \cos bt - K_3 \sin bt).
\end{aligned} \tag{48}$$

CONDIȚIA DE TRASVERSALITATE

Ținînd seama de expresia (35) a indicelui de performanță precum și de (34), condiția de transversalitate (13) devine

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\Big|_{t=t_k}=0, \qquad k=1,1. \tag{49}$$

Explicitînd (49), se obține

$$\left[\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\,dx_i+\left(\frac{x_2}{V}\,\mathrm{d}x_2+\frac{x_4}{V}\,\mathrm{d}x_4\right)\right]_{t=t_1}=0, \tag{50}$$

ceea ce implică

$$(\lambda_1)_1=0,\ (\lambda_3)_1=0\ ,\ (\lambda_2)_1=-\frac{x_2}{V}\Big|_{t=t_1},\ (\lambda_4)_1=-\frac{x_4}{V}\Big|_{t=t_1}. \tag{51}$$

Rezolvarea sistemului algebric (51) utilizînd expresiile multiplicatorilor $\lambda_i(i=1,\ldots 4)$ date de (48), se obțin constantele $C_i(i=1,\ldots 4)$

$$C_i=\frac{\Delta_i^1}{\Delta_1}, \tag{52}$$

unde Δ_1 este determinantul principal al sistemului (51), Δ_i^1 fiind obținut din Δ_1 prin înlocuirea coloanei lui C_i cu termenii din dreapta ai lui (51). Condiția de compatibilitate a lui (51) este

$$\Delta_1\neq 0. \tag{53}$$

VARIAȚIA DE ORDINUL DOI A FUNCȚIONALEI

Explicitînd primul grup de ecuații (23) care sînt satisfăcute de-a lungul extremalei, avem :

$$\begin{aligned}
\Phi_1&=\frac{\partial\Phi_1}{\partial\dot{x}_1}\dot{\eta}_1+\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2}\eta_2=0,\\
\Phi_2&=\frac{\partial\Phi_2}{\partial\dot{x}_2}\dot{\eta}_2+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}\eta_1+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}\eta_3+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_4}\eta_4+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\eta_\theta=0,\\
\Phi_3&=\frac{\partial\Phi_3}{\partial\dot{x}_3}\dot{\eta}_3+\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_4}\eta_4=0,\\
\Phi_4&=\frac{\partial\Phi_4}{\partial\dot{x}_4}\dot{\eta}_1+\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_1}\eta_1+\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_2}\eta_2+\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_3}\eta_3+\frac{\partial\Phi_4}{\partial\theta}\eta_\theta=0.
\end{aligned} \tag{54}$$

Efectuînd calculele, (54) devine

$$\begin{aligned}
&\dot{\eta}_1 = \eta_2 = 0,\\
&\dot{\eta}_2 - K_1\eta_1 - K_3\eta_3 - 2\omega\,\eta_4 + f\sin\theta\eta_\theta = 0,\\
&\dot{\eta}_3 - \eta_4 = 0,\\
&\dot{\eta}_4 - K_3\,\eta_1 + 2\omega\eta_2 - K_2\eta_3 - f\cos\theta\eta_\theta = 0.
\end{aligned} \tag{55}$$

Ecuațiile în variații de-a lungul extremalei pentru condițiile inițiale se scriu

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \dot{x}_1^0\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1^0}\xi_0 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1^0}\,\eta_1^0 = 0,\\
\Psi_2 &= \dot{x}_2^0\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2^0}\xi_0 + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2^0}\,\eta_2^0 = 0,\\
\Psi_3 &= \dot{x}_3^0\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3^0}\xi_0 + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3^0}\,\eta_3^0 = 0,\\
\Psi_4 &= \dot{x}_4^0\frac{\partial\psi_4}{\partial x_4^0}\xi_0 + \frac{\partial\psi_4}{\partial x_4^0}\eta_4^0 = 0,\\
\Psi_5 &= \frac{\partial\psi_5}{\partial t_0}\xi_0 = 0,\quad \Psi_6 = \frac{\partial\psi_6}{\partial t_1}\,\xi_1 = 0.
\end{aligned} \tag{56}$$

Din (56) rezultă

$$\xi_0 = \xi_1 = 0,\ \eta_1^0 = \eta_2^0 = \eta_3^0 = \eta_4^0 = 0. \tag{57}$$

Sistemul (55) poate fi scris

$$\dot{\eta}_i - \sum_{j=1}^{4}\alpha_{ij}\,\eta_j = f_\theta^k,\quad i = 1,\ldots 4\,;\ k = 1,\ 2, \tag{58}$$

unde am notat

$$f_\theta^1 = f\sin\,\theta\,\eta_\theta,\ f_\theta^2 = -f\cos\,\theta\,\eta_\theta. \tag{58'}$$

Soluția sistemului (58) se scrie sub forma

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^{4}R_{ij}(t)\eta_j(0) + \sum_{j=1}^{4}\int_0^t K_{ij}(t,\tau)f_\theta^j(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad (j = 1,\ldots 4), \tag{59}$$

unde $R_{ij}(t)$ este matricea soluției fundamentale normale în $t_0 = 0$ a sistemului (58) la $f_\theta^j = 0$, $(j = 1,\ldots 4)$.

Rezultă

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij}. \tag{60}$$

De asemenea, am notat

$$K_{ij}(t,\tau) = \sum_{m=1}^{4} R_{im}(t)\, R_{mj}^{-1}(\tau), \tag{61}$$

R_{mj}^{-1} fiind elementele matricei fundamentale inverse.

Fie $\bar{\eta}_{li}(i = 1,\ldots,4)$ soluția sistemului (58) la $\eta_i(t \equiv 0$.

Avem

$$\bar{\eta}_{li} = \sum_{j=1}^{4} \bar{c}_j\, \bar{\eta}_{lj}^{i}(t), \tag{62}$$

unde $\eta_{lj}^{i}(t)$ sînt funcții de timp, iar $\bar{c}_j$ sînt constante arbitrare a căror valoare este dată în anexă.

Ținînd seama de (62) termenii matricei soluției fundamentale a sistemului omogen pot fi scriși sub forma

$$R_{1j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij}\bar{\eta}_{lj}^{1}(t);\quad R_{2j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij}\,\bar{\eta}_{lj}^{2}(t);\quad R_{3j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij}\,\bar{\eta}_{lj}^{3}(t)\quad R_{4j} = \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\,\bar{\eta}_{lj}^{4}(t).$$

Din (59) rezultă dezvoltînd

$$\eta_1(t) = \int_0^t [R_{12}(t-\tau)f_\theta^1(\tau) + R_{14}(t-\tau)f_\theta^2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^{4} R_{1j}(t)\eta_j(0), \tag{63}$$

$$\eta_2(t) = \int_0^t [R_{22}(t-\tau)f_\theta^1(\tau) + R_{24}(t-\tau)f_\theta^2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^{4} R_{2j}(t)\eta_j(0),$$

$$\eta_3(t) = \int_0^t [R_{32}(t-\tau)f_\theta^1(\tau) + R_{34}(t-\tau)f_\theta^2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^{4} R_{1j}(t)\eta_j(0), \tag{64}$$

$$\eta_4(t) = \int_0^t [R_{42}(t-\tau)f_\theta^1(\tau) + R_{44}(t-\tau)f_\theta^2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^{4} R_{4j}(t)\eta_j(0)$$

sau înlocuind f_0^k cu valorile date de (58) și ținînd seama de (57)

$$\eta_1(t) = f\int_0^t [-R_{12}(t-\tau)\sin\theta(\tau) + R_{14}(t-\tau)\cos\theta(\tau)]\,\eta_\theta(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\eta_2(t) = f\int_0^t [-R_{22}(t-\tau)\sin\theta(\tau) + R_{24}(t-\tau)\cos\theta(\tau)]\eta_\theta(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\eta_3(t) = f\int_0^t [-R_{32}(t-\tau)\sin\theta(\tau) + R_{34}(t-\tau)\cos\theta(\tau)]\,\eta_\theta(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{65}$$

$$\eta_4(t) = f\int_0^t [-R_{42}(t-\tau)\sin\theta(\tau) + R_{44}(t-\tau)\cos\theta(\tau)]\eta_\theta(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Expresia (16) devine

$$2Q = \frac{\partial^2 G}{\partial x_{i1}\,\partial x_{k1}}\,\eta_{i1}\,\eta_{k_1} = \frac{\partial^2 G}{\partial (x_2^1)^2}\,\eta_{l2}^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial (x_4^1)^2}\,\eta_4^2 + 2\,\frac{\partial^2 G}{\partial (x_2^1)\,\partial (x_4^1)}\,\eta_2\eta_4 \tag{66}$$

sau, efectuînd calculele,

$$2Q = -\frac{(x_4^1)^2}{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^{3/2}}\,\eta_{l2}^2 - \frac{2x_2^1 x_4^1}{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^{3/2}}\,\eta_{l2}\eta_{l4} - \\ - \frac{(x_2^1)^2}{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^{3/2}}\,\eta_{l4}^2. \tag{67}$$

Întrucît

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_i\,\partial \dot{x}_k} = 0, \tag{68}$$

avem

$$2\Omega = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = f\,\lambda_2(\cos\theta + \frac{\lambda_4}{\lambda_2}\sin\theta) \tag{69}$$

sau, utilizînd ultima relaţie (36), se obţine

$$2\Omega = f\,\lambda_2 \sec\theta\,\eta_\theta^2\,. \tag{70}$$

Variaţia de ordinul doi a funcţionalei poate fi scrisă

$$\delta^2 J = -\left[\frac{x_4^1}{\sqrt{(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2}}\,\eta_{l2}^1 + \frac{x_2^1}{\sqrt{(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2}}\,\eta_{l4}^1\right]^2 + f\sec\theta\int_0^T \lambda_2(t)\,\eta_\theta^2\,\mathrm{d}t \tag{71}$$

sau, ţinînd seama de (65), expresia variaţiei de ordinul doi a funcţionalei devine

$$\delta^2 J = \\ = -f^2\left\{\frac{x_4^1}{\sqrt{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^3}}\int_0^T [-R_{22}(t-\tau)\sin\theta(\tau) + R_{34}(t-\tau)\cos\theta(\tau)]\,\eta_\theta(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \right. \\ + \frac{x_2^1}{\sqrt{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^3}}\int_0^T [-R_{42}(t-\tau)\sin\theta(\tau) + R_{44}(t-\tau)\cos\theta(\tau)]\,\eta_\theta^{(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\Big\}^2 + \\ + f\sec\theta\int_0^T \lambda_2(t)\,\eta_\theta^2\,\mathrm{d}t. \tag{72}$$

LEGILE CONTROLULUI OPTIMAL

Determinarea legilor de variație pentru variabilele de stare, astfel încît să fie satisfăcută problema optimală care asigură transferul din punctele Lagrangiene echilaterale din sistemul Pămînt—Lună cu viteză finală maximă, revine la integrarea sistemului de ecuații

$$\dot{x}_i - \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j = u_k^*(t), \qquad i = 1,\ldots 4\,;\; k = 1,2 \tag{73}$$

unde a_{ij} sînt coeficienții constanți ai matricei ecuațiilor de mișcare (30), iar u_k^* sînt comenzile optimale obținute din condiția ca F să fie maxim în raport cu 0, relație care dă

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \leqslant 0. \tag{74}$$

Astfel, expresiile funcțiilor de comandă devin :

$$u_1^* = -\frac{\lambda_2(t)}{\sqrt{\lambda_2^2(t)+\lambda_4^2(t)}}, \quad u_2^* = -\frac{\lambda_4(t)}{\sqrt{\lambda_2^2(t)+\lambda_4^2(t)}}. \tag{75}$$

Ținînd seama de (75), utilizînd formula (59) întrucît condițiile inițiale sînt nule pentru variabilele de stare, rezultă ecuațiile parametrice ale traiectoriei, scrise sub formă integrală

$$\begin{aligned} x_1(t) &= f\int_0^t [R_{12}(t-\tau)\lambda_4(\tau) - R_{14}(t-\tau)\lambda_2(\tau)] \frac{d\tau}{\sqrt{\lambda_2^2(\tau)+\lambda_4^2(\tau)}}, \\ x_3(t) &= f\int_0^t [R_{32}(t-\tau)\lambda_4(\tau) - R_{34}(t-\tau)\lambda_2(\tau)] \frac{d\tau}{\sqrt{\lambda_2^2(\tau)+\lambda_4^2(\tau)}}. \end{aligned} \tag{76}$$

Analog, se obțin expresiile componentelor vitezelor

$$\begin{aligned} x_2(t) &= f\int_0^t [R_{22}(t-\tau)\lambda_4(\tau) - R_{24}(t-\tau)\lambda_2(\tau)] \frac{d\tau}{\sqrt{\lambda_2^2(\tau)+\lambda_4^2(\tau)}}, \\ x_4(t) &= f\int_0^t [R_{42}(t-\tau)\lambda_4(\tau) - R_{44}(t-\tau)\lambda_2(\tau)] \frac{d\tau}{\sqrt{\lambda_2^2(\tau)+\lambda_4^2(\tau)}}. \end{aligned} \tag{77}$$

Aceeași problemă de optimum tratată pentru cazul punctelor Lagrangiene coliniare impune un procedeu analog. De aceea, în cele ce urmează nu vom insista asupra detaliilor.

5. TRANSFERUL DIN PUNCTELE LAGRANGIENE COLINIARE

Ecuaţiile care guvernează mişcarea unui vehicul spaţial în jurul punctelor Lagrangiene coliniare sînt date de

$$\Phi_1 = \ddot{x}_1 - x_2 = 0\,;\quad \Phi_2 = \dot{x}_2 - K_1 x_1 - 2\omega x_4 - f\cos\theta = 0, \tag{78}$$

$$\Phi_3 = \dot{x}_3 - x_4 = 0\,;\quad \Phi_4 = \ddot{x}_4 - K_2 x_3 + 2\omega x_2 - f\sin\theta = 0.$$

Ecuaţiile lui Euler—Lagrange sînt date de

$$\dot{\lambda}_1 = -K_1\lambda_2\,;\quad \dot{\lambda}_2 = -K_2\lambda_4\,;\quad \dot{\lambda}_3 = 2\omega\lambda_4 - \lambda_1,\quad \dot{\lambda}_4 = -\lambda_3 - 2\omega\lambda_2. \tag{79}$$

Ecuaţia caracteristică a sistemului diferenţial (79) se scrie

$$s^4 + (4\omega^2 - K_1 - K_2)s^2 + K_1K_2 = 0, \tag{80}$$

cu soluţiile

$$s_1 = a\,;\quad s_2 = -a\,;\quad s_3 = ib\,;\quad s_4 = -ib, \tag{81}$$

unde

$$a = \left[\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 + \sqrt{(K_1 + K_2 - 4\omega^2)^2 - 4K_1K_2}}{2}\right]^{1/2}, \tag{82}$$

$$b = \left[\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 - \sqrt{(K_1 + K_2 - 4\omega^2)^2 - 4K_1K_2}}{2}\right]^{1/2}.$$

Utilizînd un sistem fundamental de soluţii de forma (46), soluţia generală a sistemului (79) va fi o combinaţie liniară de soluţiile sistemului fundamental. Se găseşte astfel

$$\lambda_1(t) = C_1a(4\omega^2 - K_2 + a^2)e^{at} - C_2a(4\omega^2 - K_2 + a^2)e^{-at} - C_3b(4\omega^2 -$$

$$- K_2 - b^2)\sin bt + C_3b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\cos bt, \tag{83}$$

$$\lambda_2(t) = C_1(-a^2 + K_2)e^{at} + C_2(a^2 + K_2)e^{-at} + C_3(b^2 + K_2)\cos bt +$$

$$+ C_4(b^2 + K_2)\sin bt,$$

$$\lambda_3(t) = -C_1(2\omega K_2)e^{at} - C_2(2\omega K_2)e^{-at} - C_3(2\omega K_2)\cos bt - C_4(2\omega K_2)\sin bt,$$

$$\lambda_4(t) = C_1(2\omega a)e^{at} - C_2(2\omega a)e^{-at} - C_3(2\omega b)\sin bt + C_4(2\omega b)\cos bt.$$

CONDIŢIA DE TRANSVERSALITATE

Condiţia de transversalitate (50) conduce la sistemul algebric

$$(\lambda_1)_1 = 0\,;\quad (\lambda_3)_1 = 0\,;\quad (\lambda_2)_1 = -\frac{x_2}{V}\bigg|_{t=t_1}\quad (\lambda_4)_1 = -\frac{x_4}{V}\bigg|_{t=t_1}, \tag{84}$$

cu necunoscutele $C_i (i = 1, \ldots 4)$ date de

$$C_i = \frac{\Delta_i^2}{\Delta_2}, \tag{85}$$

unde Δ_2 este determinantul principal al sistemului (83), Δ_i^2 fiind obţinut din Δ_2 prin înlocuirea coloanei lui C_i cu termenii din dreapta ai lui (84). Condiţia de compatibilitate a sistemului (84) se scrie

$$\Delta_2 \neq 0. \tag{86}$$

VARIAŢIA DE ORDINUL DOI A FUNCŢIONALEI

Mulţimea admisibilă de variaţii ξ_0, ξ_1, $\eta_i (t)$ satisfac pe extremală ecuaţiile în variaţii (23), care, în cazul punctelor Lagrangiene coliniare, devin

$$\dot{\eta}_1 - \eta_2 = 0\,; \quad \dot{\eta}_2 - K_1\eta_1 - 2\omega\eta_4 + f\sin\theta\eta_\theta = 0,$$

$$\dot{\eta}_3 - \eta_4 = 0\,; \quad \dot{\eta}_4 - K_2\eta_3 + 2\omega\eta_2 - f\cos\theta\eta_\theta = 0. \tag{87}$$

Întrucît condiţiile la capete (34) sînt invariante, ecuaţiile în variaţii de-a lungul extremelor corespunzătoare condiţiilor la limită coincid cu cele din cazul anterior analizat. Rezultă că avem satisfăcute relaţiile (57).

Sistemul (87) se scrie

$$\dot{\eta}_i - \sum_{j=1}^{4} \beta_{ij}\eta_j = f_0^k, \; i = 1, \ldots 4\,; \; k = 1, 2, \tag{88}$$

β_{ij} fiind matricea sistemului (87).

Similar cu cazul tratat anterior, se poate scrie soluţia sistemului (89)

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{ij}(t)\eta_j(0) + \sum_{j=1}^{4} \int_0^t K_{ij}(t,\tau) f_\theta^j(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad j = 1, \ldots 4, \tag{89}$$

în care $R_{ij}(t)$ este matricea soluţiei fundamentale normale în $t_0 = 0$ a sistemului (88) la $f_\theta^j = 0 (j = 1, \ldots 4)$, deci este îndeplinită condiţia

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij}. \tag{90}$$

Dacă notăm cu $\overline{\eta}_i (i = 1, \ldots 4)$ soluţia sistemului (88) la $f_\theta^k = 0$, avem

$$\overline{\eta}_i = \sum_{j=1}^{4} \bar{c}_j \eta_j^i(t), \tag{91}$$

unde η_j^i sînt funcţii corespunzătoare rezolvării sistemului omogen în cazul punctelor Lagrangiene coliniare ale căror valori sînt date în anexă.

Ţinînd seama de (91), termenii matricei soluţiei fundamentale a sistemului omogen pot fi scrişi sub forma

$$R_{ij} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij}\eta_i^k(t). \tag{92}$$

Coeficienţii c_{ij} sînt determinaţi din condiţia (90), care devine

$$\begin{aligned}
\delta_{1j} &= c_{1j}\,\eta_1^1(0) + c_{2j}\,\eta_2^1(0) + c_{3j}\,\eta_3^1(0) + c_{4j}\,\eta_4^1(0),\\
\delta_{2j} &= c_{1j}\,\eta_1^2(0) + c_{2j}\,\eta_2^2(0) + c_{3j}\,\eta_3^2(0) + c_{4j}\,\eta_4^2(0),\\
\delta_{3j} &= c_{1j}\,\eta_1^3(0) + c_{2j}\,\eta_2^3(0) + c_{3j}\,\eta_3^3(0) + c_{4j}\,\eta_4^3(0),\\
\delta_{4j} &= c_{1j}\,\eta_1^4(0) + c_{2j}\,\eta_2^4(0) + c_{3j}\,\eta_3^4(0) + c_{4j}\,\eta_4^4(0).
\end{aligned} \tag{93}$$

Rezolvînd sistemul se determină coeficienţii c_{ij} ale căror expresii sînt date în anexă.

Explicitînd formula (89), se obţin valorile variaţiilor de-a lungul extremalei pentru cazul punctelor coliniare. Se găseşte astfel, ţinînd seama de condiţiile iniţiale η_i^0 date de (57),

$$\begin{aligned}
\eta_1(t) &= f\int_0^t [R_{12}(t-\tau)\sin\theta(\tau) - R_{14}(t-\tau)\cos\theta(\tau)]\eta_\theta \mathrm{d}\tau,\\
\eta_2(t) &= f\int_0^t [R_{22}(t-\tau)\sin\theta(\tau) - R_{24}(t-\tau)\cos\theta(\tau)]\eta_\theta \mathrm{d}\tau,\\
\eta_3(t) &= f\int_0^t [R_{32}(t-\tau)\sin\theta(\tau) - R_{34}(t-\tau)\cos\theta(\tau)]\eta_\theta \mathrm{d}\tau,\\
\eta_4(t) &= f\int_0^t [R_{42}(t-\tau)\sin\theta(\tau) - R_{44}(t-\tau)\cos\theta(\tau)]\eta_\theta \mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{94}$$

Variaţia de ordinul doi a funcţionalei se calculează analog cu cazul tratat anterior, avînd aceeaşi expresie dată de

$$\begin{aligned}
\delta^2 J(\eta_\theta) = -f^2 \Bigg\{ &\frac{x_4^1}{\sqrt[4]{(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2}} \int_0^T [-R_{22}(t-\tau)\sin\theta + R_{24}(t-\tau)\cos\theta]\,\eta_\theta\,\mathrm{d}\tau +\\
&+ \frac{x_2^1}{\sqrt[4]{(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2}} \int_0^T [-R_{42}(t-\tau)\sin\theta + R_{24}(t-\tau)\cos\theta]\eta_\theta\,\mathrm{d}\tau \Bigg\}^2 +\\
&+ f\sec\theta \int_0^T \lambda_2(\tau)\,\eta_\theta^2\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{95}$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei se scriu similar. De remarcat că atît variația de ordinul doi a funcționalei, cît și ecuațiile parametrice, deși sînt exprimate de aceleași formule, pentru cazurile studiate ale punctelor Lagrangiene echilaterale și echidistante diferă esențial prin matricea soluției fundamentale.

6. PROBLEMA ADIȚIONALĂ DE TIP BOLZA

Variația de ordinul doi a funcționalei problemei optimale joacă un rol fundamental la deducerea condițiilor suficiente de extremum slab.

Potrivit condiției lui Legendre formulate anterior, trebuie să arătăm că de-a lungul extremalei, variația de ordinul doi este negativă.

Întrucît în ambele cazuri studiate variația de ordinul doi a funcționalei este dată de aceeași expresie, tratarea este similară.

Pentru demonstrarea condiției lui Legendre este suficient să fie satisfăcută relația

$$\operatorname{Max}(\delta^2 J) = 0. \tag{96}$$

Aflarea maximului pentru $\delta^2 J$ generează o problemă de optimum adițională de tip Bolza pentru funcționala

$$\delta^2 J = -\left\{ \frac{x_4^1}{\sqrt[4]{(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2}}\, \eta_2^1 + \frac{x_2^1}{\sqrt{(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2}}\, \eta_4^1 \right\}^2 + f \sec\theta \int_0^T \lambda_2(t) \eta_\theta^2 \, dt. \tag{97}$$

Vom arăta că valorile admisibile pentru variațiile $\eta_i(t)$, $\eta_\theta(t)$ care maximează funcționala (97) sînt

$$\eta_1 \equiv 0\,;\ \eta_2 = 0\,;\ \eta_3 \equiv 0,\ \eta_4 \equiv 0,\ \eta_\theta \equiv 0. \tag{98}$$

Funcția fundamentală (25) pentru problema adițională este

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} f \lambda_2(t) \eta_\theta^2 \sec\theta + \sum_{j=1}^{4} l_j \Phi_j, \tag{99}$$

unde Φ_j pentru punctele Lagrangiene echilaterale și coliniare sînt date de ecuațiile (36), respectiv (78).

Maximizarea lui $\delta^2 J$ implică satisfacerea ecuațiilor Euler—Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \dot{\eta}_i} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_i}. \tag{100}$$

Astfel, pentru cazul punctelor echilaterale, se obțin

$$\dot{l}_1 - l_2 = 0\,;\ \dot{l}_2 - K_1 l_1 - K_3 l_3 - 2\omega l_4 = 0,\ \dot{l}_3 - l_4 = 0\,;\ \dot{l}_4 - K_3 l_1 +$$

$$+ 2\omega l_2 - K_2 l_3 = 0,\ f[\lambda_2(t)\eta_\theta \sec\theta + l_2 \sin\theta - l_4 \cos\theta] = 0. \quad (101)$$

Ecuațiile Euler—Lagrange corespunzătoare punctelor coliniare se obțin din (101) făcînd $K_3 = 0$.

Întrucît ecuațiile (101) coincid cu ecuațiile Euler—Lagrange ale problemei de optimum inițiale, expresiile multiplicatorilor $l_i (i = 1, \ldots 4)$ sînt date de

$$l_i = \sum_{j=1}^{4} L_j f_i^j(t). \quad (102)$$

Din ultima ecuație (101) avem

$$\eta_\theta = \frac{l_4 \cos\theta - l_2 \sin\theta}{\lambda_2(t)\sec\theta}. \quad (101')$$

Pe extremală valoarea lui η_θ se scrie

$$\eta_\theta = \frac{l_4(t)\lambda_2(t) - l_2(t)\lambda_4(t)}{\lambda_2^2(t) + \lambda_4^2(t)}. \quad (101'')$$

Rezultă că pe extremală expresiile variațiilor $\eta_i(t)$ devin :

$$\eta_1(t) = f\int_0^t [-R_{12}(t-\tau)\,\lambda_4(\tau) + R_{14}(t-\tau)]\,\frac{l_4\lambda_2 - l_2\lambda_4}{\lambda_2^2(\tau) + \lambda_4^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\eta_2(t) = f\int_0^t [-R_{22}(t-\tau)\lambda_4(\tau) + R_{24}(t-\tau)]\,\frac{l_4\lambda_2 - l_2\lambda_4}{\lambda_2^2(\tau) + \lambda_4^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \quad (103)$$

$$\eta_3(t) = f\int_0^t [-R_{32}(t-\tau)\lambda_4(\tau) + R_{34}(t-\tau)]\,\frac{l_4\lambda_2 - l_2\lambda_4}{\lambda_2^2(\tau) + \lambda_4^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

Condiția de transversalitate (27) dezvoltată devine

$$l_1^1 \mathrm{d}\eta_1 + l_3^1 \mathrm{d}\eta_3^1 + (l_2^1 - A^2\eta_2^1 - AB)\,\mathrm{d}\eta_2^1 + (l_4^1 - B^2\eta_4^1 - AB\,\eta_2^1)\mathrm{d}\eta_4^1 = 0, \quad (104)$$

unde am notat

$$\frac{x_4^1}{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^{2/3}} = A, \qquad \frac{x_2^1}{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^{3/2}} = B. \quad (105)$$

Din (104) rezultă

$$l_1^1 = 0\,;\; l_3^1 = 0\,;\; l_2^1 = A^2\eta_{l2}^1 + AB\,\eta_{l4}^1,\; l_4^1 = B^2\eta_{l4}^1 + AB\eta_{l2}^1. \tag{106}$$

Utilizînd (102), sistemul (106) devine

$$L_1 f_1^1(t) + L_2 f_2^1(t) + L_3 f_3^1(t) + L_4 f_4^1(t) = 0,$$

$$L_1 f_1^2(t) + L_2 f_2^2(t) + L_3 f_3^2(t) + L_4 f_4^2(t) = 0,$$

$$L_1 f_1^3(t) + L_2 f_2^3(t) + L_3 f_3^3(t) + L_4 f_4^3(t) =$$

$$= \frac{(x_4^1)^2}{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^{2/3}} f\int_0^T [-R_{22}(t-\tau)\lambda_4(\tau) + R_{14}(t-\tau)] \sum_{i=1}^4 L_i(f_i^4\lambda_2 -$$

$$- f_i^2\lambda_4)\mathrm{d}\tau + \frac{x_2^1\, x_4^1}{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^{3/2}} f\int_0^T [-R_{42}(t-\tau)\lambda_4(\tau) + R_{44}(t-\tau)] \sum_{i=1}^4 L_i(f_i^4\lambda_2 -$$

$$- f_i^2\lambda_4)\mathrm{d}\tau,$$

$$L_1 f_1^4(t) + L_2 f_2^4(t) + L_3 f_3^4(t) + L_4 f_4^4(t) =$$

$$= \frac{(x_2^1)^2}{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^{3/2}} f\int_0^T [-R_{42}(t-\tau)\lambda_4 + R_{44}(t-\tau)] \sum_{i=1}^4 L_i(f_i^4\lambda_2 -$$

$$- f_i^2\lambda_4)\mathrm{d}\tau + \frac{x_2^1\, x_4^1}{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^{3/2}} f\int_0^T [-R_{22}(t-\tau)\lambda_4 + R_{14}(t-\tau)] \sum_{i=1}^4 L_i(f_i^4\lambda_2 -$$

$$- f_1^2)\lambda_4\mathrm{d}\tau, \tag{107}$$

cu notația

$$I_j = \frac{f}{[(x_2^1)^2 + (x_4^1)^2]^{3/2}} \int_0^T \frac{(f_j^4\lambda_2 - f_j^2\lambda_4)\lambda_2}{(\lambda_2^2 + \lambda_4^2)^{3/2}} [x_2^1(-R_{42}(t-\tau)\lambda_4 + R_{44}(t -$$

$$- \tau)) + x_4^1(-R_{22}(t-\tau)\lambda_4 + R_{14}(t-\tau)]\mathrm{d}\tau, \tag{108}$$

determinantul principal al sistemului (107) devine

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} - x_4^1 I_1 & a_{32} - x_4^1 I_2 & a_{33} - x_4^1 I_3 & a_{34} - x_4^1 I_4 \\ a_{41} - x_2^1 I_1 & a_{42} - x_2^1 I_2 & a_{43} - x_2^1 I_3 & a_{44} - x_2^1 I_4 \end{vmatrix}, \tag{109}$$

în care am notat cu $|a_{ij} = \Delta_k\,(i, j = 1, \ldots 4,\; k = 1,2.$

Întrucît $\Delta_k \neq 0$, rezultă $\Delta \neq 0$, deci sistemul (108) admite doar soluţia banală $L_i = 0$.

Avem aşadar

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = \eta_6 = 0, \tag{110}$$

de unde

$$\text{Max}(\delta^2 J) = 0, \tag{111}$$

ceea ce implică faptul că de-a lungul extremalei,

$$\delta^2 J < 0, \tag{112}$$

relaţia ce demonstrează condiţia lui Legendre pentru problema considerată.

CONCLUZII

Lucrarea prezentă îşi propune să prezinte o teorie unitară privind condiţiile de extremum pentru problemele de tip Mayer care pot fi formulate considerînd transferul din punctele Lagrangiene ale sistemului Pămînt—Lună. Cazul tratat, care cuprinde analiza traiectoriei optimale ce determină o viteză finală maximă, poate fi generalizat putînd include şi cazul distanţei finale maxime. Cercetările anterioare ale lui Mielle şi Lawden au tratat probleme similare dar mult simplificate.

Obiectivul lucrării este de a pune în evidenţă o metodă de verificare pentru semnul variaţiei de ordinul doi a funcţionalei care constituie condiţii necesare ce suplinesc condiţia lui Weierstrass, reprezentînd totodată condiţii suficiente de extremum slab.

Primită la redacţie la 26 ianuarie 1981

ANEXA

PUNCTELE LAGRANGIENE ECHILATERALE

$$f_j^i(t) = \eta_j^i(t),$$

$$f_1^1(t) = -a(4\omega^2 - K_2 - a^2)\sin at + 2\omega K_3 \cos at,$$

$$f_2^1(t) = a(4\omega^2 - K_2 - a^2)\cos at + 2\omega K_3 \sin at,$$

$$f_3^1(t) = -b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\sin bt + 2\omega K_3 \cos bt,$$

$$f_4^1(t) = b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\cos bt + 2\omega K_3 \sin bt,$$

$$f_1^2(t) = [-K_1(a^2 + K_2) + K^2{}_3]\cos at - 2\omega K_3 a \sin at,$$

$$f_2^2(t) = [-K_1(a^2 + K_2) + K_3^2] \sin at + 2\omega K_3 a \cos at,$$

$$f_3^2(t) = [-K_1(b^2 + K_2) + K_3^2] \cos bt - 2\omega b \sin bt,$$

$$f_4^2(t) = [-K_1(b^2 + K_2) + K_3^2] \sin bt + 2\omega K_3 b \cos bt,$$

$$f_1^3(t) = -2\omega K_1 \cos at - aK_3 \sin at,$$

$$f_2^3(t) = -2\omega K_1 \sin at - aK_3 \cos at,$$

$$f_3^3(t) = -2\omega K_1 \cos bt - bK_3 \sin bt,$$

$$f_4^3(t) = -2\omega K_1 \sin bt - bK_3 \cos bt,$$

$$f_1^4(t) = 2\omega K_1 a \sin at - a^2 K_3 \cos at,$$

$$f_2^4(t) = -2\omega K_1 a \cos at - a^2 K_3 \sin at,$$

$$f_3^4(t) = 2\omega K_1 b \sin bt - b^2 K_3 \cos bt,$$

$$f_4^4(t) = -2\omega K_1 b \cos bt - b^2 K_3 \sin bt,$$

$$c_{11} = 0\,;\quad c_{12} = \frac{4\omega^2 K_1^2 - b^2 K_3^2}{K_3^2(a^2 - b^2)[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{13} = \frac{-2\omega\{K_1[K_1(b^2 + K_2) - K_3^2] + K_3^2 b\}}{K_3^2(a^2 - b^2)\,[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{14} = \frac{4\omega^2 K_1 + [K_1(b^2 + K_2) - K_3^2]}{K_3\,(a^2 - b^2)\,[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{21} = -\frac{4\omega^2 K_1(K_1^2 + K_3^2) + K_3^2\,(K_1 K_2 - K_3^2)}{K_3^2 a(a^2 - b^2)[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{22} = \frac{2\omega[K_3^2 - K_1(4\omega^2 - K_2 - b^2)}{aK_3(a^2 - b^2)\,[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{23} = \frac{4\omega^2(K_1^2 - K_3^2) - (4\omega^2 - K_2 - b^2)\,(K_3^2 - K_1 K_2)}{K_3 a\,(a^2 - b^2)\,[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{24} = \frac{2\omega K_1[(4\omega^2 - K_2 - b^2) - K_3^2]}{K_3^2 a(a^2 - b^2)\,[K_1(b^2 + K_2) - K_3^2 - 4\omega^2 K_1]},$$

$$c_{32} = \frac{a^2K_3^2 - 4\omega^2K_1^2}{K_3^2(a^2 - b^2)\,[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{31} = 0,$$

$$c_{33} = \frac{2\omega\{a^2K_3^2 - K_1\,[\,-K_1(a^2 + K_2) + K_3^2]\}}{K_3(a^2 - b^2)\,[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{34} = \frac{-K_1(a^2 + K_2) + K_3^2 - 4\omega^2K_1}{K_3^2(a^2 - b^2)\,[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{41} = \frac{[-K_1(b^2 + K_2) + K_3^2] - 4\omega^2K_1}{b(a^2 - b^2)\{[-K_1(b^2 + K_2) + K_3^2] - 4\omega^2K_1\}},$$

$$c_{42} = \frac{2\omega[K_1(4\omega^2 - K_2 - a^2) - K_3^2]}{K_3b(a^2 - b^2)[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{43} = \frac{K_1[(a + K_2)\,(K_1K_2 - K_3^2) - 4\omega^2(K_1 + K_2)]}{bK_3^2(a^2 - b^2)[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{44} = \frac{2\omega K_1[(a^2 + K_2 - 4\omega^2) + K_3^2]}{bK_3^2(a^2 - b^2)\,[K_1(b^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]}.$$

PUNCTELE LAGRANGIENE COLINIARE

$$f_1^1(t) = a(4\omega^2 - K_2 + a^2)e^{at}; \quad f_2^1(t) = -a(4\omega^2 - K_2 + a^2)e^{-at},$$

$$f_3^1(t) = -b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\sin bt; \; f_4^1(t) = b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\cos bt,$$

$$f_1^2(t) = K_1(a^2 - K_2)\,e^{at}; \; f_2^2(t) = K_1(a^2 - K_2)e^{-at},$$

$$f_3^2(t) = -K_1(b^2 + K_2)\cos bt; \quad f_4^2(t) = -K_1(b^2 + K_2)\sin bt,$$

$$f_1^3(t) = -2\omega K_1e^{at}; \; f_2^3(t) = -2\omega K_1e^{-at},$$

$$f_3^3(t) = -2\omega K_1\cos bt; \; f_4^3(t) = -2\omega K_1\sin bt,$$

$$f_1^4(t) = -2\omega K_1ae^{at}; \; f_2^4(t) = 2\omega K_1ae^{-at},$$

$$f_3^4(t) = 2\omega K_1b\sin bt; \; f_4^4(t) = -2\omega K_1b\cos bt,$$

$$c_{11} = \frac{1}{2(4\omega^2 - K_2 + a^2)}; \quad c_{12} = \frac{1}{2K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{13} = \frac{b^2 + K_2}{4\omega K_1(4\omega^2 - K^2 + a^2)}; \qquad c_{14} = \frac{4\omega^2 - K_2 - b^2}{4\omega K_1 a(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{21} = -\frac{1}{2ab\,(4\omega^2 - K_2 + a^2)}, \qquad c_{22} = \frac{1}{2K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{23} = -\frac{b^2 + K_2}{4\omega K_1^2(4\omega^2 - K_2 + a^2)}; \qquad c_{24} = -\frac{4\omega^2 - K_2 - b^2}{4\omega K_1 a\,(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{31} = 0; \qquad c_{32} = -\frac{1}{K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{33} = -\frac{a^2 + K_2}{2K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)}; \qquad c_{41} = -\frac{1}{4\omega^2 - K_2 + a^2}$$

$$c_{42} = 0; \quad c_{43} = 0; \quad c_{44} = -\frac{1}{2K_1 b}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. M. POPESCU, *Studiul manevrelor optime ale vehiculelor spațiale în apropierea punctelor de librație din sistemul Pământ — Lună*, St. cerc. mec. apl., *5* (1979).
2. — *Asupra transferului optim al vehiculelor spațiale în punctele de librație echidistante*, St. cerc. mec. apl., *1* (1980).
3. — *La determination de l'extremum absolu de la classe des extrémales admissibles concernant le transfert des véhicules spatiaux des points colinéaires de libration du système Terre — Lune à la distance maximum*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., *2*(1980).
4. — *On the optimum controlled mouvement around the Lagrangian points on the Earth — Moon system*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., *2*(1981).
5. — *The utilization of functional analysis in the study of comanded movement regarding the optimum transference from the collinear libration points of the Earth — Moon system*, Al XXXI-lea Congres de astronautică, Tokio, 1980.

TRANSPORTUL ALUVIUNILOR ÎN REGIM NEPERMANENT. IV. STUDIUL REFACERII ZONEI DE INFLUENȚĂ ÎN PROCESUL DE EROZIUNE-DEPUNERE

de I. SETEANU, M. ERHAN

Institutul politehnic București

Se analizează procesul de transport-eroziune-depunere în curgerea staționară și uniformă, într-o albie prismatică, ținînd seamă de aportul straturilor inferioare ale patului albiei. Se elaborează un model matematic de bilanț detaliat pe fracții granulometrice pentru materialul aluvionar în pat și în curent, insistînd asupra comportării asimptotice a algoritmului propus.

Se prezintă cîteva exemple de utilizare a unui program de calcul în limbaj FORTRAN IV, elaborat de autori, indicîndu-se rezultatele numerice obținute.

1. INTRODUCERE

Modelul fizic uzual pentru transportul aluvionar, uniform și staționar în albii naturale se întemeiază pe relații globale de bilanț pentru materialul solid, iar analiza regimului nepermanent se obține prin cuplarea acestor relații cu ecuațiile fundamentale ale curgerii gradual variate a fazei lichide [1]. Observațiile experimentale au evidențiat însă tendința naturală de modificare a structurii granulometrice a materialului sedimentat în pat, cu efect invers asupra parametrilor globali de transport (procesul de „pavare"). Analiza interacțiunii între patul albiei și curent este direct legată de transformările care se petrec în primul, putîndu-se defini o adîncime de referință pînă la care efectul forțelor turbulente de antrenare a granulelor mai este sesizabil (zona de influență). Se poate vorbi de un grad variabil de penetrație în profunzime a curentului lichid, care diminuează pe măsura măririi diametrului granulei medii (reprezentative) a patului [2].

Lucrarea de față reprezintă o continuare a unui număr de studii anterioare [3], [4], [5]. Se elaborează un model detaliat de interacțiune pat-curgere, bazat pe trei relații de bilanț:

— bilanțul pe fracții granulometrice în patul albiei înainte de a se modifica adîncimea zonei de influență;

— bilanțul pe fracții granulometrice pentru faza solidă transportată în curentul lichid;

— bilanțul global al procesului de refacere a zonei de influență, în legătură cu noua structură granulometrică a patului.

Se insistă asupra schimbării în timp a compoziției granulometrice în zona de influență, în condițiile existenței unui debit solid variabil în timp în zona amonte a sectorului studiat.

ST. CERC. MEC. APL. TOM 40, NR. 4, 1981, P. 497–510

Modelul de transport-erodare-depunere propus în lucrare urmează a fi generalizat în următoarele direcţii :

— discretizarea sectorului analizat într-un ansamblu de tronsoane, pentru a se putea extinde studiul la zone cu adîncimi de influenţă şi structuri granulometrice diferite ;

— considerarea ca un proces unitar a erodării-depunerii, pentru intervale de timp de analiză predeterminate ;

— includerea în analiză a curgerii permenente gradual-variate.

2. MODELUL FIZIC

Se studiază curgerea permanentă, uniformă de debit Q, într-un sector de rîu de lungime L şi lăţime B impuse, în care există un aport de debit solid prin secţiunea amonte. Se admite că albia este deformabilă, iar ca urmare a erodării sau depunerii, prin secţiunea aval este transportat un debit solid diferit de cel care a pătruns în zonă. Dacă lungimea L este suficient de mare, se poate admite că debitul solid transportat spre aval corespunde structurii granulometrice a patului la un moment dat şi se poate obţine detaliat pe fracţii granulometrice, pentru o curgere uniformă [6], [7].

Este evident că debitul transportat spre aval poate fi considerat ca o rezultantă a debitului intrat în amonte şi a efectului de emitere în curent a granulelor din pat, respectiv a depunerii sedimentului în suspensie. Contribuţia patului depinde atît de structura granulometrică a acestuia, cît şi de adîncimea zonei pînă la care forţele hidrodinamice mai sînt suficient de mari pentru a produce antrenarea granulelor în curent. Adîncimea acestei zone („zona de influenţă") este slab dependentă de diametrul efectiv al granulelor patului şi se poate, într-o primă aproximaţie, admite constantă. Refacerea zonei de influenţă, după ce o parte din materialul aluvionar a fost antrenat în curent, respectiv după ce o parte din sedimentul în suspensie s-a depus în pat, are ca rezultat modificarea structurii granulometrice a patului şi este cauza procesului de pavare, respectiv de colmatare.

Pentru simplificare, se va admite că procesul complex de erodare-depunere şi refacere se poate descompune, pentru comoditatea analizei, în două etape :

— faza de erodare-depunere în timpul ΔT ; nivelul pînă la care se face efectul de antrenare al forţelor hidrodinamice se menţine fixat, modificîndu-se nivelul superior al zonei de influenţă. Ca urmare, structura granulometrică a patului suferă o primă transformare ;

— faza de refacere, admisă practic instantanee ; grosimea zonei de influenţă revine la valoarea anterioară, datorită contribuţiei structurilor inferioare ale patului ; structura granulometrică a patului se modifică din nou.

Pentru a putea admite valabilitatea suprapunerii celor două efecte, este necesar ca intervalul de timp ΔT să fie suficient de mic, iar analiza se reia iterativ pentru paşii de timp următori.

Pe lîngă bilanţul masic al materialului din pat în cele două etape de mai sus, se adaugă ecuaţia de continuitate a fazei solide în suspensie,

introducîndu-se explicit contribuția patului albiei. Se obține astfel mărimea duratei de timp ΔT ca o consecință a unei rate de emisie (depunere) în cuplajul curent-pat, odată cu modificarea în timp a fundului albiei mobile.

Întrucît pasul de timp ΔT rezultă din relațiile de bilanț, evoluția acestuia în procesul iterativ poate da o indicație asupra comportării asimptotice a fenomenului. Astfel, în condițiile unei tendințe de erodare admise, dacă ΔT tinde către zero sau devine negativ, rezultă că fenomenul evoluează spre depunere; dacă ΔT rămîne pozitiv și satisface condițiile de convergență indicate în continuare, patul albiei evoluează spre „pavare". În mod similar poate fi analizat și cazul colmatării.

3. MODELUL MATEMATIC

Intervalul de timp de analiză, T_0, se discretizează în pași de timp $\Delta T_n (n = 1, 2, \ldots)$, iar mărimea acestora rezultă din algoritmul de calcul, dacă parametrul de antrenare C', care va fi definit în continuare, este impus.

La momentul $T = T_n$, pe unitatea de arie a patului aluvionar, se află o cantitate de sediment $G_n (N/m^2)$. Dacă se notează cu $C_n (N/m^2)$ greutatea materialului aluvionar antrenat (depus) în curent (în pat), în intervalul de timp ΔT_n, atunci greutatea sedimentului rămas în pat, $\bar{G}_{n+1}$, în zona de influență, pe unitatea de arie, este dată, înainte de a se reface adîncimea de influență (adîncimea zonei de influență), de expresia

$$\bar{G}_{n+1} = G_n - C_n. \tag{1}$$

Mărimea C_n poate fi pozitivă (erodare globală), respectiv negativă depunere globală),

$$C_n \in (-\infty, G_n].$$

Se va admite, în conformitate cu principiul suprapunerii efectelor că, pentru intervale de timp suficient de mici, refacerea se produce practic instantaneu, în timp ce procesul de erodare-depunere ocupă tot intervalul ΔT_n.

Se introduce parametrul adimensional de antrenare, C', definit prin relația

$$C' = C_n / \bar{G}_{n+1}. \tag{2}$$

Dacă mărimea sa este aleasă, intervalul de timp ΔT_n rezultă din procesul iterativ de calcul, pentru o adîncime de influență impusă din considerente fizice.

BILANȚUL DE MATERIAL ÎN PAT ÎNAINTE DE REFACERE

— în timpul ΔT_n a plecat (a venit) material aluvionar pe unitatea de arie, C_n, din care pentru fracția i:

$$\frac{1}{2} C_n (t_n^{(i)} + t_{n+1}^{(i)}),$$

unde $t_n^{(i)}$, respectiv $t_{n+1}^{(i)}$, reprezintă ponderile în greutate ale fracţiei de diametru d_i, în curent, la momentele de timp T_n, respectiv T_{n+1}; s-a ţinut seamă de faptul că mărimea C_n se referă la intervalul ΔT_n, pe cînd ponderile $t_n^{(i)}$ şi $t_{n+1}^{(i)}$ se referă la extremităţile acestuia;

— la momentul T_{n+1}, pentru fracţia granulometrică i, greutatea materialului aluvionar pe unitatea de arie, existent în pat, este $\bar{b}_{n+1}^{(i)}\,\bar{G}_{n+1}$, unde $\bar{b}_{n+1}^{(i)}$ este ponderea în greutate a fracţiei i în pat

Relaţia de bilanţ masic se scrie:

$$b_n^{(i)}G_n - \frac{1}{2}\,C_n(t_n^{(i)} + t_{n+1}^{(i)}) = \bar{b}_{n+1}^{(i)}\bar{G}_{n+1}$$

sau, conform relaţiei (2),

$$b_n^{(i)}(1 + C') - \frac{1}{2}\,C'(t_n^{(i)} + t_{n+1}^{(i)}) = \bar{b}_{n+1}^{(i)}. \tag{3}$$

Cunoscînd ponderile granulometrice $\bar{b}_{n+1}^{(i)}$ în pat se poate determina diametrul efectiv al granulelor. În mod uzual, [6], [7], se acceptă că aceasta corespunde diametrului unei site prin care poate trece circa 65% din greutatea granulelor unei probe. Pentru acest diametru, $(\bar{D}_{65})_{n+1}$, este definită relaţia

$$\int_0^{(\bar{D}_{65})_{n+1}} \bar{b}_{n+1}\,\mathrm{d}D = 0{,}65\int_0^{\infty} \bar{b}_{n+1}\,\mathrm{d}D. \tag{4}$$

Se poate calcula, cunoscînd diametrul efectiv, porozitatea zonei de influenţă, $\bar{m}_{n+1}$, înainte de refacere [8]:

$$\bar{m}_{n+1} = 0{,}245 + 0{,}03285/(\bar{D}_{65})_{n+1}^{0{,}21}, \tag{5}$$

iar greutatea specifică a materialului zonei este:

$$(\bar{\gamma}_{sm})_{n+1} = \gamma_s(1 - \bar{m}_{n+1}), \tag{6}$$

unde γ_s este greutatea specifică a scheletului solid.

Variaţia adîncimii zonei de influenţă, Δh_n, înainte de refacere, se obţine din relaţia evidentă:

$$G_n - \bar{G}_{+n1} = (\bar{\gamma}_{sm})_{n+1}\Delta h_n \tag{7}$$

sau

$$\Delta h_n = \frac{C'G_n}{(1 + C')\,(\bar{\gamma}_{sm})_{n+1}},$$

resp ectiv

$$\Delta h_n = \frac{C'}{\gamma_s(1 + C')} \frac{G_n}{1 - \overline{m}_{n+1}} \cdot \tag{7'}$$

Dacă C' este o mărime pozitivă (negativă), Δh_n reprezintă adîncimea de erodare (depunere).

Etapa refacerii adîncimii de influenţă. Adîncimea de influenţă h_n la momentul T_n este predominant dependentă de diametrul efectiv $(D_{65})_n$ al granulelor existente în zona de influenţă, crescînd monoton cu acesta. Datorită erodării, o parte din materialul sedimentat de profunzime pătrunde în zona de influenţă, sau, în cazul depunerii, straturile inferioare devin mai slab influenţate de forţele hidrodinamice de antrenare ce se transmit prin golurile intergranulare. În absenţa unor informaţii asupra evoluţiei adîncimii de influenţă în procesul complex de transport-erodare-depunere, se va admite în continuare, într-o primă aproximaţie, că adîncimea de influenţă se menţine constantă :

$$h_{n+1} = h_n. \tag{8}$$

Înainte de refacere, la momentul de timp T_{n+1}, adîncimea de influenţă, $\bar{h}_{n+1}$, este :

$$\bar{h}_{n+1} = h_n - \Delta h_n, \tag{9}$$

unde Δh_n este adincimea de eroare (depunere) ; după refacere, adîncimea de influenţă, h_{n+1}, devine :

$$h_{n+1} = \bar{h}_{n+1} + \delta h_n, \tag{10}$$

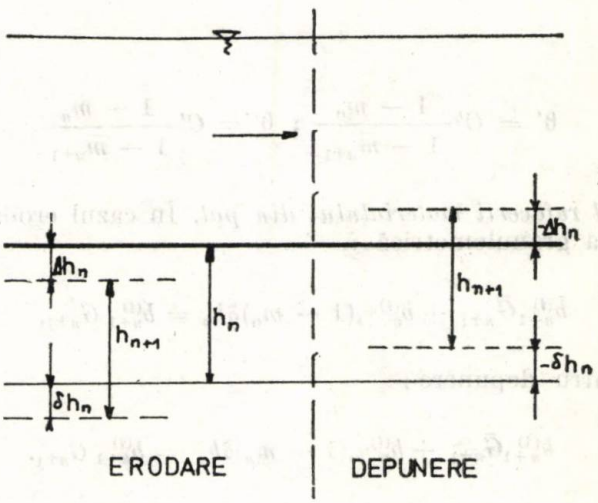


Fig. 1

unde δh_n reprezintă modificarea zonei de influenţă ca urmare a refacerii (fig. 1).Conform relaţiei (8), rezultă

$$\Delta h_n = \delta h_n. \tag{11}$$

Greutatea pe unitatea de arie a materialului din zona de influenţă, după refacere, este :

$$G_{n+1} = \bar{G}_{n+1} + \gamma_s(1 - m_0)\delta h_n \tag{12}$$

în cazul erodării ($\delta h_n \geqslant 0$) ; respectiv

$$G_{n+1} = \bar{G}_{n+1} + \gamma_s(1 - m_n)\delta h_n \tag{13}$$

la depunere ($\delta h_n < 0$).

Din relaţiile (1) şi (2) se obţine

$$\bar{G}_{n+1} = \frac{G_n}{1 + C'}, \tag{2'}$$

iar egalităţile (12) şi (13) se scriu :

$$G_{n+1} = \frac{G_n}{1 + C'}(1 + \theta') \qquad \text{(erodare)}, \tag{12'}$$

$$G_{n+1} = \frac{G_n}{1 + C'}(1 + \theta'') \qquad \text{(depunere)}, \tag{13'}$$

unde

$$\theta' = C'\frac{1 - m_0}{1 - \bar{m}_{n+1}} \; ; \; \theta'' = C'\frac{1 - m_n}{1 - \bar{m}_{n+1}}. \tag{14}$$

Bilanţul refacerii materialului din pat. În cazul erodării, se obţine, pentru fracţia granulometrică i,

$$\bar{b}^{(i)}_{n+1}\bar{G}_{n+1} + b^{(i)}_0\gamma_s(1 - m_0)\delta h_n = b^{(i)}_{n+1}\, G_{n+1},$$

respectiv pentru depunere :

$$\bar{b}^{(i)}_{n+1}\bar{G}_{n+1} + b^{(i)}_n\gamma_s(1 - m_n)\delta h_n = b^{(i)}_{n+1}\, G_{n+1}.$$

Dacă se utilizează notaţiile (14), formulele de mai sus se scriu :

$$b^{(i)}_{i+1} = \frac{\bar{b}^{(i)}_{n+1} + \theta'\, b^{(i)}_0}{1 + \theta'} \qquad \text{(erodare)}, \tag{15}$$

respectiv

$$b_{n+1}^{(i)} = \frac{\bar{b}_{n+1}^{(i)} + \theta'' b_n^{(i)}}{1 + \theta''} \qquad \text{(depunere)}. \tag{16}$$

În deducerea acestor relații s-a admis că, în cazul erodării, refacerea zonei de influență se realizează cu material din straturile inferioare, nealterate de procesul transport-erodare-depunere (de porozitate m_0 și ponderi granulometrice $b_0(i)$, iar la depunere, refacerea zonei are loc la nivelul superior al acesteia, cu material depus, de structură granulometrică corespunzătoare momentului de timp T_n (de porozitate m_n și ponderi granulometrice $b(i)$.

Bilanțul de material în curentul lichid. Se admite că, indiferent de debitul solid, Q_a, intrat în secțiunea amonte la momentul de timp T_n, debitul solid, $Q_{t,n}$, transportat prin secțiunea aval, corespunde regimului de echilibru, corelat cu ponderea granulometrică $b_n^{(i)}$ în pat, datorită interacțiunii curent-albie pe lungimea L a sectorului analizat (fig. 2).

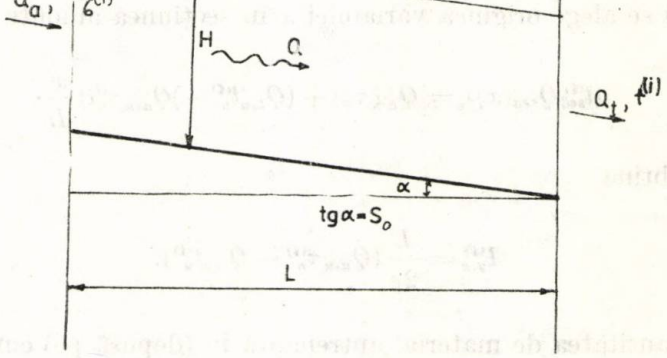


Fig. 2

— Cantitatea de sediment care pleacă din sector spre aval în timpul ΔT_n este $\frac{1}{2}(Q_{t,n} + Q_{t,n+1})\Delta T_n$, din care, pentru fracția i :

$$\frac{1}{2}(Q_{t,n}\, t_n^{(i)} + Q_{t,n+1} t_{n+1}^{(i)})\Delta T_n . \tag{17}$$

— Cantitatea de material care intră în sector este $\frac{1}{2}(Q_{a,n} + Q_{a,n+1})\Delta T_n$ din care, pentru fracția i :

$$\frac{1}{2}(Q_{a,n}\tau_n^{(i)} + Q_{a,n+1}\tau_{n+1}^{(i)})\Delta T_n \tag{18}$$

unde $\tau_n^{(i)}$ reprezintă ponderile granulometrice în curent la momentul T_n, în secţiunea amonte, în timp ce $t_n^{(i)}$ reprezintă ponderile granulometrice în curent, în secţiunea aval, corespunzătoare regimului uniform.

Pentru a putea include în bilanţ cantitatea de material existentă în curent (în suspensie) la un moment dat, se va observa că pe un tronson infinitezimal dx, cantitatea de material în suspensie este

$$Q_{t,n}(x)\frac{dx}{v},$$

unde $v=\dfrac{Q}{BH}$ reprezintă viteza medie în secţiunea transversală, iar H este adîncimea de curgere. Pe lungimea L, dacă se admite că debitul solid transportat variază liniar, la un moment dat T_n, între $Q_{a,n}$ şi $Q_{t,n}$ rezultă că în sector se află în suspensie, pentru fracţia i, o cantitate de material dată de relaţia:

$$I_{g,n}^{(i)}=\int_0^L (t_{sed}^{(i)}Q_{sed}(x))_n\frac{dx}{v}, \tag{19}$$

unde, dacă se alege originea variabilei x în secţiunea amonte:

$$(t_{sed}^{(i)}Q_{sed}(x))_n=Q_{a,n}\tau_n^{(i)}+(Q_{t,n}t_n^{(i)}-)Q_{a,n}\tau_n^{(i)})\frac{x}{L}.$$

Se obţine

$$I_{g,n}^{(i)}=\frac{L}{2v}(Q_{a,n}\tau_n^{(i)}+Q_{t,n}t_n^{(i)}). \tag{20}$$

— Cantitatea de material antrenantă în (depusă pe) curentul lichid (patul albiei) în cazul erodării (depunerii) în sectorul analizat, in intervalul de timp ΔT_n, pentru fracţiunea i, este

$$\frac{1}{2}C_n\,LB(t_n^{(i)}+t_{n+1}^{(i)}); \tag{21}$$

Se obţine următoarea ecuaţie de bilanţ în curent (pentru fracţia granulometrică i):

$$\frac{1}{2}(Q_{t,n}t_n^{(i)}+Q_{t,n+1}t_{n+1}^{(i)})\Delta T_n=\frac{1}{2}(Q_{a,n}\tau_n^{(i)}+Q_{a,n+1}\tau_{n+1}^{(i)})\Delta T_n+\frac{L}{2v}(Q_{a,n}\tau_n^{(i)}+ \tag{22}$$

$$+Q_{t,n}t_n^{(i)})+\frac{1}{2}C_nLB(t_n^{(i)}+t_{n+1}^{(i)})-\frac{L}{2v}(Q_{a,n+1}\tau_{n+1}^{(i)}+Q_{t,n+1}t_{n+1}^{(i)}).$$

Dacă se sumează această relaţie (membru cu membru) pentru toate toate fracţiile granulometrice şi se ţine seamă de condiţiile de normare,

$$\sum_i t_n^{(i)} = \sum_i t_{n+1}^{(i)} = \sum_i \tau_n^{(i)} = \sum_i \tau_{n+1}^{(i)} = 1,$$

rezultă ecuaţia globală :

$$\frac{1}{2}(Q_{t,n} + Q_{t,n+1})\Delta T_n = \frac{1}{2}(Q_{a,n} + Q_{a,n+1})\Delta T_n + \\ + \frac{L}{2v}(Q_{a,n} + Q_{t,n}) + C_n LB - \frac{L}{2v}(Q_{a,n+1} + Q_{t,n+1}). \tag{23}$$

Din relaţiile (2) şi (2′) se obţine egalitatea :

$$C_n = C'\bar{G}_{n+1} = \frac{C'}{1+C'} G_n, \tag{24}$$

cu ajutorul căreia din ecuaţia (23) se deduce mărimea intervalului de timp ΔT_n pentru pasul de iteraţie n :

$$\Delta T_n = \frac{2LBC'}{1+C'} \frac{G_n}{\beta_1} + \frac{L}{v} \frac{\beta_2}{\beta_1}, \tag{25}$$

unde

$$\beta_1 = Q_{t,n} + Q_{t,n+1} - Q_{a,n} - Q_{a,n+1}, \\ \beta_2 = Q_{t,n} + Q_{a,n} - Q_{t,n+1} - Q_{a,n+1}. \tag{26}$$

Sistemul de relaţii (7′), (12′), (13′), (15), (16) şi (25) constituie un ansamblu de ecuaţii din care, dacă se cunosc mărimile hidraulice şi de transport la momentul T_n, se poate obţine valorile acestora la momentul ulterior T_{n+1}, în cazul în care parametrul adimensional de antrenare C', definit prin condiţia (2), este ales. În această situaţie, din relaţia (25) rezultă durata ΔT_n, respectiv momentul de timp ulterior :

$$T_{n+1} = T_n + \Delta T_n. \tag{27}$$

Se poate aborda şi problema inversă : dîndu-se pasul de timp ΔT_n, să se deducă parametrul adimensional de antrenare C'. Această alternativă impune un nou proces de iterare, la un moment dat, iar examinarea sa va constitui obiectul unei lucrări ulterioare.

4. ALGORITMUL DE CALCUL. REZULTATE

— *Mărimi cunoscute din considerente fizice* : lungimea L a sectorului analizat, adîncimea H de curgere în regim uniform şi staţionar, lăţimea B a albiei prismatice dreptunghiulare, panta longitudinală S_0 a albiei, debitul Q de curgere, adîncimea de influenţă h, admisă constantă în timp, ponderile granulometrice $b_0^{(i)}$ ale materialului de fund, parametrul adimensional de antrenare C', greutatea specifică γ_s a scheletului solid.

— *Condiţii la limită* : debitul solid $Q_{s,n}$ care, la momentul de timp T_n, pătrunde prin secţiunea amonte a sectorului analizat.

Ponderile granulometrice $t^{(i)}$ în secţiunea aval corespund distribuţiei de echilibru pentru transportul de sediment. Ele pot fi calculate împreună cu debitul solid total Q_t, cu procedeul lui F. Toffaleti [7], obţinut prin generalizarea modelului lui H.A. Einstein [6], depinzînd pe lîngă parametri fizici ai fazei lichide (temperatură, viscozitate), respectiv ai fazei solide (greutate specifică, mărimea hidraulică a granulelor), de condiţiile de curgere (viteză, adîncimea de curgere, panta hidraulică) şi de ponderile granulometrice $b^{(i)}$ în pat.

La un moment de timp T_n procedeul de calcul iterativ constă din următoarele etape :

— în cadrul unei scheme predictor-corector se anticipează distribuţia granulometrică în curgere $t_{n+1}^{(i)}$, egală cu cea anterioară :

$$t_{n+1}^{(i)} = t_n^{(i)}$$

şi se determină, într-o primă aproximaţie, ponderile granulometrice în pat, utilizînd relaţia generală (3) :

$$\bar{b}'^{(i)}_{n+1} = b_n^{(i)}(1 + C') - C' t_n^{(i)}.$$

Folosind schema lui Toffaleti se corectează ponderile granulometrice $t_{n+1}^{(i)}$ şi se reestimează ponderile granulometrice în pat :

$$\bar{b}''^{(i)}_{n+1} = b_n^{(i)}(1 + C') - C'(a t_n^{(i)} + (1-a) t_{n+1}^{(i)}),$$

unde a este parametru de suprarelaxare $a \in (0{,}5 - 0{,}85)$, care măreşte viteza de convergenţă a procesului. Reevaluările predictor-corector continuă pînă cînd, pentru o valoare ε aleasă suficient de mică (circa 0,0005) este îndeplinită condiţia :

$$\max_i | \bar{b}''^{(i)}_{n+1} - \bar{b}'^{(i)}_{n+1} | \leqslant \varepsilon,$$

— cunoscînd ponderile granulometrice $\bar{b}_{n+1}^{(i)}$ în pat, înainte de refacere, se determină diametrul efectiv $(\bar{D}_{65})_{n+1}$ corespunzător, din relaţia (4). şi se estimează mărimea porozităţii $\bar{m}_{n+1}$, în conformitate cu ecuaţia (5). Rezultă, în cele din urmă, adîncimea de erodare (depunere) Δh_n din relaţia (7') ;

— în faza de refacere, se calculează coeficientul θ' (respectiv θ'') în cazul erodării (depunerii) din egalitatea (14). În continuare se obţin

ponderile granulometrice $b_{n+1}^{(i)}$ în pat, după refacere, cu formula (15), în cazul erodării, respectiv (16) în cazul depunerii;

— cantitatea de sediment, G_{n+1}, pe unitatea de arie, în zona de influență, rezultă din relațiile (12'), respectiv (13'), iar din ecuația (25) se obține mărimea duratei de timp ΔT_n, cu ajutorul căreia, din formula (27), se determină pasul de timp iterat T_{n+1}.

Analiza asimptotică a algoritmului. Pentru a efectua trecerea la limită ($n \to \infty$) în procesul iterativ, se va admite că debitul de sediment care intră în sector prin secțiunea amonte tinde către o valoare constantă $Q_{a,\infty}$, iar debitul de sediment transportat spre aval tinde către $Q_{t,\infty}$.

Din relațiile (26) rezultă:

$$\beta_1 \to 2(Q_{t,\infty} - Q_{a,\infty}); \quad \beta_2 \to 0,$$

iar din (25) se obține valoarea asimptotică a pasului de timp:

$$\Delta T_n \simeq \frac{LB\,C'}{1+C'} \frac{G_n}{Q_{t,\infty} - Q_{a,\infty}},$$

adică

$$\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n} \simeq \frac{G_{n+1}}{G_n}.$$

a) În cazul depunerii ($C'<0$):

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{1+\theta''}{1+C'} \to 1 \tag{28}$$

deoarece porozitatea patului tinde către o valoare limită m_∞, iar $\theta'') \to C'$ în conformitate cu relația (14). Prin urmare, criteriul de oprire al procesului este:

$$\left| \frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n} - 1 \right| \leqslant \varepsilon_1, \tag{29}$$

unde mărimea ε_1 are o valoare aleasă, suficient de mică (circa 0,001).

Se observă că relația (28) este echivalentă cu condiția asimptotică:

$$t_n^{(i)} - b_n^{(i)} \to 0 \text{ (oricare ar fi } i),$$

conform căreia compoziția granulometrică a materialului în suspensie devine egală cu cea din pat.

Adîncimea de depunere limită, pe unitatea de timp, are expresia:

$$\frac{|\Delta h_\infty|}{\Delta T_\infty} = \frac{1}{\gamma_s(1-m_\infty)} \frac{Q_{t,\infty} - Q_{a,\infty}}{LB}, \tag{30}$$

putînd să se realizeze două alternative :

— dacă $Q_{t,\infty} < Q_{a,\infty}$, depunerea se produce continuu, cu viteză constantă ;

— dacă $Q_{t,\infty} = Q_{a,\infty}$, se produce o stagnare limită a colmatării.

b) În cazul erodării ($C' > 0$) :

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{1+\theta'}{1+C'} < 1, \tag{31}$$

iar criteriul de oprire al procesului devine :

$$\left| \frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n} - \frac{1+\theta'}{1+C'} \right| \leqslant \varepsilon_1 . \tag{32}$$

Se obţine analog :

$$\frac{\Delta h_\infty}{\Delta T_\infty} = \frac{1}{\gamma_s(1-m_\infty)} \frac{Q_{t,\infty} - Q_{a,\infty}}{LB}, \tag{33}$$

evidenţiindu-se următoarele posibilităţi :

— dacă $Q_{t,\infty} > Q_{a,\infty}$, erodarea se produce cu viteză constantă, pînă la roca de bază ;

— dacă $Q_{t,\infty} = Q_{a,\infty}$, se produce o stagnare limită a erodării (pavare).

Următoarele două situaţii :

— $Q_{t,\infty} > Q_{a,\infty}$ în cazul depunerii,

— $Q_{t,\infty} < Q_{a,\infty}$ în cazul erodării

sînt absurde din punct de vedere fizic, iar numeric au drept consecinţă divergenţa procesului iterativ.

Pentru a evita apariţia acestor cazuri de divergenţă, este necesar ca valoarea parametrului de antrenare C', respectiv natura procesului (eroare sau depunere), să rezulte din studiul de bilanţ, pentru o valoare impusă a pasului de timp ΔT, aşa cum s-a menţionat mai sus.

Algoritmul prezentat a fost aplicat la un caz concret, pentru care s-au ales următoarele valori ale mărimilor hidrodinamice şi geomorfologice care caracterizează fenomenul :

— lungimea sectorului analizat $L = 500$ m ;

— lăţimea albiei prismatice dreptunghiulare $B = 500$ m ;

— adîncimea de curgere $H = 10$ m ;

— panta longitudianlă a patului $S_0 = 0{,}00005$;

— debitul curgerii $Q = 7900$ m^3/s ;

— temperatura medie a apei $T_g = 10°C$;

— debitul solid amonte $Q_a = 0$;

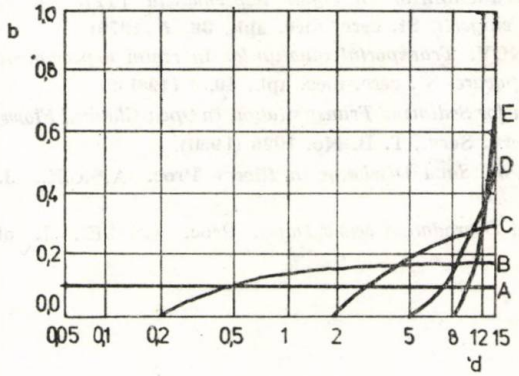
— greutatea specifică relativă a scheletului $\gamma_s/\gamma = 2{,}65$.

S-a admis o distribuţie granulometrică uniformă a straturilor de fund nealterate $b_0^{(i)} = 0{,}10$ ($i = 1{,}10$) pentru o gamă de zece diametre d_i ($i = 1{,}10$) = 0,05 ; 0,10 ; 0,20 ; 0,50 ; 1,0 ; 2,0 ; 5,0 ; 8,0 ; 12,0 ; 15,0.

S-au studiat o serie de variante diferind atît prin valorile parametrului adimensional de antrenare C', cît şi prin mărimea adîncimii de influenţă h (m). S-au analizat următoarele cazuri :

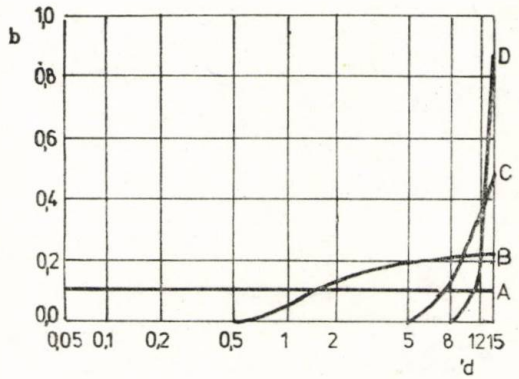
$h = 1{,}0$; $1{,}25$; $1{,}50$ m; $C' = 0{,}04$; $0{,}06$; $0{,}08$, adică în total nouă variante.

În figura 3 se reprezintă modificările în timp ale mulțimii ponderilor $b_n^{(i)}$ pentru $n = 0, 10, 20, \ldots$, ultima curbă corespunzînd soluției asimptotice obținută prin satisfacerea criteriului de oprire (32) corespunzător erodării ($C' > 0$).



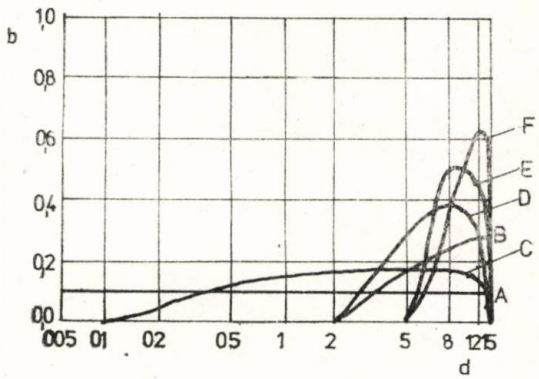
3a C'=0,04

A(n=0); B(10); C(20); D(30); E(40).



3b C'=0,06

A(n=0); B(10); C(20); D(35).



3c C=0,08

A(n=0); B(10); C(20); D(30); E(40); F(50).

Fig. 3

Primită la redacție la 16 februarie, 1981

BIBLIOGRAFIE

1. W. H. GRAF, *Hydraulics of Sediment Transport*, Mc Graw Hill Inc. New York (1971).
2. M. BAYAZIT, *Simulation of Armor Coat Formation and Destruction*, Proc. XVI Congress of IAHR, vol. 2(1975).
3. A. DIACON, I. SETEANU, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent (I). Efectul modificării profilului transversal al curgerii*, St. cerc. mec. apl., **35**, *1*(1976).
4. I. SETEANU, R. POPA, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent (II). Efectul formei secțiunii transversale a curgerii*. St. cerc. mec. apl., **38**, *1* (1979).
5. I. SETEANU, M. ERHAN, A. MARINOV, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent (III). Evoluția procesului de pavare*. St. cerc. mec. apl., **40**, *2* (1981).
6. H. A. EINSTEIN, *The bed-load Function for Sediment Transportation in Open-Channel Flows*, U. S. Dept. Agric., Soil Conserv. Serv., T. B. No. 1026 (1950).
7. F. TOFFALETI, *Definitive Computation of Sand Discharge in Rivers* Proc. A.S.C.E., J. of Hydr. Div., HY1(1969).
8. S. KOMURA, D. SIMMONS, *River Bed Degradation below Dams*, Proc. A.S.C.E., J. of Hydr. Div., HY4 (1967).

ANALIZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR PLANE CU ARTICULAȚII PE MODELE TOPOLOGICE

de S. VLASE

Universitatea din Brașov

În lucrare ne propunem determinarea unei metode generale pentru rezolvarea cinematicii, la nivelul vitezelor și accelerațiilor, a mecanismelor plane cu articulații. Descrierea structurii unui mecanism prin matricea buclelor fundamentale oferă posibilitatea realizării unor algoritmi pentru determinarea necunoscutelor cinematice și a utilizării mijloacelor automate de calcul. Soluția problemei propuse este complet caracterizată prin matricea buclelor fundamentale (structură), lungimile și pozițiile unghiulare ale tuturor elementelor (geometrie) și parametrii cinematici ai elementelor conducătoare.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Problema determinării cinematice a mecanismelor în general prezintă două aspecte :

— determinarea vitezelor și accelerațiilor componentelor mecanismului dacă sînt cunoscute acestea pentru elementele numite conducătoare. Vitezele pot fi descrise liniar, funcție de vitezele elementelor conducătoare, iar accelerațiile printr-o funcție pătratică de viteze plus o funcție liniară în accelerațiile elementelor conducătoare ;

— determinarea pozițiilor componentelor mecanismului la diverse momente de timp, problemă neliniară.

Vom aborda primul aspect al acestei probleme, dînd algoritmi care permit determinarea vitezelor și accelerațiilor unghiulare pentru mecanismele plane cu articulații.

2. GRAFUL ASOCIAT UNUI MECANISM PLAN CU ARTICULAȚII

2.1. ECHIVALENTUL CINEMATIC AL MECANISMULUI DAT

Vom considera un mecanism plan cu articulații (fig. 1).

Construim un mecanism, echivalent din punct de vedere cinematic cu mecanismul dat, alcătuit numai din elemente de tip bară cu articulații la capete. Pentru aceasta vom face următoarele două operații :

I. Înlocuim un element de tip placă (fig. 2 *a*) cu structura din figura 2*b*, formată din bare legate prin articulații într-o legătură rigidă, numărul de laturi ce o compun fiind egal cu numărul de laturi al poligonului definit de elementul placă, la care se adaugă toate diagonalele ce pornesc din același vîrf, indiferent ales.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 4, 1981, P. 511—525

II. Se unesc punctele ce realizează legătura cu elementul fix prin elemente de tip bară care închid un poligon (fig. 3) şi apoi se elimină unul din aceste elemente (el rezultă din suma vectorială cu semn schimbat a tuturor celorlalte).

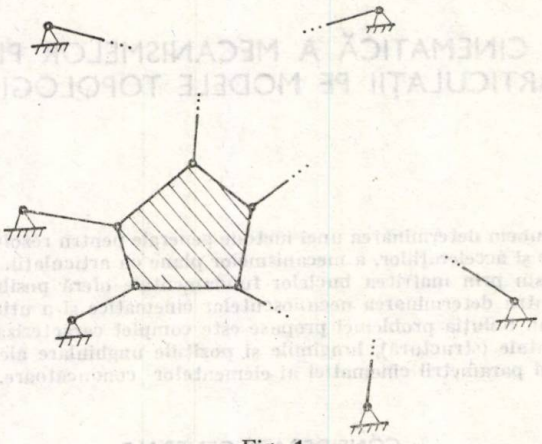


Fig. 1

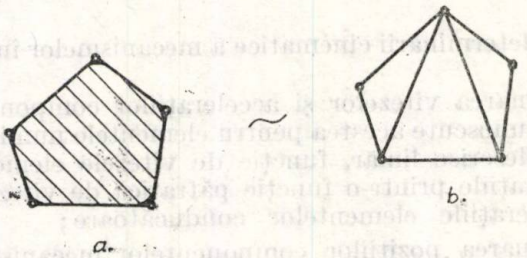


Fig. 2

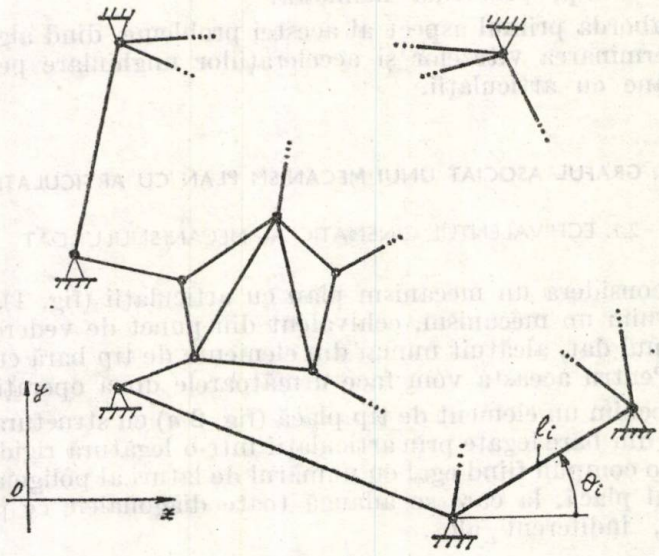


Fig. 3

Elementele obținute prin această construcție se vor considera în cele ce urmează ca elemente conducătoare a căror viteze și accelerații unghiulare sînt nule.

Se obține astfel un mecanism echivalent cinematic cu cel dat, dar alcătuit numai din bare. În cele ce urmează vom considera cunoscute toate lungimile elementelor mecanismului construit și unghiurile făcute de acestea cu un sistem de coordonate xOy la un moment dat (determinare geometrică).

2.2. CONSTRUCȚIA GRAFULUI ASOCIAT

Mecanismului rezultat din construcția făcută i se asociază graful ale cărui laturi corespund elementelor mecanismului, iar nodurile, articulațiilor [3]. Atașind fiecărui element un vector cu capătul într-o articulație și vîrful în cealaltă și luînd pentru fiecare latură sensul de parcurgere dat de direcția vectorului astfel construit se obține graful orientat din figura 4.

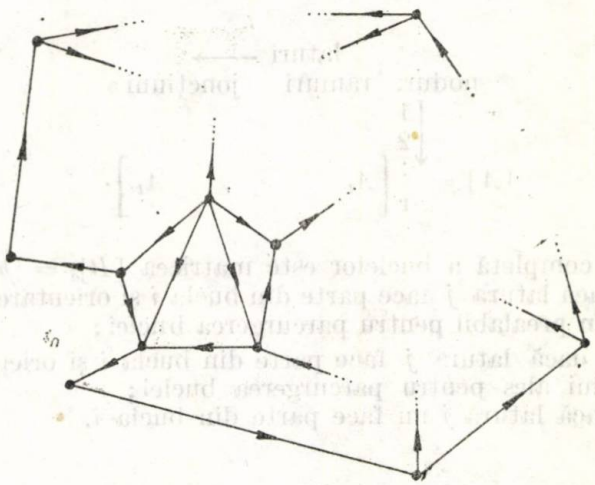


Fig. 4

2.3. MATRICEA DE INCIDENȚĂ ȘI MATRICEA BUCLELOR FUNDAMENTALE (CICLURILOR INDEPENDENTE)

Fie $r+1$ numărul de noduri și s numărul de laturi ale grafului obținut. Matricea completă de incidență pentru graful dat este matricea $[A]_a = [a_{ij}]$ de dimensiuni $(r+1) \times s$ cu :

$a_{ij} = 1$ dacă latura j este incidentă la nodul i și iese din nod ;

$a_{ij} = -1$ dacă latura j este incidentă la nodul i și intră în nod ;

$a_{ij} = 0$ dacă latura j nu este incidentă la nodul i.

Deci $[A]_a$ va avea aspectul :

$$[A]_a = \begin{array}{c} \text{laturi} \longrightarrow \\ \text{noduri} \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & s \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \dots & \varepsilon_{1s} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \dots & \varepsilon_{2s} \\ \vdots & & & & \\ \varepsilon_{r+1,1} & \varepsilon_{r+1,2} & \varepsilon_{r+1,3} & \dots & \varepsilon_{r+1,s} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r+1 \end{array},$$

unde $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$; $i = 1, 2, \dots, r+1$; $j = 1, 2, \dots, s$.

Rangul acestei matrice este r. Matricea $[A]$ de rang r obţinută din $[A]_a$ prin suprimarea unei linii este matricea de incidenţă pentru graful dat (sau matricea redusă de incidenţă). Selectăm în graf un arbore şi executăm în matricea $[A]$ o reordonare şi o partiţionare $[A] = [A_t \; A_l]$ astfel încît coloanelor lui $[A_t]$ să le corespundă ramurile (laturile ce intervin în constituirea arborelui), iar coloanelor lui $[A_l]$ joncţiunile (laturile care ataşate la arborele ales dau graful iniţial). Deci

$$[A] = \begin{array}{c} \text{laturi} \longrightarrow \\ \text{noduri ramuri joncţiuni} \\ \text{noduri} \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} A_t & \vdots & A_l \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \end{array}. \qquad (2.3.1)$$

Matricea completă a buclelor este matricea $[B]_a = [b_{ij}]$ cu

$b_{ij} = 1$ dacă latura j face parte din bucla i şi orientarea ei coincide cu sensul ales în prealabil pentru parcurgerea buclei ;

$b_{ij} = -1$ dacă latura j face parte din bucla i şi orientarea ei este contrară sensului ales pentru parcurgerea buclei ;

$b_{ij} = 0$ dacă latura j nu face parte din bucla i.

$$[B]_a = \begin{array}{c} \text{laturi} \longrightarrow \\ \text{bucle} \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & s \end{array} \\ \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \dots & \eta_{1s} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \dots & \eta_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \eta_{nb,1} & \eta_{nb,2} & \eta_{nb,3} & \dots & \eta_{nb,s} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ nb \end{array},$$

unde nb este numărul total de bucle ale grafului, $\eta_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$; $i = 1, 2, \dots, nb$; $j = 1, 2, \dots, s$. Rangul matricei $[B]_a$ este $s-r$. Matricea $[B]_f$ de rang $s - r$ obţinută din $[B]_a$ este matricea buclelor fundamentale.

Între $[B]_f$ și $[A]$ există relația :

$$[B]_f = [-([A_t]^{-1} \times [A_l])^T \,|\, [I]], \tag{2.3.2}$$

care permite determinarea matricei buclelor fundamentale (una din ele) dacă a fost construită matricea de incidență și identificat un arbore [1], [2].

Împărțim laturile grafului în două clase : una corespunzînd elementelor mecanismului a căror mișcare dorim să o cunoaștem, cealaltă corespunzînd elementelor conducătoare și elementelor obținute prin operația II. de la §. 2.1. Vom efectua o partiționare a lui $[B]_f$, $[B]_f = [B_{fn}\ B_{fc}]$ realizată după o reordonare a coloanelor lui $[B]_f$ astfel încît matricea $[B]$ corespunde elementelor primei clase, iar $[B]_{fc}$ elementelor celei de-a doua clase.

3. REZOLVAREA CINEMATICII LA NIVELUL VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR

3.1. ECUAȚIILE DE CONDIȚIE ALE VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR

Construim matricele diagonale de dimensiune s :

$$[L] = \begin{bmatrix} l_1 & & & & & & \\ & l_2 & & 0 & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & \\ & 0 & & \ddots & & & \\ & & & & l_{2(s-r)} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & l_{2(s-r)+1} & \\ & & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & & l_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_n & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & L_c \end{bmatrix};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & & & & & & \\ & \cos\theta_2 & & 0 & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \cos\theta_{2(s-r)} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & \cos\theta_{2(s-r)+1} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & 0 & & & & \ddots \\ & & & & 0 & & \cos\theta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & C_c \end{bmatrix},$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 & & & & & & \\ & \sin\theta_2 & & 0 & & & \\ & & \ddots & & & 0 & \\ & & & \sin\theta_{2(s-r)} & & & \\ & 0 & & & \sin\theta_{2(s-r)+1} & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & \sin\theta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_n & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & S_c \end{bmatrix},$$

și vectorii

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{2(s-r)} \\ \cdots \\ \omega_{2(s-r)+1} \\ \vdots \\ \omega_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_n \\ \cdots \\ \omega_c \end{Bmatrix}; \{\omega^2\} = \begin{Bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_{2(s-r)}^2 \\ \cdots \\ \omega_{2(s-r)+1}^2 \\ \vdots \\ \omega_s^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_n^2 \\ \cdots \\ \omega_c^2 \end{Bmatrix}; \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{2(s-r)} \\ \cdots \\ \varepsilon_{2(s-r)+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \cdots \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix},$$

unde partițiile au fost făcute urmărind împărțirea elementelor în cele două clase : — elemente a căror mișcare dorim să o determinăm ; — elemente conducătoare și fixe (cu evoluție cunoscută).

S-a notat : $\bar{l}_i$ —lungimea elementului i ;

θ_i — unghiul făcut de vectorul $\bar{l}_i$ cu axa Ox a sistemului ortogonal xOy la care raportăm mecanismul ;

ω_i — viteza unghiulară a elementului i ;

ε_i — accelerația unghiulară a elementului i ;

Fie bucla p din sistemul buclelor fundamentale (ciclurilor independente) constituită din elementele $a, b, c, \ldots, r$ (fig. 5).

Ecuația de contur :

$$\bar{l}_a + \bar{l}_b + \bar{l}_c + \ldots + \bar{l}_r = 0 \qquad (3.1.1.)$$

oferă ecuațiile de proiecții :

$$\begin{aligned} l_a \cos\theta_a + l_b \cos\theta_b + \ldots + l_r \cos\theta_r &= 0, \\ l_a \sin\theta_a + l_b \sin\theta_b + \ldots + l_r \sin\theta_r &= 0. \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

Prin derivare în raport cu timpul obținem :

$$-\omega_a l_a \sin\theta_a - \omega_b l_b \sin\theta_b - \ldots - \omega_r l_r \sin\theta_r = 0,$$
$$\omega_a l_a \cos\theta + \omega_b l_b \cos\theta_b + \ldots + \omega_r l_r \cos\theta_r = 0. \tag{3.1.3}$$

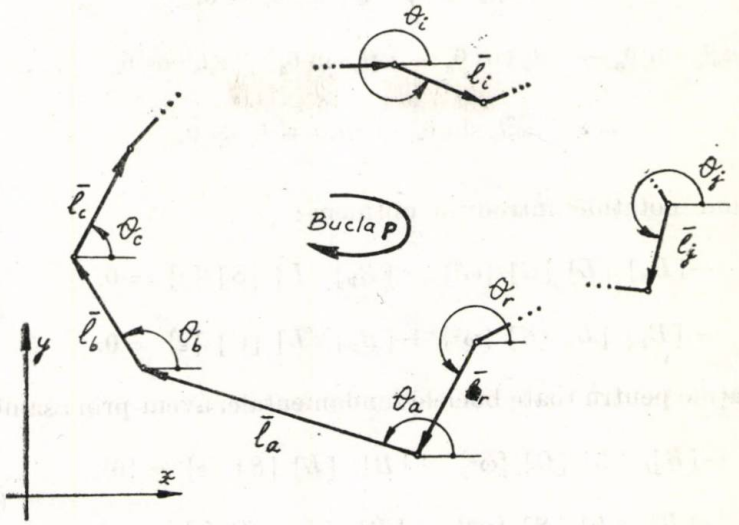


Fig. 5

Notînd

latura 1 2.. .a. .b. .r. .s
$[B_p] = [0 \quad 0 \quad 010 \; 010 \; 010 \quad 0],$

sistemul (3.1.3) permite scrierea matriceală :

$$-[B_p]\,[L]\,[S]\,\{\omega\} = 0$$
$$[B_p]\,[L]\,[C]\,\{\omega\} = 0. \tag{3.1.4}$$

Se observă că $[B_p]$ poate fi considerat ca linia p în matricea buclelor fundamentale $[B]_f$. Repetînd procedeul descris pentru fiecare buclă fundamentală, se obține prin asamblarea relațiilor (3.1.4) :

$$-[B]_f\,[L]\,[S]\,\{\omega\} = \{0\},$$
$$[B]_f\,[L]\,[C]\,\{\omega\} = \{0\}. \tag{3.1.5}$$

Considerînd notațiile făcute la începutul acestui paragraf și efectuînd produsele de matrice partiționate, putem scrie relațiile (3.1.5) sub forma :

$$\begin{bmatrix} -B_{fn}L_nS_n & -B_{fc}L_cS_c \\ B_{fn}L_nC_n & B_{fc}L_cC_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_n \\ \ldots \\ \omega_c \end{Bmatrix} = \{0\}. \tag{3.1.6}$$

Derivînd (3.1.3), rezultă ecuația de condiție a accelerațiilor pentru bucla p:

$$\begin{aligned} &-\omega_a^2 l_a \cos\theta_a - \varepsilon_a l_a \sin\theta_a - \omega_b^2 l_b^2 \cos\theta_b - \varepsilon_b l_b \sin\theta_b - \ldots \\ &\ldots - \omega_r^2 l_r \cos\theta_r - \varepsilon_r l_r \sin\theta_r = 0, \\ &-\omega_a^2 l_a \sin\theta_a + \varepsilon_a l_a \cos\theta_a - \omega_b^2 l_b \sin\theta_b + \varepsilon_b l_b \cos\theta_b - \ldots \\ &\ldots - \omega_r^2 l_r \sin\theta_r + \varepsilon_r l_r \cos\theta_r = 0. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Folosind notațiile introduse obținem:

$$\begin{aligned} &-[B_p]\,[L]\,[C]\,\{\omega^2\} - [B_p]\,[L]\,[S]\,\{\varepsilon\} = 0, \\ &-[B_p]\,[L]\,[S]\,\{\omega^2\} + [B_p]\,[L]\,[C]\,\{\varepsilon\} = 0. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Scriind ecuațiile pentru toate buclele fundamentale, avem prin asamblare:

$$\begin{aligned} &-[B]_f\,[L]\,[C]\,\{\omega^2\} - [B]_f\,[L]\,[S]\,\{\varepsilon\} = \{0\}, \\ &-[B]_f\,[L]\,[S]\,\{\omega^2\} + [B]_f\,[L]\,[C]\,\{\varepsilon\} = \{0\}, \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

și rezultă în același mod ca pentru vitezele unghiulare:

$$-\left[\begin{array}{ccc|ccc} B_{fn} & L_n & C_n & B_{fc} & L_c & C_c \\ B_{fn} & L_n & C_n & B_{fc} & L_c & C_c \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \omega_n^2 \\ \ldots \\ \omega_c^2 \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc|ccc} -B_{fn} & L_n & S_n & -B_{fc} & L_c & S_c \\ B_{fn} & L_n & S_n & B_{fc} & L_c & S_c \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \ldots \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \{0\}. \tag{3.1.10}$$

Ecuațiile (3.1.6) și (3.1.10) sînt reprezentările matriceale ale ecuațiilor de condiție ale vitezelor și accelerațiilor.

3.2. DETERMINAREA NECUNOSCUTELOR CINEMATICE

Cu notațiile:

$$\begin{aligned} &[P_{sn}] = [B_{fn}]\,[L_n]\,[S_n];\ [P_{cn}] = [B_{fn}]\,[L_n]\,[C_n] \\ &[P_{sc} = [B_{fc}]\,[L_c]\,[S_c];\ [P_{cc}] = [B_{fc}]\,[L_c]\,[C_c] \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

și

$$[P_n] = \begin{bmatrix} -P_{sn} \\ P_{cn} \end{bmatrix};\ [P_c] = \begin{bmatrix} -P_{sc} \\ P_{cc} \end{bmatrix};\ [Q_n] \begin{bmatrix} P_{cn} \\ P_{sn} \end{bmatrix};\ [Q_c] = \begin{bmatrix} P_{cc} \\ P_{sc} \end{bmatrix}, \tag{3.2.2}$$

relațiile (3.1.6) și (3.1.7) devin, respectiv,

$$[P_n \mid P_c] \begin{Bmatrix} \omega_n \\ \dots \\ \omega_c \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{3.2.3}$$

și

$$-[Q_n \mid Q_c] \begin{Bmatrix} \omega_n^2 \\ \dots \\ \omega_c^2 \end{Bmatrix} + [P_n \mid P_c] \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \dots \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \{0\}. \tag{3.2.4}$$

Cu dezvoltările

$$[P_n]\ \{\omega_n\} + [P_n]\ \{\omega_c\} = \{0\} \tag{3.2.5}$$

și

$$-[Q_n]\ \{\omega_n^2\} - [Q_c]\ \{\omega_c^2\} + [P_n]\ \{\varepsilon_n\} + [P_c]\{\varepsilon_c\} = \{0\}, \tag{3.2.6}$$

se obține simplu :

$$\{\omega_n\} = -\ [P_n]^{-1}\ [P_c]\ \{\omega_c\}, \tag{3.2.7}$$

care permite construirea lui $\{\omega_n^2\}$, și

$$\{\varepsilon_n\} = [P_n]^{-1}([Q_n]\ \{\omega_n^2\} + [Q_c]\ \{\omega_c^2\} - [P_c]\ \{\varepsilon_c\}). \tag{3.2.8}$$

Rezultă astfel vitezele și accelerațiile unghiulare ale elementelor a căror mișcare dorim să o determinăm funcție de vitezele și accelerațiile unghiulare ale elementelor conducătoare.

3.3. APROXIMAȚIA DE ORDINUL 1 ȘI 2 PENTRU POZIȚII

Notăm :

$$\{\theta_n^{(0)}\} = \{\theta_1^{(0)}\ \ \theta_2^{(0)} \dots \theta_{2(s-r)}^{(0)}\}^T$$

vectorul pozițiilor unghiulare al elementelor conduse ale mecanismului la un moment dat t,

$$\{\theta_n^{(1)}\} = \{\theta_1^{(1)}\theta_2^{(1)} \dots \theta_{2(s-r)}^{(1)}\}^T = \theta_n^{(0)}\} + \{\omega_1\,\omega_2 \dots \omega_{2(s-r)}\}^T\,\Delta t = \{\theta_n^{(0)}\} + \{\omega_n\},\ ^T\Delta t, \tag{3.3.1}$$

aproximația de ordinul unu pentru pozițiile elementelor conduse ale mecanismului la momentul $t + \Delta t$ și

$$\{\theta_n^{(2)}\} = \{\theta_1^{(2)}\theta_2^{(2)} \dots \theta_{2(s-r)}^{(2)}\}^T = \{\theta_n^{(0)}\} + \{\omega_n\}\ \Delta t + \tag{3.3.2}$$

$$+\frac{1}{2}\{\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{2(s-r)}\}^T(\Delta t)^2 = \{\theta_n^{(0)}\} + \{\omega_n\}\ \Delta t + \frac{1}{2}\{\varepsilon_n\}(\Delta t)^2$$

aproximația de ordinul doi.

Aproximațiile construite pot satisface pentru anumite tipuri de mecanisme. În caz contrar trebuie calculate pozițiile printr-o metodă de determinare exactă (dacă este posibil) [3] sau printr-o metodă iterativă, aproximațiile de ordinul 1 sau 2 constituind valori inițiale pentru iterație.

4. CONSTRUCȚIA ALGORITMULUI

Rezumăm etapele necesar a fi parcurse pentru determinarea vitezelor și accelerațiilor unghiulare ale elementelor precum și a aproximațiilor de ordinul 1 și 2 pentru poziții :

1) Se construiește echivalentul cinematic al mecanismului dat.
2) Se construiește graful asociat.
3) Se determină un arbore și joncțiunile.
4) Se scrie matricea de incidență.
5) Se calculează o matrice a buclelor fundamentale cu relația (2.3.2).
6) Se împart în clase elementele cu mișcare cunoscută (în care intră și elementele fixe) și elementele a căror viteză și accelerații dorim să le determinăm și se partiționează corespunzător matricea $[B]_f = [B_{fn} B_{fc}]$.
7) Se construiesc matricele $[L]$, $[C]$, $[S]$.
8) Se alculează matricele $[P_n]$, $[P_c]$, $[Q_n]$, $[Q_c]$ conform (3.2.2).
9) Se calculează vectorii $\{\omega_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$ conform (3.2.7) și (3.2.8).
10) Se calculează $\{\theta_n^{(1)}\}$ și $\{\theta_n^{(2)}\}$ cu (3.3.1) și (3.3.2).

Etapele descrise au fost urmărite într-un program de calcul care permite rezolvarea cinematică la nivelul vitezelor și accelerațiilor pentru mecanismele plane cu articulații.

Analiza făcută poate fi extinsă la orice tip de mecanism plan, descrierea topologică rămînînd valabilă, urmînd a rescrie ecuațiile de condiție ale vitezelor și accelerațiilor.

Metoda permite, pe lîngă determinarea buclelor fundamentale (ciclurilor independente) pentru mecanismul dat, o tratare unitară a mecanismelor plane cu articulații permițînd generarea pe calculator a ecuațiilor de condiție a vitezelor și accelerațiilor. Reprezentările matriceale găsite sînt rezultate prin introducerea unor bucle fundamentale (cicluri independente) „false" (construcția I, §2.1) și a unor elemente conducătoare „false" (constrcția II, §2.1.) care simplifică descrierea structurii mecanismului.

5. EXEMPLU

Mecanismul din figura 6 este compus din zece elemente legate între ele prin 14 articulații, cu 2 grade de mobilitate. Elementele conducătoare sînt $\bar{l}_1$ și $\bar{l}_{12}$. La momentul dat cunoaștem $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \ldots, \bar{l}_{16}$ și $\omega_1 = \pi/36$ [rad/s] ; $\omega_{12} = \pi/18$ [rad/s] ; $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_{12} = 0$.

Ne propunem să determinăm vitezele și accelerațiile unghiulare ale tuturor elementelor la momentul dat precum și aproximația de ordinul 1 și 2 pentru pozițiile unghiulare după $\Delta t = 1$[s].

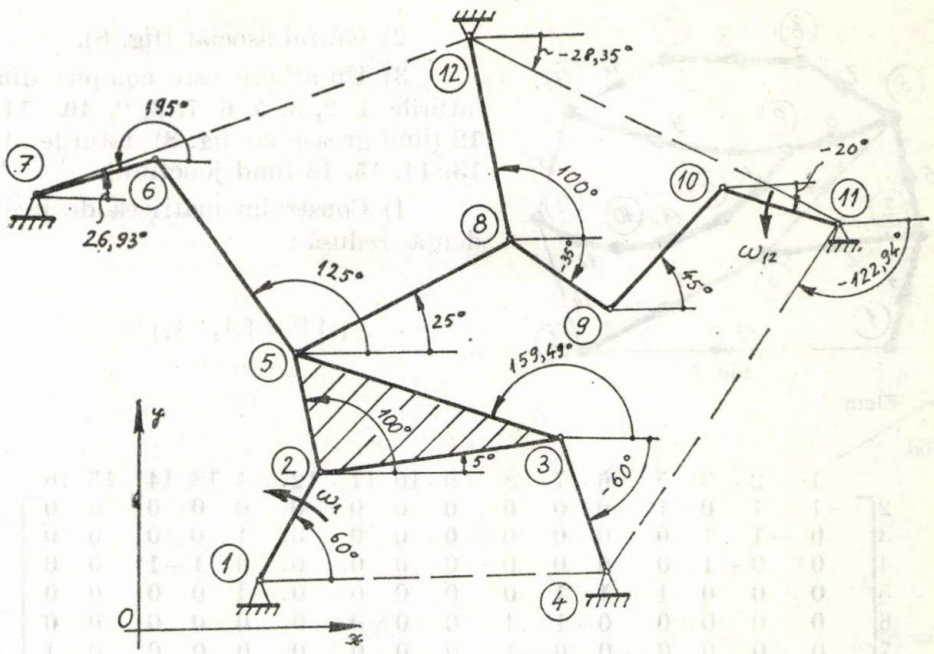


Fig. 6

Urmărim etapele fixate la § 4.

1) Mecanismul cinematic echivalent (fig. 7).

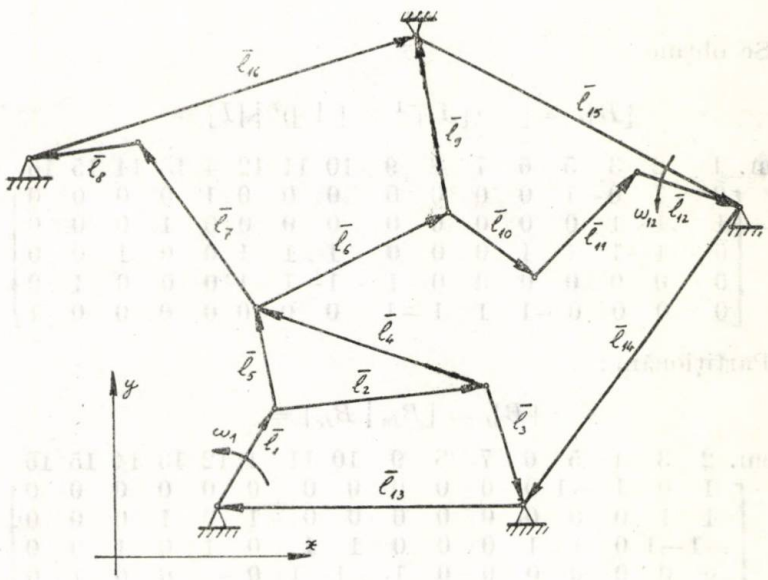


Fig. 7

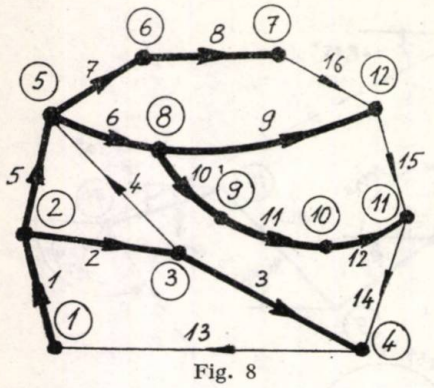


Fig. 8

2) Graful asociat (fig. 8).

3) Un arbore este compus din laturile 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (linii groase în fig. 8) laturile 4, 13, 14, 15, 16 fiind joncţiuni.

4) Construim matricea de incidenţă redusă :

$$[A] = [A_t \mid A_l] =$$

Elem. / Nod.

$$= \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12. & 4 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1. & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

5) Se obţine

$$[B]_f = [-([A_t]^{-1} \times [A])^T \mid [I] =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} \text{Elem.} & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 4 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

6) Partiţionăm :

$$[B]_f = [B_{fn} \mid B_{fc}] =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} \text{Elem.} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 1 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

7) Pentru simplificarea prezentării matricelor diagonale vom considera vectorii $\{L\}$, $\{C\}$, $\{S\}$, ce conțin diagonalele principale ale matricelor $[L]$, $[C]$, $[S]$. Avem pentru mecanismul studiat:

$$\{L\}^T = \{60\ 35\ 69{,}381\ 30\ 60\ 40\ 30\ 50\ 30\ 40\ 30\ 30\ 92{,}276\ 97{,}353\ 101{,}964\ 109{,}493\};$$

$$\{C\}^T = \{0{,}99619\ 0{,}5\ -0{,}93658\ -0{,}17365\ 0{,}90631\ -0{,}57357\ -0{,}96593\ -0{,}17365\ 0{,}81915\ 0{,}70711\ 0{,}5\ 0{,}93969\ -1\ -0{,}54382\ 0{,}88003\ 0{,}89153\};$$

$$\{S\}^T = \{0{,}08716\ -0{,}86603\ 0{,}35045\ 0{,}98481\ 0{,}42262\ 0{,}81915\ -0{,}25882\ 0{,}98481\ -0{,}57358\ 0{,}70711\ 0{,}86603\ -0{,}34202\ 0\ -0{,}83920\ -0{,}47492\ 0{,}45296\}.$$

8) Prin calcul direct rezultă: $[P_n] =$

$$= \begin{bmatrix}
5{,}229 & 0 & 24{,}314 & -29{,}544 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5{,}229 & -30{,}311 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-5{,}229 & 30{,}311 & 0 & 29{,}544 & 25{,}357 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49{,}240 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -25{,}357 & 32{,}766 & -7{,}764 & -49{,}240 \\
59{,}779 & 0 & -64{,}980 & 5{,}209 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
59{,}779 & 17{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-59{,}779 & -17{,}5 & 0 & -5{,}209 & 54{,}383 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\ 8{,}682 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -54{,}383 & -22{,}942 & -28{,}977 & -\ 8{,}682
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
-17{,}207 & 28{,}284 \\
17{,}207 & -28{,}284 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
24{,}574 & 28{,}284 \\
-24{,}574 & -28{,}284 \\
0 & 0
\end{bmatrix};$$

$$[P_c] = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
25{,}980 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -10{,}260 & 0 & -81{,}698 & 0 & 0 \\
0 & 10{,}260 & 0 & 0 & -48{,}424 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49{,}592 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
15 & 0 & -92{,}276 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 28{,}190 & 0 & -52{,}942 & 0 & 0 \\
0 & -28{,}190 & 0 & 0 & 89{,}731 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 97{,}616
\end{bmatrix}.$$

Întrucît

$$[Q_n] = \begin{bmatrix} P_{cn} \\ P_{sn} \end{bmatrix}; \quad [Q_c] = \begin{bmatrix} P_{cc} \\ P_{sc} \end{bmatrix},$$

nu le mai scriem :

9) Efectuînd înmulţirile (3.2.7) rezultă

$$\begin{Bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \\ \omega_{11} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0{,}47771 & 0 \\ -0{,}77455 & 0 \\ 4{,}47771 & 0 \\ 0{,}47771 & 0 \\ 0{,}33279 & 0 \\ 0{,}18454 & 0 \\ -0{,}74950 & 0 \\ 0{,}06959 & 0 \\ -0{,}09657 & 0{,}92024 \\ -0{,}07613 & 0{,}19714 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}04169 \\ 0{,}06759 \\ -0{,}04169 \\ -0{,}04169 \\ -0{,}02904 \\ -0{,}01610 \\ 0{,}06540 \\ -0{,}00607 \\ -0{,}15218 \\ -0{,}02776 \end{Bmatrix} \text{ [rad/s]}$$

Obţinem imediat :

$\{\omega_n^2\}^T = \{0{,}00173 \quad 0{,}00457 \quad 0{,}00173 \quad 0{,}00173 \quad 0{,}00084 \quad 0{,}00026 \quad 0{,}00428 \quad 0{,}00037 \quad 0{,}02316 \quad 0{,}00077\}$ [rad/s^2];

$\{\omega_c^2\}^T = \{0{,}00762 \quad 0{,}000304\}$ [rad/s]

şi din (3.2.8) rezultă

$\{\varepsilon_n\}^T = \{0{,}00164 \quad -0{,}00954 \quad 0{,}00164 \quad 0{,}00164 \quad -0{,}00063 \quad 0{,}02999 \quad -0{,}01631 \quad 0{,}02642 \quad -0{,}01354 \quad 0{,}01714\}$ [rad/s^2]

Rezultă aproximaţia de ordinul 1 şi doi pentru poziţiile unghiulare :

$$\{\theta_n^{(1)}\} = \{\theta_n^{(0)}\} + \{\omega_n\}\Delta t = \begin{Bmatrix} 5 \\ -60 \\ 159{,}49 \\ 100 \\ 25 \\ 125 \\ 195 \\ 100 \\ -35 \\ 45 \end{Bmatrix} + \frac{180}{\pi} \begin{Bmatrix} -0{,}04169 \\ 0{,}06759 \\ -0{,}04169 \\ -0{,}04169 \\ -0{,}02904 \\ -0{,}01610 \\ 0{,}06540 \\ -0{,}00607 \\ -0{,}15218 \\ -0{,}02776 \end{Bmatrix} \cdot 1 =$$

$$= \begin{Bmatrix} 2{,}611 \\ -56{,}127 \\ 157{,}101 \\ 97{,}611 \\ 23{,}336 \\ 124{,}078 \\ 198{,}747 \\ 99{,}652 \\ -43{,}719 \\ 43{,}409 \end{Bmatrix} \text{ [grade]}$$

și

$$\{\theta_n^{(2)}\}=\{\theta_n^{(1)}\}+\{\varepsilon_n\}\frac{\Delta t^2}{2}=\begin{Bmatrix}2{,}611\\-\ 56{,}127\\157{,}101\\97{,}611\\23{,}336\\124{,}078\\198{,}747\\99{,}652\\-\ 43{,}719\\43{,}409\end{Bmatrix}+\frac{180}{\pi}\begin{Bmatrix}0{,}00164\\-0{,}00954\\0{,}00164\\0{,}00164\\-0{,}00063\\0{,}02999\\-0{,}01631\\0{,}02642\\-0{,}01354\\0{,}01714\end{Bmatrix}\cdot\frac{1^2}{2}=$$

$$=\begin{Bmatrix}2{,}657\\-\ 56{,}400\\157{,}148\\97{,}657\\23{,}318\\124{,}937\\198{,}280\\100{,}409\\-\ 44{,}107\\43{,}900\end{Bmatrix}\text{[grade]}.$$

Primită la redacție la 11 octombrie 1980.

BIBLIOGRAFIE

1. N. BALABANIAN, T. BICKART, S. SESHU, *Teoria modernă a circuitelor*, București, Edit. tehn., 1974.
2. M. TOFAN, S. VLASE, *Algoritm pentru rezolvarea cinematicii mecanismelor plane cu articulații*. Lucrările Sesiunii ICPAT, Brașov, pg. 25—29, noiembrie, 1979.
3. S. VLASE, V. MIHALCICA, A. SASSEBES, *Considerații asupra determinării geometrice a mecanismelor plane cu articulații*. Lucrările sesiunii „Creativitatea în constr., fabr. și exploatarea automobilelor", vol. II, partea I, pg. 199—204, Pitești, 1979.

MODELAREA MATEMATICĂ A GARNITURII DE FORAJ

de VASILE CÎRTOAJE

Institutul de petrol și gaze, Ploiești

Garnitura de foraj este alcătuită din una sau mai multe porțiuni de prăjini obișnuite cu secțiuni diferite, considerate elemente cu parametri distribuiți și din garnitura de prăjini grele, considerată cu parametri concentrați.
În lucrare, garnitura de foraj este tratată ca un sistem alcătuit din mai multe subsisteme multivariabile, cuplate între ele prin intermediul mărimilor de intrare și de ieșire.
Se determină modelul matematic al unei porțiuni omogene din garnitura de prăjini obișnuite sub forma unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul trei, în care mărimile de intrare apar prin intermediul condițiilor la limită, iar în continuare se calculează funcțiile de transfer prin metoda separării variabilelor (Daniel Bernoulli și Fourier).

1. GARNITURA DE FORAJ ÎN CONCEPȚIE ASIMETRICĂ

Să considerăm o garnitură de prăjini obișnuite GPO alcătuită din trei porțiuni omogene, GPO_1, GPO_2 și GPO_3, cu material tubular de secțiuni diferite (fig. 1).

Fiecare porțiune a garniturii de prăjini obișnuite constituie un subsistem multivariabil cu parametri distribuiți, avînd două mărimi de intrare și două mărimi de ieșire : vitezele de coborire și forțele de întindere la cele două extremități.

Din condiția de compatibilitate a interconexiunii celor trei subsisteme, a conexiunii garniturii de prăjini obișnuite GPO cu subsistemul tobă-cablu-geamblac-macara-cîrlig TTCGMC și cu subsistemul garnitură de prăjini grele GPG, precum și a subsistemului GPG cu subsistemul sapă-rocă SR, rezultă practic o singură modalitate convenabilă de alegere a mărimilor de intrare și de ieșire ale fiecăruia din cele trei subsisteme GPO_1, GPO_2 și GPO_3 : viteza capătului superior și forța la capătul inferior — mărimi de intrare, viteza capătului inferior și forța la capătul superior mărimi de ieșire (fig. 2).

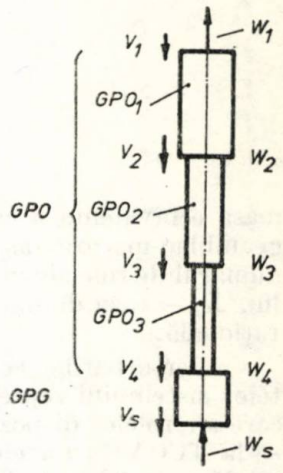


Fig. 1

S-au folosit următoarele notații : ω_t — viteza de rotație a tobei, V_1 — viteza de deplasare a cîrligului, V_4 — viteza de deplasare a garniturii de prăjini grele (egală cu viteza V_s a sapei), W_1 — forța la cîrligul macaralei de foraj, W_4 — forța la capătul inferior al garniturii de pră-

jini obișnuite, W_s — forța de interacțiune dintre sapă și rocă (egală cu zero în cazul procesului de manevră) ș.a.

Subsistemul SR este lipsit de inerție și supus acțiunii unor puternice perturbații, iar subsistemele TCGMC și GPG sînt elemente cu parametri concentrați, avînd următoarele modele matematice :

$$(\text{TCGMC}) : m_1\ddot{V}_1 + 2mk_1(2mV_1 - R_t\omega_t) = \dot{W}_1, \tag{1}$$

$$(\text{GPG}) : W_4 = m_2\dot{V}_4 - W_s + m_2g + W_{\Delta p} - W_h, \tag{2}$$

unde $W_{\Delta p}$ reprezintă forța determinată de căderea de presiune pe sapă, W_h — forța care se exercită asupra sapei datorită presiunii hidrostatice, m_1 —

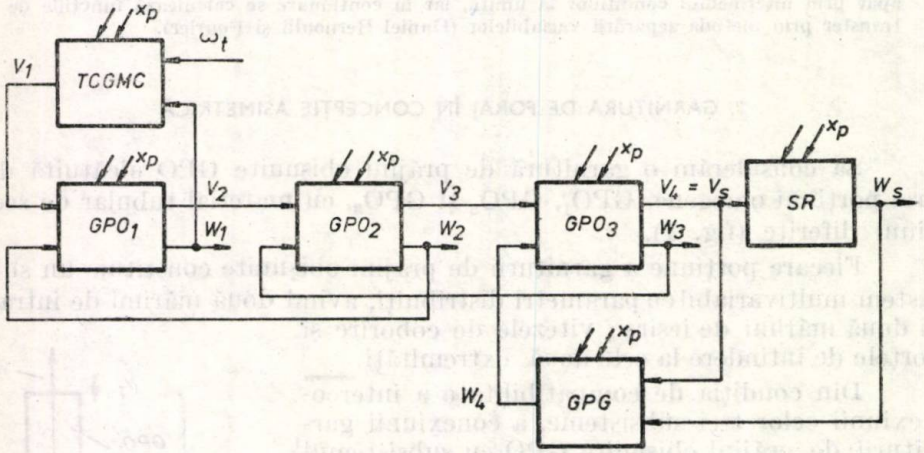


Fig. 2

masa echivalentă a cîrligului, macaralei, cablului și rolelor mecanismului geamblac-macara, m_2 — masa prăjinilor grele și a sapei de foraj, m — numărul de role ale macaralei, k_1 — constanta elastică echivalentă a cablului, R_t — raza de înfășurare a cablului pe tobă, iar g — accelerația gravitațională.

Perturbațiile cele mai importante care acționează asupra elementelor sistemului reprezentat în figura 2 sînt următoarele : forțele de frecare ale rolelor dispozitivului geamblac-macara și vibrațiile turlei de foraj — la TCGMC ; forțele de frecare cu fluidul de foraj și pereții găurii de sondă — la GPO_1, GPO_2, GPO_3 și GPG ; caracteristicile rocii și sapei, debitul și calitatea fluidului de foraj — la SR.

Subsistemele care alcătuiesc garnitura de prăjini obișnuite sînt elemente liniare în raport cu cele două mărimi de intrare. Funcțiile de transfer ale sistemului format din două subsisteme alăturate, de exemplu GPO_1 și GPO_2, se pot obține prin eliminarea variabilelor intermediare V_2 și W_2

din relaţiile de mai jos : *M*

$$(\mathrm{GPO}_1) : \begin{cases} W_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}W_2, \\ V_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}W_2, \end{cases} \tag{3}$$

$$(\mathrm{GPO}_2) : \begin{cases} W_2 = H_{11}V_2 + H_{12}W_3, \\ V_3 = H_{21}V_2 + H_{22}W_3. \end{cases} \tag{4}$$

Rezultă

$$W_1 = \left(Y_{11} + \frac{Y_{12}Y_{21}H_{11}}{1 - Y_{22}H_{11}}\right)V_1 + \frac{Y_{12}H_{12}}{1 - Y_{22}H_{11}}W_3, \tag{5}$$

$$V_3 = \frac{Y_{21}H_{21}}{1 - Y_{22}H_{11}}V_1 + \left(H_{22} + \frac{Y_{22}H_{12}H_{21}}{1 - Y_{22}H_{11}}\right)W_3.$$

Expresiile funcţiilor de transfer ale unui subsistem din alcătuirea garniturii de prăjini obişnuite, de exemplu GPO_1, au fost calculate de autor şi publicate în Buletinul Universităţii Timişoara, 1981. Ele sînt următoarele :

$$Y_{11} = -\frac{2A_1E_1}{L_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s+2\nu)(\mu s+1)}{(s+\alpha_k)^2+\omega_k^2}, \tag{6}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\frac{s(s+2\nu)}{(s+\alpha_k)^2+\omega_k^2}, \tag{7}$$

$$Y_{22} = \frac{L_1}{A_1E_1}\cdot\frac{s}{\mu s+1}\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot\frac{s(s+2\nu)}{(s+\alpha_k)^2+\omega_k^2}\right], \tag{8}$$

în care L_1, A_1 şi E_1 sînt, respectiv, lungimea, aria secţiunii transversale şi modulul de elasticitate al garniturii, μ — coeficientul de amortizare internă al materialului tubular (egal cu constanta de timp ce caracterizează întîrzierea deformaţiei în raport cu efortul),

$$\alpha_k = \nu_1 + \beta_1\lambda_k, \tag{9}$$

$$\omega_k = \sqrt{c_1^2\lambda_k^2 - \alpha_k^2}, \tag{10}$$

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2L_1}, \tag{11}$$

$$\nu_1 = \frac{\varepsilon_1}{2A_1\rho_1}, \tag{12}$$

$$\beta_1 = \frac{\mu E_1}{2\rho_1}, \tag{13}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \tag{14}$$

unde ε_1 este coeficientul de frecare vîscoasă dintre garnitură și fluidul de foraj (egal cu forța de frecare pe care o întîmpină 1m de garnitură, avînd o viteză relativă de 1m/s), iar ρ_1 — densitatea oțelului garniturii.

Modul în care au fost alese mărimile de intrare și de ieșire ale subsistemelor GPO_1, GPO_2 și GPO_3, impune în mod necesar alegerea pentru subsistemul GPG a mărimii de ieșire W_4 și a mărimilor de intrare V_4 și W_s. Canalul de legătură între V_4 și W_4 este de tip derivator, iar canalul de legătură între W_s și W_4 este de tip proporțional.

Simularea pe calculator analogic a dinamicii garniturii de foraj pe baza schemei de conexiuni reprezentate în figura 2 este dificil de realizat, atît din motive de complexitate (chiar și în cazul considerării numai a armonicii fundamentale), cît și datorită canalului pur derivator al subsistemului GPG.

Atunci cînd garnitura de prăjini obișnuite este (sau se consideră) alcătuită dintr-o singură porțiune omogenă, se poate depăși ultima dificultate de simulare analogică, printr-o altă alegere a mărimilor de intrare și de ieșire ale subsistemului GPO : vitezele de coborîre ale capetelor garniturii — mărimi de intrare, forțele de întindere la capatele garniturii — mărimi de ieșire (fig. 3).

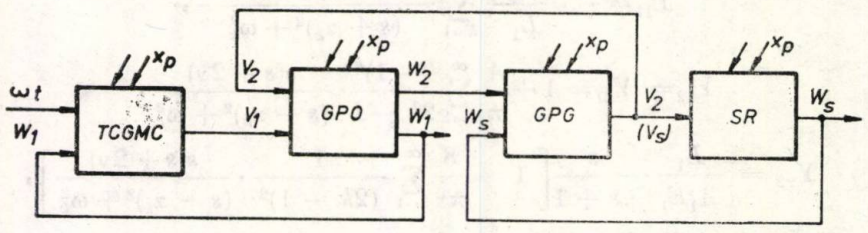


Fig. 3

Subsistemele TCGMC și SR rămîn definite ca în cazul precedent, iar subsistemul GPG conține două canale pur integratoare, ușor de simulat.

În continuare, se va determina modelul matematic al garniturii omogene GPO cu noile mărimi de intrare și de ieșire, iar apoi, prin metoda separării variabilelor se calculează funcțiile de transfer pe toate cele patru canale intrare-ieșire.

2. MODELUL MATEMATIC AL GARNITURII DE PRĂJINI OBIȘNUITE

Să considerăm o garnitură de prăjini obișnuite, avînd ca mărimi de intrare viteza de coborîre a capătului superior V_1 și viteza de coborîre a capătului inferior V_2, iar ca mărimi de ieșire forța de întindere a capătului superior W_1 și forța de întindere a capătului inferior W_2 (fig. 4).

Variabila spațială x desemnează poziția unui punct al materialului tubular față de capătul superior al garniturii, în condițiile graniturii nedeformate, iar funcțiile $u(t, x)$ și $U(t, x)$ exprimă poziția punctului material de coordonată x față de capătul superior al garniturii, respectiv față de un reper fix, în condițiile garniturii deformate :

$$U(t,x) = u(t,x) + S_1(t). \qquad (15)$$

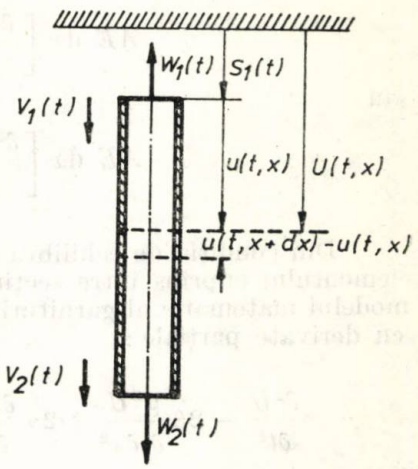


Fig. 4

Asupra unui element al materialului tubular cuprins între două secțiuni infinit apropiate, de coordonate x și $x + \mathrm{d}x$, acționează următoarele forțe :

— forța de inerție :

$$A\,\mathrm{d}x\,\rho\,\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}; \qquad (16)$$

— forțele longitudinale de natură elasto-disipativă :

$$A[\,\sigma(t,x+\mathrm{d}x) - \sigma(t,x)] = A\,\frac{\partial\,\sigma(t,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}x, \qquad (17)$$

unde σ reprezintă efortul unitar longitudinal de întindere ;

— forța de frecare vîscoasă :

$$\varepsilon\,\frac{\partial\,U(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,; \qquad (18)$$

— greutatea :

$$A\,\mathrm{d}x\,\rho g\,; \qquad (19)$$

— forța de frecare uscată cu fluidul de foraj și pereții găurii de sondă :

$$q(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{sign}\,\frac{\partial\,U(t,x)}{\partial t}\,. \qquad (20)$$

Deoarece se presupune că materialul tubular satisface modelul Kelvin al corpurilor elasto-disipative :

$$\sigma(t) = E[\,\varepsilon(t) + \mu\,\dot{\varepsilon}(t)], \qquad (21)$$

unde $\varepsilon(t)$ reprezintă deformaţia relativă, în conformitate cu relaţia (17). expresia forţei rezultante elasto-disipative care acţionează asupra porţiunii elementare a garniturii, capătă următoarea formă :

$$AE\ \mathrm{d}x\left[\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t\partial x^2}\right], \tag{22}$$

sau

$$AE\ \mathrm{d}x\left[\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^3 U(t,x)}{\partial t\partial x^2}\right]. \tag{23}$$

Din condiţia de echilibru al tuturor forţelor care acţionează asupra elementului cuprins între secţiunile de coordonate x şi $x+\mathrm{d}x$, rezultă modelul matematic al garniturii de prăjini, sub forma următoarei ecuaţii cu derivate parţiale :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-2\beta\frac{\mu^3 U}{\partial t\partial x^2}+2\nu\frac{\partial U}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=g-q_1(x)\operatorname{sign}\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{24}$$

unde

$$\beta=\frac{\mu E}{2\rho},\quad \nu=\frac{\varepsilon}{2A\rho},\quad c^2=\frac{E}{\rho},\quad q_1(x)=\frac{q(x)}{A\rho}. \tag{25}$$

Acest model matematic trebuie completat cu condiţiile la limită :

$$\left.\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right|_{x=0}=V_1(t), \tag{26}$$

$$\left.\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right|_{x=L}=V_2(t) \tag{27}$$

şi condiţiile iniţiale :

$$U(t,x)\,|_{t=0}=f_1(x), \tag{28}$$

$$\left.\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=f_2(x). \tag{29}$$

CALCULUL FUNCŢIILOR DE TRANSFER ALE GARNITURII DE PRĂJINI OBIŞNUITE

În ipoteza neglijării forţelor de frecare uscată ale graniturii cu fluidul de foraj şi pereţii găurii de sondă ($q_1(x)\equiv 0$), modelul matematic al garniturii este liniar, iar dependenţa în regim dinamic a mărimilor de ieşire W_1 şi W_2 în raport cu mărimile de intrare V_1 şi V_2 se poate exprima prin intermediul funcţiilor de transfer.

În vederea determinării acestor funcţii de transfer, se consideră că la momentul iniţial $t = 0$, garnitura de prăjini se găseşte într-un regim staţionar, caracterizat prin condiţiile iniţiale :

$$f_1(x) = -\frac{g - 2\nu V_1(0)}{2c^2}x^2 + \left[\frac{g - 2\nu V_1(0)}{c^2}L + 1 + \frac{W_2(0)}{AE}\right]x, \quad (30)$$

$$f_2(x) = V_1(0). \quad (31)$$

Se lucrează în patru etape.

Etapa I. Cu schimbarea de funcţie,

$$U(t,x) = R(t,x) + \int_0^t V_1(t)\mathrm{d}t + \frac{x}{L}\left[\int_0^t V_2(t)\mathrm{d}t - \int_0^t V_1(t)\mathrm{d}t\right] + f_1(x), \quad (32)$$

ecuaţia (24) se transformă în următoarea :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - 2\beta\frac{\partial^3 R}{\partial t\,\partial x^2} + 2\nu\frac{\partial R}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = G(t,x), \quad (33)$$

în care

$$G(t,x) = -\dot{V}_1(t) - 2\nu[V_1(t) - V_1(0)] + \frac{x}{L}[\dot{V}_1(t) - \dot{V}_2(t) + 2\nu(V_1(t) - V_2(t))], \quad (34)$$

cu condiţii la limită şi iniţiale zero :

$$\left.\frac{\partial R(t,x)}{\partial t}\right|_{x=0} = 0, \quad (35)$$

$$\left.\frac{\partial R(t,x)}{\partial t}\right|_{x=L} = 0, \quad (36)$$

respectiv

$$R(t,x)|_{t=0} = 0, \quad (37)$$

$$\left.\frac{\partial R(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \quad (38)$$

Etapa II. Fie $R_1(t, x)$ soluţia ecuaţiei omogene

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - 2\beta\frac{\partial^3 R}{\partial t\,\partial x^2} + 2\nu\frac{\partial R}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0, \quad (39)$$

în cazul condiţiilor la limită zero şi al condiţiilor iniţiale,

$$R(t,x)\big|_{t=0} = 0, \tag{40}$$

$$\left.\frac{\partial R(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x). \tag{41}$$

Soluţia $R_1(t, x)$ se determină prin metoda separării variabilelor. Se scrie

$$R(t,x) = T(t)X(x), \tag{42}$$

iar din (39) rezultă

$$\frac{\ddot{T} + 2\nu\dot{T}}{2\beta\dot{T} + c^2T} = \frac{\ddot{X}}{X} = -\lambda^2, \quad \lambda > 0. \tag{43}$$

Raportul de mai sus s-a presupus negativ, deoarece în caz contrar, din condiţiile la limită zero se obţine soluţia banală $X(x) = 0$.

Din (43) rezultă

$$\ddot{X} + \lambda^2 X = 0, \tag{44}$$

cu soluţia

$$X(x) = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x, \tag{45}$$

şi

$$\ddot{T} + 2(\nu + \beta\lambda^2)\dot{T} + c^2\lambda^2 T = 0, \tag{46}$$

cu soluţia

$$T(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t), \tag{47}$$

unde

$$\alpha = \nu + \beta\lambda^2, \tag{48}$$

$$\omega = \sqrt{c^2\lambda^2 - (\nu + \beta\lambda^2)^2}\ . \tag{49}$$

Din condiţiile la limită zero, se obţine

$$X(0) = X(L) = 0, \tag{50}$$

de unde rezultă

$$C = 0, \tag{51}$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L}\ , \ k - \text{întreg pozitiv}. \tag{52}$$

În conformitate cu (42), avem:

$$R(t,\ x) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\sin\lambda x, \tag{53}$$

iar din (52) rezultă:

$$R_1(t,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha_k t}(A_k\cos\omega_k t + B_k\sin\omega_k t)\sin\frac{k\pi}{L}x. \tag{54}$$

Din condiția inițială (40) se obține egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin\frac{k\pi}{L}x = 0,\quad x\in[0,\ L], \tag{55}$$

care implică

$$A_k = 0,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{56}$$

În continuare, din condiția inițială (41) se obține egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k\omega_k\sin\frac{k\pi}{L}x = g(x). \tag{57}$$

Dacă se prelungește funcția $g(x)$ pe intervalul $[-L,\ L]$, astfel încît

$$g(-x) = -g(x), \tag{58}$$

seria Fourier a funcției impare $g(x)$ cu perioada $2L$, se scrie astfel:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,dx\right]\sin\frac{k\pi}{x}x. \tag{59}$$

Prin compararea relațiilor (57) și (59), reiese că

$$B_k = \frac{2}{L\,\omega_k}\int_0^L g(x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,dx,\ k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{60}$$

iar soluția $R_1(t,\ x)$ capătă forma finală:

$$R_1(t,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{L\omega_k}\left[\int_0^L g(x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,dx\right]e^{-\alpha_k t}\sin\omega_k t\sin\frac{k\pi}{L}x. \tag{61}$$

Etapa III. Vom arăta că funcția

$$R(t,x) = \int_0^t R_2(t-\tau,\ x,\ \tau)\,d\tau\ , \tag{62}$$

în care $R_2(t,\ x,\ \tau)$ este $R_1(t,\ x)$ pentru $g(x) = G(\tau,\ x)$, constituie soluția ecuației neomogene (33) de la etapa I, satisfăcînd condițiile la limită și inițiale zero.

Avem :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = R_2(0,\ x,\ t) + \int_0^t \frac{\partial R_2}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{\partial R_2}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau, \tag{63}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = \frac{\partial R_2(0,\ x,\ t)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial^2 R_2}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\tau = G(t,\ x) + \int_0^t \frac{\partial^2 R_2}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\tau, \tag{64}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \int_0^t \frac{\partial R_2}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau, \tag{65}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 R_2}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\tau, \tag{66}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t\,\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^3 R_2}{\partial t\,\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau, \tag{67}$$

de unde rezultă :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - 2\beta \frac{\partial^3 R}{\partial t\,\partial x^2} + 2\nu \frac{\partial R}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = G(t,\ x) +$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial t^2} - 2\beta \frac{\partial^3 R_2}{\partial t\,\partial x^2} + 2\nu \frac{\partial R_2}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} \right] \mathrm{d}\tau. \tag{68}$$

Deoarece $R_2(t - \tau,\ x,\ \tau)$ satisface ecuația omogenă (39), integrala din membrul drept al ecuației (68) este egală cu zero, rezultînd că funcția $R(t,\ x)$ verifică ecuația neomogenă (33).

De asemenea, din (62) și (63) rezultă :

$$R(t,\ x)\Big|_{x=0} = \frac{\partial R(t,\ x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{69}$$

iar din (63) :

$$\frac{\partial R(t,\ x)}{\partial t}\Big|_{x=0} = \int_0^t \frac{\partial R_2(t - \tau,\ 0,\ \tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau = 0, \tag{70}$$

$$\frac{\partial R\,(t,\ x)}{\partial t}\Big|_{x=L} = \int_0^t \frac{\partial R_2\,(t - \tau,\ L,\ \tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau = 0. \tag{71}$$

Ținînd seama de relația (61), avem:

$$R_2(t-\tau,\ x,\ \tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{L\omega_k}\sin\frac{k\pi}{L}x\mathrm{e}^{-\alpha k(t-\tau)}\sin\omega_k(t-\tau)\times$$

$$\times\int_0^L G(\tau,x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,\mathrm{d}x, \tag{72}$$

iar din (62), rezultă:

$$R(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{L\omega_k}\sin\frac{k\pi}{L}x\int_0^t\Big[\mathrm{e}^{-\alpha k(t-\tau)}\sin\omega_k(t-\tau)\times$$

$$\times\int_0^L G(\tau,x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}\tau. \tag{73}$$

Cu notațiile

$$\Delta U(t,\ x)=U(t,\ x)-U(0,\ x), \tag{74}$$

$$\Delta V_1(t,\ x)=V_1(t,\ x)-V_1(0,\ x), \tag{75}$$

$$\Delta V_2(t,\ x)=V_2(t,\ x)-V_2(0,\ x), \tag{76}$$

pe baza relațiilor (32), (34) și (73), se obține:

$$\Delta U(t,\ x)=V_1(0)t+\int_0^t\Delta V_1(t)\mathrm{d}t+\frac{x}{L}\int_0^t[\Delta V_2(t)-\Delta V_1(t)]\mathrm{d}t+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{L\omega_k}\sin\frac{k\pi}{L}x\int_0^t\Big[\mathrm{e}^{-\alpha_k(t-\tau)}\sin\omega_k(t-\tau)\int_0^L G(\tau,x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}\tau, \tag{77}$$

unde

$$G(\tau,x)=-\Delta\dot V_1(\tau)-2\nu\Delta V_1(\tau)+\frac{x}{L}[\Delta_1\dot V(\tau)-\Delta\dot V_2(\tau)+$$

$$+2\nu[\Delta V_1(\tau)-\Delta V_2(\tau))]. \tag{78}$$

Etapa IV. Prin aplicarea transformării Laplace relației (77), rezultă:

$$U(s,\ x)=\frac{1}{s^2}V_1(0)+\frac{1}{s}V_1(s)+\frac{x}{Ls}(V_2(s)-V_1(s))+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{L\omega_k}\sin\frac{k\pi}{L}x\times$$

$$\times\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\alpha k t}\sin\omega_k t]\cdot\mathscr{L}\Big[\int_0^L G(t,x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,\mathrm{d}x\Big]. \tag{79}$$

Deoarece

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha_k t}\sin\omega_k t]=\frac{\omega_k}{(s+\alpha_k)^2+\omega_k^2}, \tag{80}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^L G(t,x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,dx\right]=\int_0^L G(s,x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,dx, \tag{81}$$

iar

$$G(s,x)=(s+2\nu)\left[-V_1(s)+\frac{x}{L}(V_1(s)-V_2(s))\right], \tag{82}$$

transformata Laplace $U(s, x)$ devine astfel:

$$U(s,x)=\frac{1}{s^2}V_1(0)+\frac{1}{s}V_1(s)+\frac{x}{Ls}[V_2(s)-V_1(s)]+$$

$$+\frac{2}{k\pi}(s+2\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{L}x}{(s+\alpha_k)^2+\omega_k^2}[-V_1(s)+(-1)^k V_2(s)]. \tag{83}$$

Din expresia forței de întindere a garniturii:

$$W(t,x)=AE\left[\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}-1+\mu\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t\,\partial x}\right], \tag{84}$$

rezultă

$$\Delta W(t,x)=AE\left[\frac{\partial \Delta U(t,x)}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 \Delta U(t,x)}{\partial t\,\partial x}\right], \tag{85}$$

$$W(s,x)=AE(1+\mu s)\frac{\partial U(s,x)}{\partial x}, \tag{86}$$

iar din (83) se obține

$$W(s,x)=\frac{AE}{L}(1+\mu s)\left\{\frac{1}{s}(V_2(s)-V_1(s))+2(s+2\nu)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{k\pi}{L}x}{(s+\alpha_k)^2+\omega_k^2}[-V_1(s)+(-1)^k V_2(s)]\right\}. \tag{87}$$

Pentru $x = 0$, din (87) rezultă expresia sarcinii la cîrlig:

$$W_1(s,x) = \frac{AE}{L}(1+\mu s)\left[\frac{1}{s}(V_2(s) - V_1(s)) + 2(s+ \right.$$

$$\left. + 2\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-V_1(s)+(-1)^k V_2(s)}{(s+\alpha_k)^2+\omega_k^2}\right], \qquad (88)$$

iar pentru $x = L$, expresia sarcinii la capătul inferior al garniturii:

$$W_2(s,\ x) = \frac{AE}{L}(1+\mu s)\left[\frac{1}{s}(V_2(s) - V_1(s)) + 2(s+ \right.$$

$$\left. 2\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-(-1)^k V_1(s)+V_2(s)}{(s+\alpha_k)^2+\omega_k^2}\right]. \qquad (89)$$

Pe baza relaţiilor (88) şi (89), în figurile 5 şi 6 s-au reprezentat schemele de calcul al mărimilor de ieşire W_1 şi W_2 în raport cu mărimile de intrare V_1 şi V_2.

Funcţiile de transfer ale garniturii:

$$Y_{11}(s)=\frac{W_1(s)}{V_1(s)}, \quad Y_{12}(s) = \frac{W_1(s)}{V_2(s)}, \quad Y_{21}(s) = \frac{W_2(s)}{V_1(s)}, \quad Y_{22}(s) = \frac{W_2(s)}{V_2(s)}, \qquad (91)$$

au următoarele expresii:

$$Y_{11}(s) = -Y_{22}(s) = -\frac{AE}{L}(1+\mu s)\left[\frac{1}{s}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s+2\nu}{(s+\alpha_k)^2+\omega_k^2}\right], \qquad (91)$$

$$Y_{12}(s) = -Y_{21}(s) = \frac{AE}{L}(1+\mu s)\left[\frac{1}{s}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(s+2\nu)}{(s+\alpha_k)^2+\omega_k^2}\right]. \qquad (92)$$

4. CONCLUZII

Determinarea modelului matematic al graniturii de foraj şi simularea dinamicii acesteia în urma prelucrării convenabile a modelului matematic iniţial al garniturii de prăjini obişnuite, în sensul transformării acestuia — o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul III, în care mărimile de intrare intervin prin intermediul condiţiilor la limită, într-un model matematic cu dependenţă explicită între mărimile de ieşire şi cele de intrare, constituie o metodă eficientă de evaluare atît calitativă, cît şi cantitativă a eforturilor care apar în timpul exploatării instalaţiei de foraj şi, de asemenea, un pas important în proiectarea unor sisteme optimale de avans al sapei

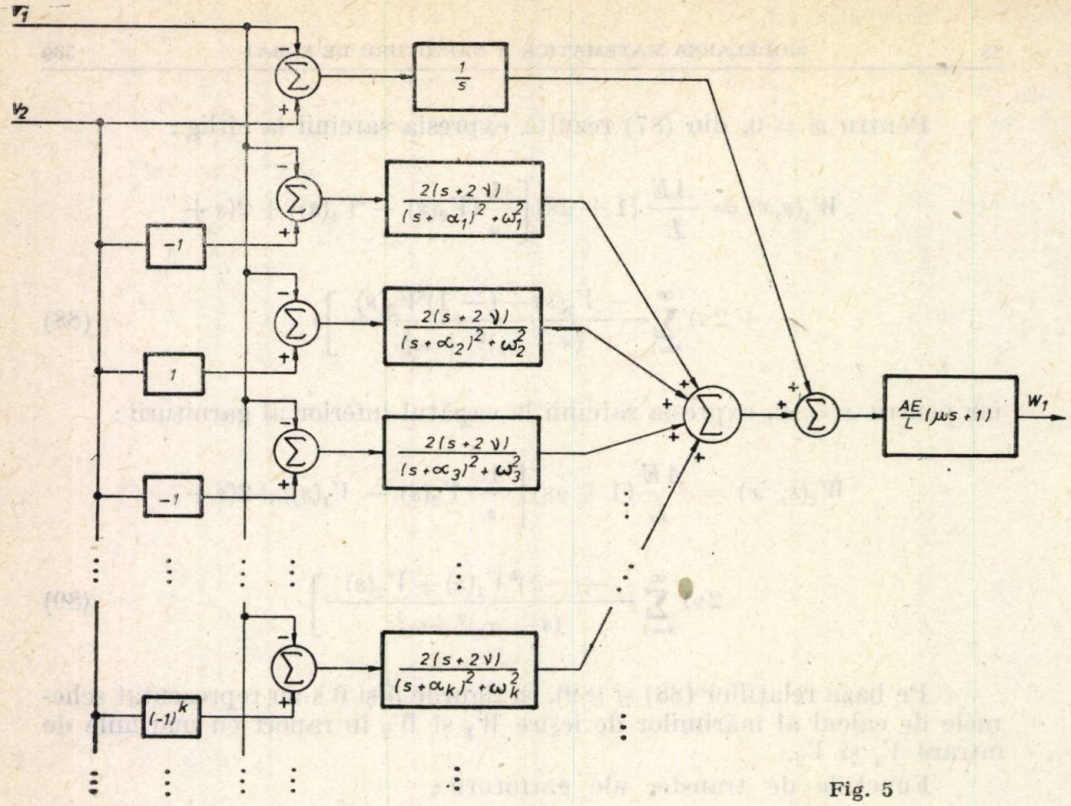

V1
V2
1/s
2(s+2γ)/((s+α1)²+ω1²)
2(s+2γ)/((s+α2)²+ω2²)
2(s+2γ)/((s+α3)²+ω3²)
2(s+2γ)/((s+αk)²+ωk²)
-1
1
-1
(-1)^k
AE/L (μs+1)
W1

Fig. 5

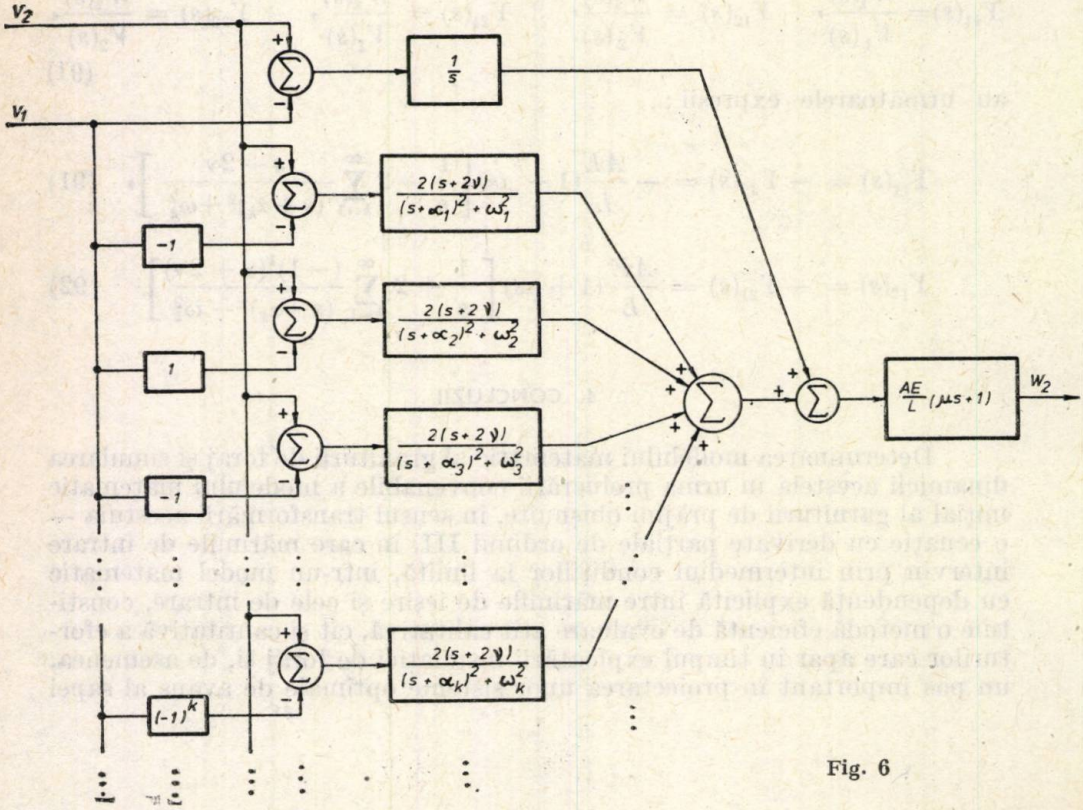

V2
V1
1/s
2(s+2γ)/((s+α1)²+ω1²)
2(s+2γ)/((s+α2)²+ω2²)
2(s+2γ)/((s+α3)²+ω3²)
2(s+2γ)/((s+αk)²+ωk²)
-1
1
-1
(-1)^k
AE/L (μs+1)
W2

Fig. 6

de foraj şi de acţionare a garniturii de prăjini în cadrul procesului de manevră.

Prin neglijarea forţelor de frecare uscată cu fluidul de foraj şi pereţii găurii de sondă, garnitura de foraj se comportă în regim dinamic ca un sistem liniar. Obţinerea modelului matematic şi calculul funcţiilor de transfer s-au efectuat în ipoteza satisfacerii de către materialul tubular din componenţa garniturii de prăjini obişnuite a modelului Kelvin al corpurilor elasto-disipative. De asemenea, au fost luate în consideraţie forţele de frecare vîscoasă dintre granitură şi fluidul de foraj.

Din expresiile funcţiilor de transfer calculate rezultă caracterul amortizat al oscilaţiilor ce caracterizează dinamica graniturii de prăjini obişnuite.

Studierea teoretică a dinamicii garniturii de foraj şi confruntarea rezultatelor obţinute prin simulare, cu cele determinate experimental la instalaţiile de foraj existente, va permite utilizarea cu succes a modelului matematic găsit la instalaţiile de foraj de foarte mare adîncime, aflate deja în fază de proiectare.

Primită la redacţie la 14 ianuarie, 1981

BIBLIOGRAFIE

1. V. S. VLADIMIROV, *Ecuaţiile fizicii matematice*, Edit. ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1980.
2. D. DAREING, B. LIVESAY, *Longitudinal and angular drill-string vibrations with damping*, K. T. M., *4* (1968).
3. Z. KERIMOV, M. SADÎHOV, *Issledovanie prodol'nîh kolebanij kolonnî buril'nîh trub pri burenii*, Neft'i gaz, *9* (1971).

APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN CALCULUL BARELOR CURBE PLANE

de ALEXANDRU POPA
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

Prin aplicarea teoriei distribuțiilor se stabilește expresia sarcinii continuu distribuite pentru diferite tipuri de încărcări concentrate (forțe și cupluri) sau sarcini discontinuu distribuite în cazul barelor plane încărcate cu forțe situate în planul barei. Cazul general este particularizat pentru barele curbe circulare plane prin stabilirea expresiilor eforturilor secționale N, T, M într-o secțiune curentă. Exemplul de calcul prezentat ilustrează modul de aplicare a teoriei.

Considerînd o bară curbă plană, solicitată de forțe situate în planul barei și adoptînd un sistem de referință intrinsec (Frenet) stîng (fig. 1), eforturile secționale într-o secțiune curentă se reduc la: $N = N(s)$ — forța axială; $T = T(s)$ — forța tăietoare și $M = M(s)$ — momentul încovoietor, unde s reprezintă coordonata curbilinie a secțiunii curente față de originea A_0.

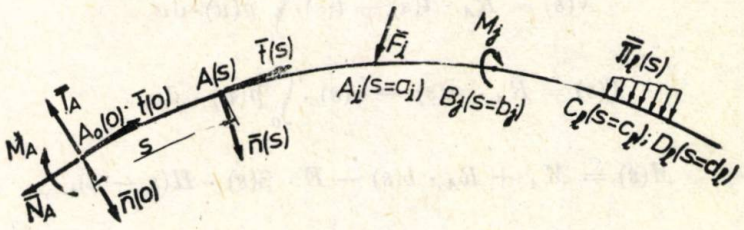


Fig. 1

Respectînd convențiile de semne uzuale din rezistența materialelor, relațiile diferențiale dintre eforturi și încărcări, [1], sînt:

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T}{\rho}, \tag{1a}$$

$$\frac{dT}{ds} = -p_n + \frac{N}{\rho}, \tag{1b}$$

$$\frac{dM}{ds} = +T, \tag{1c}$$

în care ρ este raza de curbură în punctul curent, iar

$$p_t = p_t(s) = \bar{p}(s) \cdot \bar{t}(s),$$
$$p_n = p_n(s) = \bar{p}(s) \cdot \bar{t}(s) \tag{2}$$

sînt componentele încărcării distribuite, descompuse după tangentă, respectiv normală. Celelalte simboluri au semnificațiile cunoscute.

Ne propunem, prin folosirea funcțiilor generalizate, să tratăm încărcările concentrate (forțe, cupluri concentrate) sau încărcările distribuite discontinuu ca încărcări distribuite continuu.

1. CAZUL FORȚELOR CONCENTRATE

Fie A_0 ($s = 0$) originea arcelor de curbă (coordonata curbilinie) s și A_1 ($s = a$) punctul de aplicație al forței $\bar{F}$, orientată oricum în planul curbei (fig. 1). În general, în punctul A_0 acționează forța de legătură $\bar{R}_A = \bar{N}_A + \bar{T}_A$ și momentul de legătură M_A, care, în particular, pot fi parțial sau în totalitate nule.

Adoptînd un semn de parcurgere a barei de la stînga la dreapta și referindu-ne la corpul din stînga secțiunii curente (corp ce conține punctul A_0), eforturile secționale sînt:

$$N(s) = \bar{R}_A \cdot \bar{t}(s) - \bar{t}(s) \cdot \int_0^s \bar{p}(u) \cdot \mathrm{d}u \tag{3a}$$

$$T(s) = \bar{R}_A \cdot \bar{n}(s) - n(s) \cdot \int_0^s \bar{p}(u) \cdot \mathrm{d}u, \tag{3b}$$

$$M(s) = M_A + R_A \cdot b(s) - E \cdot \beta(s) \cdot H(s - a), \tag{3c}$$

în care

$\bar{p}(s)$ reprezintă sarcina unitară distribuită, necunoscută, care înlocuiește forța concentrată $\bar{F}$;

u — variabila curentă cu $u \in [0, s]$;

$b(s)$ — brațul forței de legătură $\bar{R}_A$ în raport cu punctul curent de pe bară;

$\beta(s)$ — brațul forței $\bar{F}$ în raport cu același punct curent;

$H(s-a)$ — funcția lui Heaviside definită după cum se știe prin:

$$H(s - a) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } s > a, \\ 0 \text{ pentru } s < a. \end{cases} \tag{4}$$

Se poate verifica imediat că, notînd cu $\bar{v}$ versorul forței de legătură $\bar{R}_A$ și cu $\bar{w}$ versorul forței concentrate $\bar{F}$, avem:

$$\frac{\mathrm{d}\, b(s)}{\mathrm{d}s} = \bar{n} \cdot \bar{v}; \quad \frac{\mathrm{d}\beta(s)}{\mathrm{d}s} = \bar{n} \cdot \bar{w}. \tag{5}$$

Derivînd în raport cu variabila s, în sensul teoriei distribuţiilor, relaţiile (3), obţinem :

$$\frac{dN}{ds} = \bar{R}_A \cdot \frac{d\bar{i}}{ds} - \frac{d\bar{t}}{ds} \cdot \int_0^s \bar{p}(u) \cdot du - \bar{t} \cdot \bar{p}(s) = \frac{\bar{R}_A \cdot \bar{n}}{\rho} - \frac{\bar{n}}{\rho} \cdot \int_0^s \bar{p}(u) \cdot du - \bar{t} \cdot p(s) = \frac{T}{\rho} - p_t, \tag{6a}$$

$$\frac{dT}{ds} = \bar{R}_A \cdot \frac{d\bar{n}}{ds} - \frac{d\bar{n}}{ds} \cdot \int_0^s \bar{p}(u) \cdot du - \bar{n} \cdot \bar{p}(s) = -\frac{\bar{R}_A \cdot \bar{t}}{\rho} + \frac{\bar{t}}{\rho} \int_0^s \bar{p}(u) \cdot du - \bar{n} \cdot \bar{p}(s) = -\frac{N}{\rho} - p_n, \tag{6b}$$

$$\frac{dM}{ds} = R_A \cdot \frac{db(s)}{ds} - F \cdot \frac{d\beta(s)}{ds} \cdot H(s-a) - F \cdot \beta(s) \cdot \delta(s-a) = \bar{R}_A \cdot \bar{n} - \bar{F} \cdot \bar{n} \cdot H(s-a) \tag{6c}$$

deoarece [2] $\beta(s) \cdot \delta(s-a) = \beta(a) \cdot \delta(s-a) = 0$,
$\beta(a) = 0$ fiind braţul forţei concentrate $\bar{F}$ în raport cu punctul de aplicaţie al forţei. Se constată că relaţiile (6a) şi (6b) sînt identice cu relaţiile (1a) şi (1b). Din identificarea relaţiei (6c) cu (1c) şi, respectiv, cu (3a), rezultă

$$\bar{n} \cdot \int_0^s \bar{p}(u) \cdot du = \bar{F} \cdot \bar{n} \cdot H(s-a). \tag{7}$$

Rezultă prin derivarea factorilor care înmulţesc versorul $\bar{n}$ că

$$\bar{p}(s) = \bar{F} \cdot \delta(s-a), \tag{8}$$

în care $\delta(s-a)$ reprezintă distribuţia lui Dirac, deoarece prin derivarea în sensul teoriei distribuţiilor a funcţiei lui Heaviside rezultă [2] :

$$\frac{dH(s-a)}{ds} = \delta(s-a). \tag{9}$$

2. CAZUL CUPLURILOR CONCENTRATE

Considerînd că în punctul $B_1(s=b)$ acţionează cuplul concentrat de intensitate M_1 (fig. 1) şi procedînd în mod similar ca în cazul forţelor concentrate, avem :

$$N(s) = \bar{R}_A \cdot \bar{i}(s) - \bar{i}(s) \cdot \int_0^s \bar{p}(u) \cdot du, \tag{10 a}$$

$$T(s) = \bar{R}_A \cdot \bar{n}(s) - \bar{n}(s) \cdot \int_0^s \bar{p}(u) \cdot \mathrm{d}u, \tag{10b}$$

$$M(s) = M_A + R_A \cdot b(s) + M_1 \cdot H(s - b). \tag{10 c}$$

Prin derivarea în sensul teoriei distribuţiilor a relaţiilor (10), în raport cu variabila s, rezultă verificarea identică a relaţiilor (1 a) şi (1 b). Din condiţia de verificare a relaţiei (1 c) prin înlocuirea mărimilor date de relaţiile (10 c) şi (10 a), rezultă :

$$\bar{n}(s) \cdot \int_0^s \bar{p}(u) \cdot \mathrm{d}u = - M_1 \,.\, \delta(s - b). \tag{11}$$

Presupunînd primitiva $\bar{P}(s) = \int_0^s \bar{p}(u) \cdot \mathrm{d}u$ orientată numai după direcţia versorului $\bar{n}(s)$, rezultă

$$\bar{P}(s) = - M_1 \cdot \delta(s - b) \cdot \bar{n}(s). \tag{12}$$

Derivînd în sensul teoriei distribuţiilor relaţia (12), în raport cu variabila s, avem :

$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}(s)}{\mathrm{d}s} = \bar{p}(s) = - M_1 \cdot \delta'(s - b) \cdot \bar{n}(s) - M_1 \cdot \delta(s - b) \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{n}(s)}{\mathrm{d}s} = \tag{13}$$

$$= + \frac{M_1 \,.\, \delta(s - b)}{\rho} \cdot \bar{t}(s) - M_1 \cdot \delta'(s - b) \cdot \bar{n}(s),$$

ceea ce conduce la relaţiile :

$$p_t(s) = \frac{M_1 \cdot \delta(s - b)}{\rho}, \qquad p_n(s) = - M_1 \,.\, \delta(s - b). \tag{13'}$$

Se poate constata că în cazul barei drepte se regăsesc rezultatele obţinute în lucrarea [2].

3. CAZUL SARCINILOR DISTRIBUITE DISCONTINUU

Considerînd o sarcină $\bar{\pi}(s)$ distribuită pe o zonă între punctele $C(s = c)$ şi $D(s = d)$, aceasta poate fi scrisă prin intermediul funcţiilor generalizate ca :

$$\bar{p}(s) = \bar{\pi}(s) \cdot [H(s - c) - H(s - d)]. \tag{14}$$

4. FORMA GENERALĂ A SARCINII CONTINUU DISTRIBUITE

În ipoteza că bara este acționată de : m forțe concentrate $\bar{F}_i$ în punctele $A_i (i = 1, 2, \ldots, m)$; r cupluri concentrate de intensități M_j în punctele $B_j (j = 1, 2, \ldots r)$; h sarcini discontinuu distribuite $\bar{\pi}_l(s)$ ce acționează pe intervalele $C_l D_l$ $(l = 1, 2, \ldots, h)$ și de sarcina continuu distribuită $\bar{q}(s)$, prin suprapunerea efectelor cazurilor analizate, rezultă

$$\bar{p}(s) = \bar{q}(s) + \sum_{i=1}^{m} \bar{F}_i \cdot \delta(s - a_i) + \sum_{j=1}^{r} \left[M_j \cdot \frac{\delta(s - b_j)}{\rho} \cdot \bar{t}(s) - M_j \cdot \right. \tag{15}$$

$$\left. \cdot \delta'(s - b_j) \cdot \bar{n}(s) \right] + \sum_{l=1}^{h} \bar{\pi}_l(s) \cdot [H(s - c_l) - H(s - d_l)],$$

expresie prin care se înlocuiesc încărcările concentrate printr-o sarcină continuu distribuită.

5. BARA CURBĂ CIRCULARĂ ÎNCĂRCATĂ CU O SARCINĂ DISTRIBUITĂ CONTINUU

Considerînd o bară curbă avînd forma unui arc de cerc, (fig. 2), încărcată cu o sarcină oarecare distribuită continuu, care în fiecare punct are componentele $p_t(\alpha)$ după tangentă și $p_n(\alpha)$ după normală, prin evidențierea unui element de arc, $du = R \cdot d\alpha$, se pot obține pentru eforturilor secționale într-un punct curent expresiile :

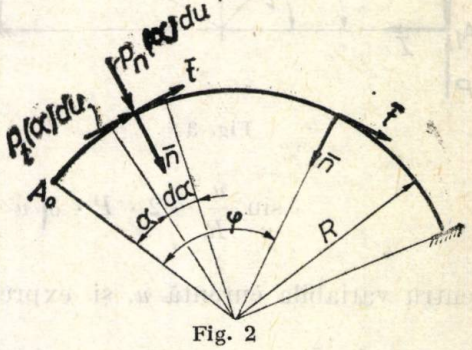


Fig. 2

$$N = -\int_0^{\varphi} p_t(\alpha) \cdot du \cdot \cos(\varphi - \alpha) -$$

$$-\int_0^{\varphi} p_n(\alpha) \cdot du \cdot \sin(\varphi - \alpha) =$$

$$= -R\int_0^{\varphi} [p_t(\alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha) + p_n(\alpha) \cdot \tag{16}$$

$$\cdot \sin(\varphi - \alpha)] \cdot d\alpha,$$

$$T = +\int_0^{\varphi} p_t(\alpha) \cdot du \cdot \sin(\varphi - \alpha) - \int_0^{\varphi} p_n(\alpha) \cdot du \cdot \cos(\varphi - \alpha) =$$

$$= +R\int_0^{\varphi} [p_t(\alpha) \cdot \sin(\varphi - \alpha) - p_n(\alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)] \cdot d\alpha, \tag{17}$$

$$M = +\int_0^{\varphi} p_t(\alpha) \cdot du \cdot R \cdot [1 - \cos(\varphi - \alpha)] - \int_0^{\varphi} p_n(\alpha) \cdot du \cdot R \cdot \sin(\varphi - \alpha) =$$

$$= +R^2\int_0^{\varphi} \{p_t(\alpha) \cdot [1 - \cos(\varphi - \alpha)] - p_n(\alpha) \cdot \sin(\varphi - \alpha)\} d\alpha. \tag{18}$$

6. EXEMPLU DE CALCUL

Vom considera bara din figura 3 solicitată de două forţe P şi $2P$ verticale şi opuse, care acţionează în punctele $A_1(s = 0)$ şi $A_2\left(s = R \cdot \frac{\pi}{2}\right)$. Prin trecerea de la variabila s la variabila φ vom ţine cont de relaţia:

$$\delta(s - s_0) = \frac{1}{\frac{ds}{d\varphi}} \delta(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{R} \cdot \delta(\varphi - \varphi_0), \tag{19}$$

care rezultă imediat din egalitatea funcţiei lui Heaviside atît pentru argumentul s, cît şi pentru argumentul φ.

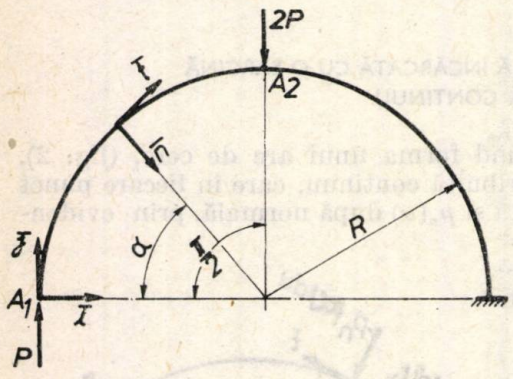


Fig. 3

Sarcina continuu distribuită va avea expresia:

$$\bar{p}(u) = +P \cdot \delta(u - 0) \cdot \bar{j} - 2 \cdot P \cdot \delta\left(u - R \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \bar{j} =$$

$$= \left[+P \cdot \delta(u - 0) \cdot \cos\frac{u}{R} - 2 \cdot P \cdot \delta\left(u - R \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\frac{u}{R} \right] \cdot \bar{t} + \left[-P \cdot \delta(u - 0) \cdot \sin\frac{u}{R} + 2 \cdot P \cdot \delta\left(u - R \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\frac{u}{R} \right] \cdot \bar{n}$$

pentru variabila curentă u, şi expresia

$$\bar{p}(\alpha) = \frac{1}{R} \cdot \left[+P \cdot \delta(\alpha - 0) \cdot \cos\alpha - 2 \cdot P \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\alpha \right] \cdot \bar{t} +$$

$$+ \frac{1}{R} \cdot \left[-P \cdot \delta(\alpha - 0) \cdot \sin\alpha + 2 \cdot P \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\alpha \right] \cdot \bar{n} =$$

$$= p_t(\alpha) \cdot \bar{t} + p_n(\alpha) \cdot \bar{n} \tag{20}$$

pentru variabila $\alpha = \frac{u}{R}$.

Înlocuind componentele sarcinii continuu distribuite din relaţia (20) în relaţiile (16), (17) şi (18), obţinem :

$$N(\varphi) = -\int_0^{\varphi} \left\{ \left[P \cdot \delta(\alpha - 0) - 2 \cdot P \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot \cos\alpha \cdot \cos(\varphi - \alpha) + \right.$$

$$\left. + \left[- P \cdot \delta(\alpha - 0) + 2 \cdot P \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\varphi - \alpha) \right\} \cdot d\alpha =$$

$$= - P \int_0^{\varphi} \delta(\alpha - 0) \cdot [\cos\alpha \cdot \cos(\varphi - \alpha) - \sin\alpha \cdot \sin(\varphi - \alpha)] \cdot d\alpha +$$

$$+ 2 \cdot P \int_0^{\varphi} \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot [\cos\alpha \cdot \cos(\varphi - \alpha) - \sin\alpha \cdot \sin(\varphi - \alpha)] \cdot d\alpha =$$

$$= -P \cdot \cos\varphi \int_0^{\varphi} \delta(\alpha - 0) \cdot d\alpha + 2 \cdot P \cdot \cos\varphi \int_0^{\varphi} \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot d\alpha =$$

$$= -P \cdot \cos\varphi \left[H(\varphi - 0) - 2 \cdot H\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right]. \tag{21}$$

Procedînd similar, rezultă :

$$T(\varphi) = \int_0^{\varphi} \left\{ \left[P \cdot \delta(\alpha - 0) - 2 \cdot P \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot \cos\alpha \cdot \sin(\varphi - \alpha) - \right.$$

$$\left. - \left[- P \cdot \delta(\alpha - 0) + 2 \cdot P \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot \sin\alpha \cdot \cos(\varphi - \alpha) \cdot d\alpha = \right. \tag{22}$$

$$= + P \cdot \sin\varphi \left[H(\varphi - 0) - 2 \cdot H\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right],$$

$$M(\varphi) = R \cdot \int_0^{\varphi} \left\{ \left[P \cdot \delta(\alpha - 0) - 2 \cdot P \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right] \cos\alpha [1 - \cos(\varphi - \alpha)] - \right.$$

$$\left. - \left[- P \cdot \delta(\alpha - 0) + 2 \cdot P \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right] \sin\alpha \cdot \sin(\varphi - \alpha) \right\} \cdot d\alpha = \tag{23}$$

$$= P \cdot R \cdot H(\varphi - 0) - P \cdot R \cdot \cos\varphi \cdot \left[H(\varphi - 0) - 2 \cdot H\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right].$$

În relația (23) s-a ținut cont de relațiile cunoscute :

$$\cos \alpha \cdot \delta(\alpha - 0) = \cos\ 0 \cdot \delta(\alpha - 0) = \delta(\alpha - 0);$$

$$\cos \alpha \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

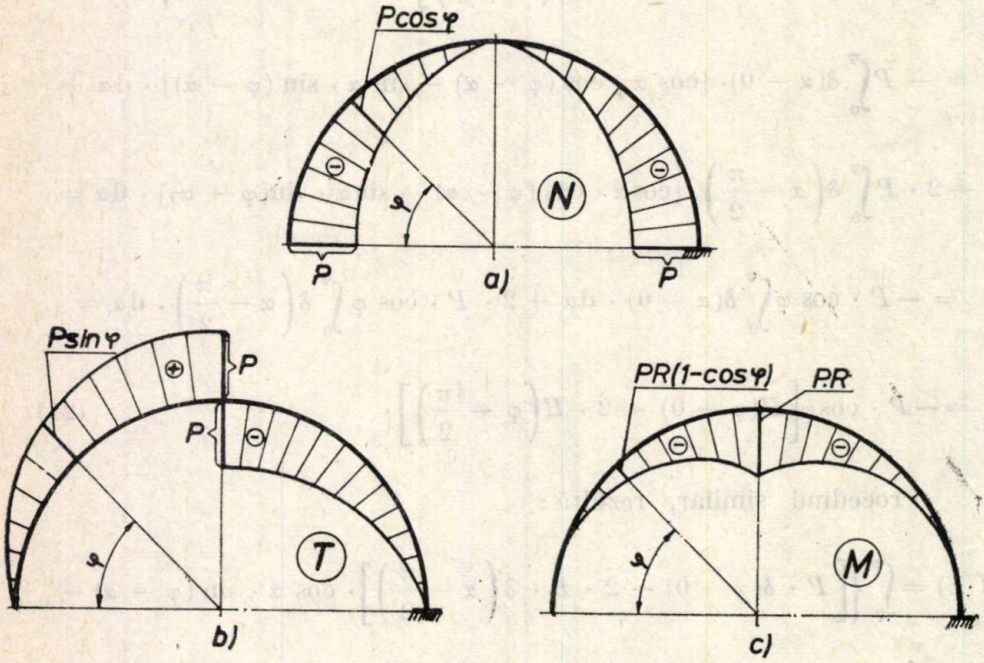


Fig. 4

Reprezentarea grafică a eforturilor secționale date de relațiile (21—23) este indicată în figurile 4 *a*, *b*, *c*.

7. CONCLUZII

A fost stabilită expresia sarcinii continuu distribuită pentru diferite tipuri de încărcări concentrate prin aplicarea teoriei distribuțiilor în cazul barelor curbe plane, cu particularizările corespunzătoare pentru barele curbe circulare plane cu forțele situate în planul barei, static determinate. Procedeul poate fi extins și pentru problemele static nedeterminate prin aplicarea metodelor cunoscute din rezistența materialelor.

De asemenea, extinderea metodei pentru bare curbe spațiale, precum și pentru bare curbe plane acționate de forțe neconținute de planul barei, este ușor de realizat și ar putea fi obiectivul unei lucrări viitoare.

Asemeni tuturor procedeelor de calcul care apelează la teoria distribuţiilor, şi metoda prezentată are o eficienţă cu atît mai mare cu cît numărul de discontinuităţi şi acţiuni concentrate este mai mare.

Prmită la redacţie la 14 ianuarie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. N. POSEA, *Rezistenţa materialelor*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.
2. E. TOCACI, *Fenomene discontinui în mecanică şi rezistenţa materialelor*, Edit. Academiei R.S.România, Bucureşti, 1974.

PLACA PLANĂ DREPTUNGHIULARĂ AVÎND DOUĂ LATURI ADIACENTE ÎNCASTRATE, IAR CELELALTE DOUĂ LIBERE

de VASILE ILLE, CORNEL BIA, IACOB BORȘ

Institutul politehnic Cluj-Napoca

Utilizînd pentru funcția deplasare w, soluție a ecuației plăcii, $\nabla^4 (Dw) = p$, o dezvoltare în serie dublă de funcții proprii ale vibrației barelor-consolă, într-o formulare de tip Bubnov-Galerkin, în lucrare se determină starea de tensiune și deformație în plăcile dreptunghiulare încastrate pe două laturi adiacente și liberă pe celelalte două laturi.

O problemă importantă și puțin studiată mai riguros în literatura de specialitate, o constituie determinarea stării de eforturi și deformații într-o placă plană dreptunghiulară avînd două laturi adiacente încastrate și celelalte două libere. Pentru această placă se dau tabele cuprinzînd mărimi ce nu descriu în totalitate și suficient de exact variația stării de eforturi și deformații în placă. Astfel de tabele sînt date în [3], [6], [7], [8], elaborate în baza unor metode aproximative.

Complicațiile ce apar în rezolvarea unei astfel de plăci constau în dificultatea precizării soluției ecuației diferențiale a plăcii care să satisfacă riguros condițiile de contur pe laturile libere.

Astfel, dacă $x = a$ (fig. 1) este o latură liberă, condițiile limită care trebuie satisfăcute sînt :

$$M_x(a, y) = 0, \qquad R_x(a, y) = 0 \tag{1}$$

sau

$$\left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x=a} = 0, \qquad \left| \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right|_{x=a} = 0. \tag{1'}$$

Aceste condiții se pot realiza în metoda diferențelor finite dar sînt introduse erori considerabile de însăși metoda de calcul.

În mod curent, în metoda elementelor finite, practic aceste condiții se pun numai din punct de vedere cinematic, lăsînd libere deplasările și rotirile în nodurile elementelor ce coincid cu latura liberă a plăcii.

În acest caz însă, dacă ne referim la colţul liber al plăcii în care concură cele două laturi libere, cum rotirile pe cele două direcţii x şi y sînt diferite de zero, existînd variaţii ale acestora în lungul axelor, va exista şi moment de torsiune şi, bineînţeles, „reacţiune" diferită de zero la colţ, care, neavînd cine o prelua, va conduce la erori importante în calcul.

O idee utilă în calculul plăcilor plane dreptunghiulare o oferă utilizarea funcţiilor formelor proprii de vibraţie ale barelor drepte, respectiv a funcţiilor formelor de pierdere a stabilităţii barei drepte [1], [7].

Utilizarea acestor funcţii conduce la realizarea riguroasă a condiţiilor limită în cazul plăcilor simplu rezemate pe contur (soluţia în serii duble trigonometrice) a plăcilor încastrate pe contur sau altă combinaţie care exclude laturile libere.

În cele ce urmează se va aplica metoda dezvoltării funcţiei săgeată w, după funcţiile formelor proprii de vibraţie ale consolei la rezolvarea plăcii cu două laturi adiacente încastrate şi celelalte două libere. În acest caz de-a lungul laturilor libere nu sînt satisfăcute decît condiţiile cinematice. Aplicînd însă metoda variaţională Bubnov-Galerkin, ţinînd seama şi de lucrul mecanic virtual al eforturilor secţionale de pe conturul liber [1], se obţin rezultate suficient de exacte pentru reprezentarea stării de tensiuni şi deformaţii.

Fie placa din figura 1 avînd două laturi adiacente încastrate, iar celelalte două laturi libere încărcată cu sarcina uniform distribuită p.

Pentru a determina starea de eforturi şi deformaţii în placă se alege pentru săgeata w expresia:

$$w = \sum_i \sum_j a_{ij}\, \Phi_i(x)\, \Psi_j(y). \tag{2}$$

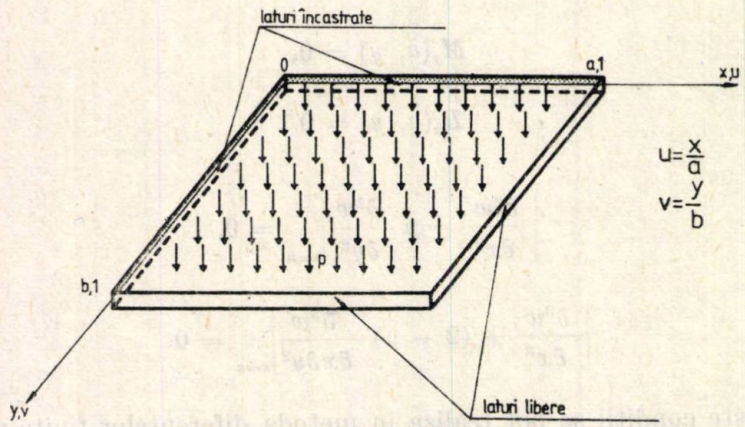


Fig. 1. — Placa plană încastrată pe două laturi adiacente liberă pe celelalte două.

În [2] funcţiile $\Phi_i(x)$, respectiv $\Psi_j(y)$ sînt funcţiile formelor proprii de vibraţie ale barei consolă reprezentate în figura 2 pentru primele trei moduri de vibraţie.

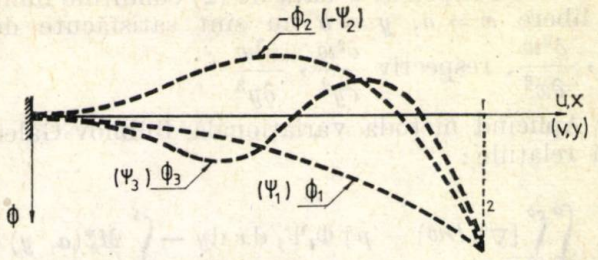


Fig. 2. — Formele proprii de vibraţie ale barei consolă pentru primele trei moduri.

Expresiile acestor funcţii sînt date de:

$$\Phi_i(x) = (\operatorname{ch} \alpha_i x - \cos \alpha_i x) - k_i(\operatorname{sh} \alpha_i x - \sin \alpha_i x),$$
$$\Psi_j(y) = (\operatorname{ch} \alpha_j y - \cos \alpha_j y) - k_j(\operatorname{sh} \alpha_j y - \sin \alpha_j y), \tag{3}$$

în care corespunzător modului normal de vibraţie α_i, α_j respectiv k_i, k_j au valorile date în tabelul 1 rezultate din teoria vibraţiilor sistemelor cu masă continuă [4].

Funcţiile Φ_i (respectiv Ψ_j) îndeplinesc condiţiile:

$$\Phi_i^{II}(x) = \alpha_i^2 \Phi_i(l - x),$$
$$\Phi_i^{IV}(x) = \alpha_i^4 \Phi_i(x), \tag{4}$$

$$\int_0^l \Phi_i(x)\, \Phi_m(x)\, \mathrm{d}x \begin{cases} = 0 & m \neq i, \\ \neq 0 & m = i, \end{cases}$$

utile în calculul integralelor ce intervin (ultima exprimă ortogonalitatea şirului funcţiilor Φ_i respectiv Ψ_j)

Tabelul 1

Valori proprii de vibraţie ale consolei

i, j	a_i, a_j	k_i, k_j
1	0,734096	1,875104
2	1,018466	4,694091
3	0,999225	7,854757
4	1,000034	10,995541
5	0,999999	14,137168
≥ 5	1,0	$\frac{(2i-1)\pi}{2}$

Pentru expresia w dată de (2) condiţiile limită (1′) de-a lungul laturilor libere $x = a$, $y = b$ nu sînt satisfăcute decît în primii termeni $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$, respectiv $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$.

Aplicînd metoda variaţională Bubnov-Galerkin, vom avea pentru placă relaţiile :

$$\int_0^a \int_0^b [\nabla^4(Dw) - p]\, \Phi_i \Psi_j \, dx\, dy - \int_0^b M_{x_i}^*(a, y)\, \Phi_i'(a)\, \Psi_i(y)\, dy +$$

$$+ \int_0^b R_x^*(a, y) \Phi_i(a) \Psi_j(y)\, dy - \int_0^a M_y^*(x, b)\, \Phi_i(x)\, \Psi_j'(b)\, dx + \qquad (5)$$

$$+ \int_a^a R_y^*(x, b) \Phi_i(x) \Psi_j(b) dx - 2 M_{xy}^*(a, b)\, \Phi_i(a) \Psi_i(b) = 0$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots ; \; j = 1, 2, 3, \ldots$$

în care D reprezintă rigiditatea cilindrică a plăcii.

Notînd

$$Dw = \sum_i \sum_j A_{ij} \Phi_i(x) \Psi_j(y) \qquad (6)$$

eforturile secţionale de contur M_x^*, M_y^*, R_x^*, R_y^*, M_{xy}^*, vor avea expresiile :

$$M_x^*(a, y) = - \sum_i \sum_j \mu A_{ij} \Phi_i(a) \Psi_j''(y),$$

$$R_x^*(a, y) = - \sum_i \sum_j (2 - \mu) A_{ij} \Phi_i'(a)\, \Psi_j''(y),$$

$$M_y^*(x, b) = - \sum_i \sum_j \mu A_{ij} \Phi_i''(x)\, \Psi_j(b), \qquad (7)$$

$$R_y^*(x, b) = - \sum_i \sum_j (2 - \mu)\, A_{ij} \Phi_i''(x)\, \Psi_j'(b),$$

$$2 M_{xy}^* = R^* = - \sum_i \sum_j (1 - \mu) A_{ij} \Phi_i'(a)\, \Psi_j'(b).$$

În ecuaţiile (5) s-a considerat că momentele încovoietoare M_x^*, M_y^* şi forţa de colţ R^* efectuează lucru mecanic negativ, iar forţele tăietoare generalizate R_x^*, R_y^* efectuează lucru mecanic pozitiv (fig. 3).

Luînd în dezvoltarea (6) cîte trei forme proprii pe cele două direcţii x şi y, adică în total nouă termeni, se obţin pentru o placă pătrată de

latură a, din rezolvarea sistemului de ecuații liniare (5) în A_{ij} valorile :

$$A_{11} = 0{,}013296\, pa^4,\quad A_{12} = 0{,}001251\, pa^4,\quad A_{13} = 0{,}000027\, pa^4,$$

$$A_{21} = 0{,}001251\, pa^4,\quad A_{22} = 0{,}000052\, pa^4,\quad A_{23} = 0{,}000024\, pa^4,$$

$$A_{31} = 0{,}000027\, pa^4,\quad A_{32} = 0{,}000024\, pa^4,\quad A_{33} = -0{,}000014\, pa^4,$$

calculate cu $\mu = 0{,}3$.

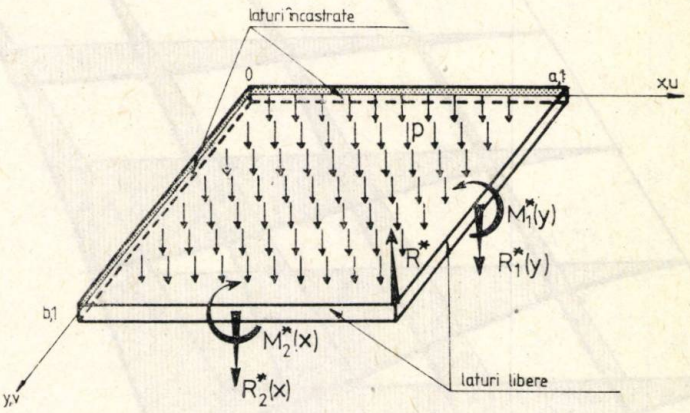


Fig. 3. — Eforturi secționale de contur date de imperfecțiunea funcțiilor.

În efectuarea integralelor ce apar în calcul coeficienților sistemului de ecuații liniare în A_{ij} s-a ținut seama de valorile funcțiilor și a integralelor date în tabelul 2. Tabelul este dat pentru funcțiile Φ_i, fiind valabil în același timp și pentru funcțiile Ψ_{ij}. Valorile date sînt calculate în coordonate reduse $u = \dfrac{x}{a}$, $v = \dfrac{y}{b}$, care conduc la adimensionalizarea ecuațiilor (5).

Cu valorile coeficienților A_{ij} determinate în baza relațiilor (6) se obțin mărimile săgeților care se dau în tabelul 3, respectiv în diagrama din figura 4.

Pentru momentele încovoietoare, respectiv de torsiune și forțele tăietoare, din relațiile :

$$M_x = -\left[\frac{\partial^2 (Dw)}{\partial x^2} + \mu \frac{a^2 (Dw)}{\partial y^2}\right],$$

$$M_y = -\left[\mu \frac{\partial^2 (Dw)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (Dw)}{\partial y^2}\right], \tag{8}$$

$$T_x = -\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2(Dw),$$

$$T_y = -\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2(Dw), \tag{8}$$

$$M_{xy} = -(1-\mu)\frac{\partial^2(Dw)}{\partial x\,\partial y},$$

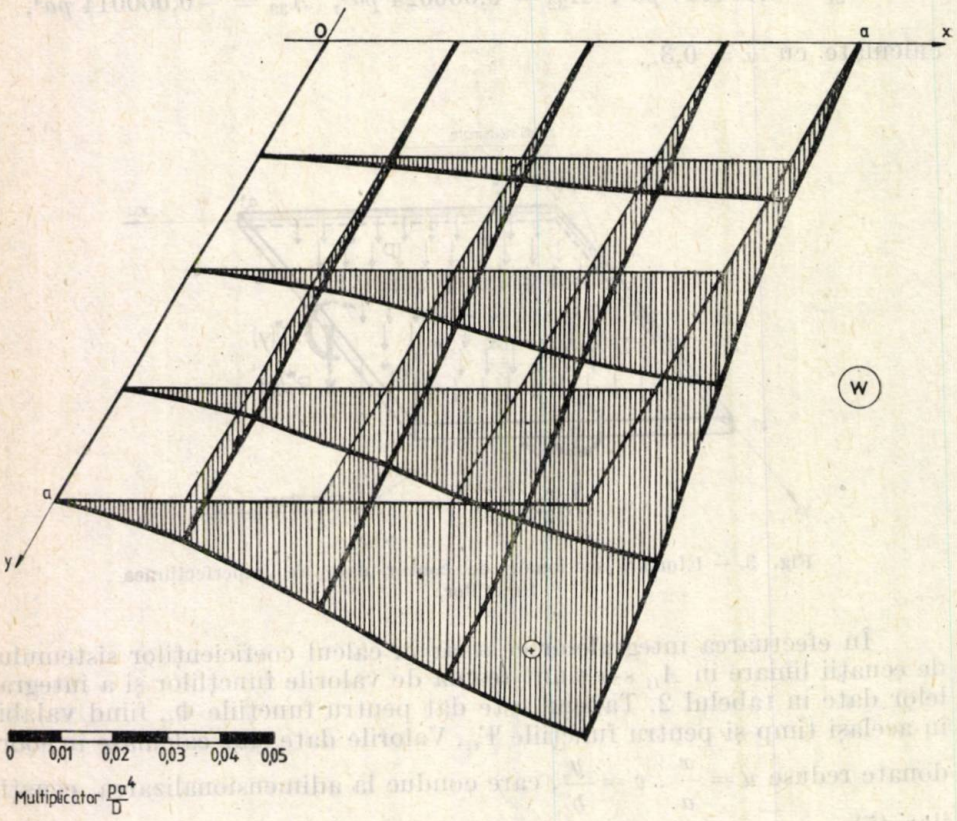


Fig. 4. — Diagrama deplasărilor w.

care devin

$$M_x = -\sum_i \sum_j A_{ij}(\Phi_i''\Psi_j + \mu\Phi_i\Psi_j''),$$

$$M_y = -\sum_i \sum_j A_{ij}(\mu\Phi_i''\Psi_j + \Phi_i\Psi_j''),$$

$$T_x = -\sum_i \sum_j A_{ij}(\Phi_i'''\Psi_j + \Phi_i'\Psi_j''), \tag{9}$$

$$T_y = -\sum_i \sum_j A_{ij}(\Phi_i''\Psi_j' + \Phi_i\Psi_j'''),$$

$$M_{xy} = -\sum_i \sum_j (1-\mu)A_{ij}\Phi_i'\Psi_j',$$

se obține valorile date în tabelul 3 și în diagramele din figura 5 și figura 6.

Tabelul 2

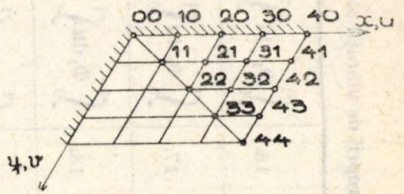
Valorile integralelor funcțiilor formelor proprii de vibrații ale consolei

1.	$\int_0^1 \Phi_1 \, du$	0,7829912	16.	$\int_0^1 \Phi_1 \, du \int_0^1 \Phi_1 du$	0,613076
2.	$\int_0^1 \Phi_2 \, du$	0,433936	17.	$\int_0^1 \Phi_1 \, du \int_0^1 \Phi_2 \, du$	0,339768
3.	$\int_0^1 \Phi_3 \, du$	0,254425	18.	$\int_0^1 \Phi_1 \, du \int_0^1 \Phi_3 \, du$	0,199213
4.	$\int_0^1 \Phi_1^2 \, du$	1	19.	$\int_0^1 \Phi_2 du \int_0^1 \Phi_1 \, du$	0,339768
5.	$\int_0^1 \Phi_2^2 \, du$	1	20.	$\int_0^1 \Phi_2 du \int_0^1 \Phi_2 \, du$	0,188300
6.	$\int_0^1 \Phi_3^2 \, du$	1	21.	$\int_0^1 \Phi_2 du \int_0^1 \Phi_3 \, du$	0,110404
7.	$\int_0^1 \Phi_1 \Phi_1'' \, du$	0,858244	22.	$\int_0^1 \Phi_3 du \int_0^1 \Phi_1 \, du$	0,199213
8.	$\int_0^1 \Phi_1 \Phi_2'' \, du$	−11,743238	23.	$\int_0^1 \Phi_3 du \int_0^1 \Phi_2 \, du$	0,110404
9.	$\int_0^1 \Phi_1 \Phi_3'' \, du$	27,453147	24.	$\int_0^1 \Phi_3 du \int_0^1 \Phi_3 \, du$	0,064732
10.	$\int_0^1 \Phi_2 \Phi_1'' \, du$	1,873853	25.	$\Phi_1(1)$	2,000000
11.	$\int_0^1 \Phi_2 \Phi_2'' \, du$	−13,294285	26.	$\Phi_2(1)$	− 2,000000
12.	$\int_0^1 \Phi_2 \Phi_3'' \, du$	− 9,042219	27.	$\Phi_3(1)$	2,000000
13.	$\int_0^1 \Phi_3 \Phi_1'' \, du$	− 1,564506	28.	$\Phi_1'(1)$	2,753011
14.	$\int_0^1 \Phi_3 \Phi_2'' \, du$	3,229331	29.	$\Phi_2'(1)$	− 9,561557
15.	$\int_0^1 \Phi_3 \Phi_3'' \, du$	−45,904227	30.	$\Phi_3'(1)$	15,697331

Tabelul 3

Valorile deplasărilor și eforturilor secționale

Pct.	w	M_x	M_y	M_{xy}	T_x	T_y
00	0	0	0	0	0	0
10	0	0,012179	0,040597	0	0,284010	−0,108116
20	0	0,036967	0,123223	0	0,346072	−0,349898
30	0	0,061276	0,204253	0	0,297485	−0,572508
40	0	0,082458	0,274859	0	0,276471	−0,707506
11	0,000990	0,019116	0,019116	0,032723	0,004634	−0,004679
21	0,002951	0,010800	0,040388	0,038812	0,073898	−0,284976
31	0,004909	0,017573	0,068551	0,036219	0,128744	−0,480319
41	0,006707	0,029610	0,09870	0,035358	0,123068	−0,640979
22	0,008666	−0,004072	−0,004072	0,044851	−0,082027	−0,082028
32	0,014417	−0,007582	−0,010253	0,043485	−0,011074	−0,148213
42	0,019885	−0,005801	−0,019337	0,041621	−0,045591	−0,261382
33	0,023785	−0,016407	−0,016407	0,031904	−0,002107	0,002107
43	0,032447	−0,009128	−0,030427	0,027765	−0,077482	0,126640
44	0,043352	0	0	0,021942	0	0



Multiplicatori

$$w \to \frac{pa^4}{D}$$

$$M_x, M_y, M_{xy} \to pa^2$$

$$T_x, T_y \to pa$$

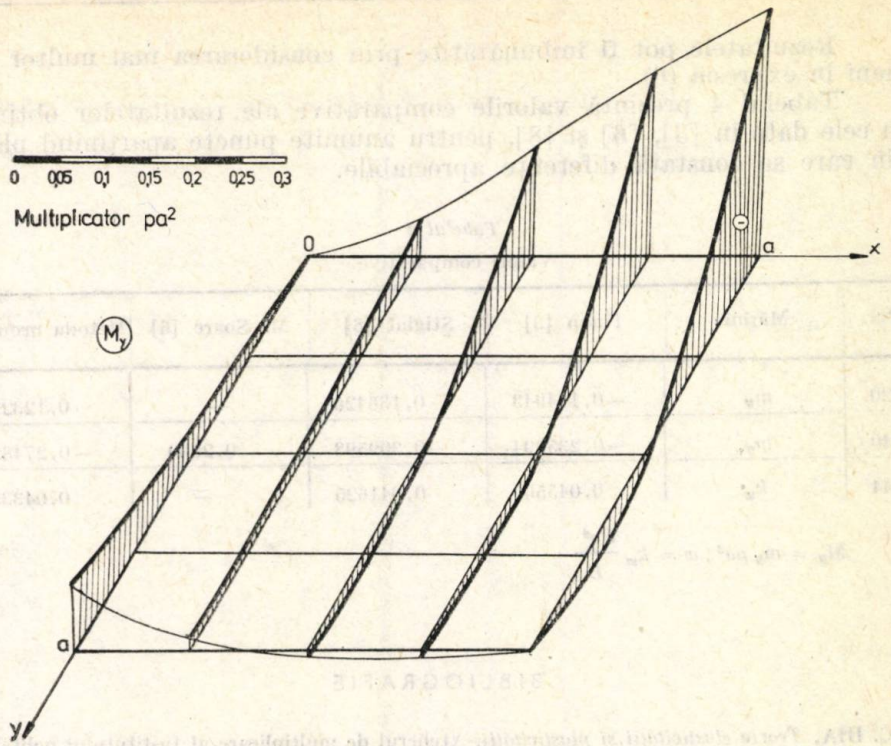


Fig. 5 - Diagrama momentelor încovoietoare M_x.

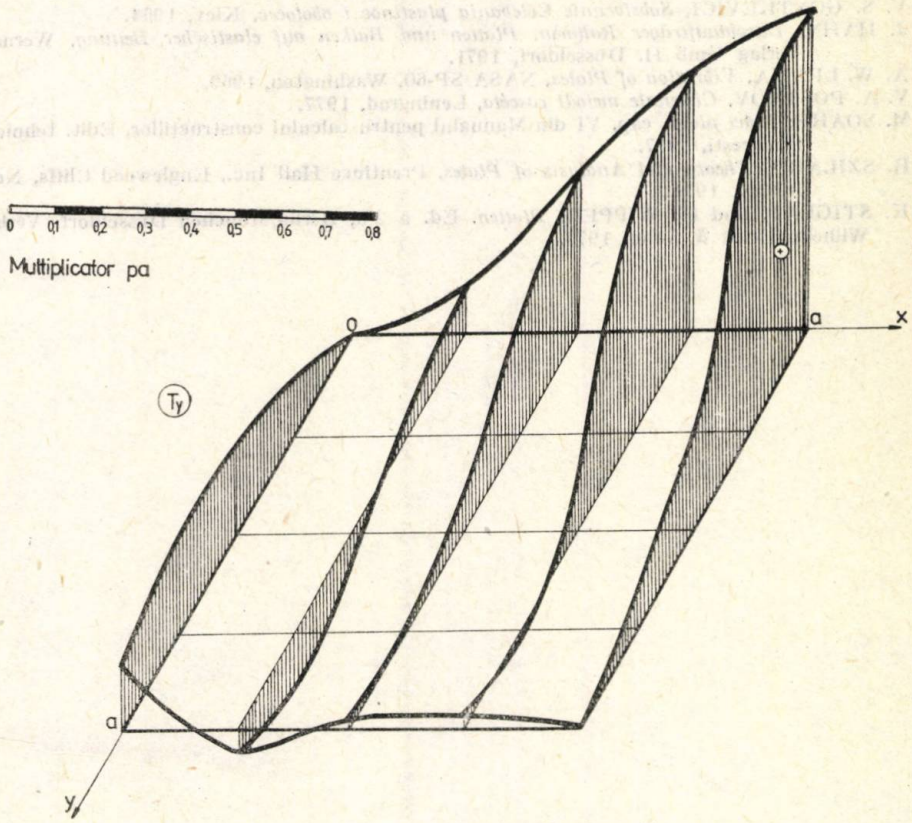


Fig. 6.—Diagrama forțelor tăietoare T_y.

Rezultatele pot fi îmbunătățite prin considerarea mai multor termeni în expresia (6).

Tabelul 4 prezintă valorile comparative ale rezultatelor obținute cu cele date în [3], [6] și [8], pentru anumite puncte aparținînd plăcii, din care se constată diferențe apreciabile.

Tabelul 4

Valori comparative

Pct.	Mărime	Hahn [3]	Stiglat [8]	M. Soare [6]	Metoda propusă
20	m_y	−0,114943	−0,136426	—	−0,123223
40	m_y	−0,235294	−0,309598	−0,2660	−0,274859
44	k_w	0,045560	0,041625	—	0,043352

$$M_y = m_y\, pa^2\,;\; w = k_w \frac{Pa^4}{D}$$

BIBLIOGRAFIE

1. C. BIA, *Teoria elasticității și plasticității*. Atelierul de multiplicare al Institutului politehnic Cluj-Napoca, 1980.
2. V. S. GONTKEVICI, *Sobstvennîe Colebania plastinoc i obolocec*, Kiev, 1964.
3. J. HAHN, *Durchlaufträger Rahmen, Platten und Balken auf elastischer Bettung*, Werner-Verlag Gmb H. Düsseldorf, 1971.
4. A. W. LEISSA, *Vibration of Plates*, NASA SP-60, Washington, 1969.
5. V. A. POSTNOV, *Cislennîe metodî rasceta*, Leningrad, 1977.
6. M. SOARE, *Plăci plane*, cap. VI din Manualul pentru calculul construcțiilor, Edit. tehnică, București, 1977.
7. R. SZILARD, *Theory and Analysis of Plates*, Prentince Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
8. K. STIGLAT, und H. WIPPEL, *Platten*. Ed. a 2-a, Berlin/München Düsseldorf, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1973.

REGIMUL SUBPRESIUNILOR LA CENTRALA HIDROELECTRICĂ PORȚILE DE FIER II

de VITALIE PIETRARU, DAN STEMATIU, MIRCEA ȘELĂRESCU

Institutul de construcții București

Terenul de fundare a centralei hidroelectrice Porțile de Fier II, alcătuit din roce argilo-marnoase puțin permeabile, modifică distribuția uzuală a subpresiunilor și asigură efecte drenante radierului construcției. Variația nivelurilor amonte și aval creează suplimentar un regim nepermanent al cîmpului de subpresiuni, care se resimte cu decalaje de timp pe ampriza centralei. Efectele implicate de soluția constructivă deosebită sînt determinate prin simulări numerice pe baza unui model matematic bazat pe conceptul de element finit. Evoluția subpresiunilor în cazul regimurilor permanent și nepermanent este analizată din punctul de vedere al stabilității la alunecare a centralei.

Reprezentînd acțiunea de jos în sus a apei ce se infiltrează prin microfisurile rocii de fundare și interspațiile necimentate dintre beton și rocă, subpresiunea are efecte importante asupra stabilității la alunecare a construcțiilor din frontul de retenție, diminuînd efectul stabilizator al greutății proprii a acestora. Prezența în fundație a unor roce argilo-marnoase, foarte puțin permeabile, schimbă în mare măsură distribuția, curent întîlnită, a subpresiunilor pe talpa construcției. Efectele drenante sînt produse nu numai prin măsurile constructive uzuale, dar și de betonul însuși — mult mai permeabil decît roca argilo-marnoasă — care reduce o parte din subpresiuni. În cazul construcțiilor din frontul de retenție al amenajărilor fluviale, variațiile de nivel amonte și în special aval, dictate de regimul hidrologic, modifică continuu distribuția și mărimea subpresiunilor. Permeabilitatea redusă a terenului de fundare și ampriza extinsă a construcției fac însă ca efectele schimbărilor de nivel să se resimtă cu multă întîrziere în zonele centrale ale tălpii de fundație.

În cele ce urmează se analizează din aceste puncte de vedere subpresiunile ce se dezvoltă pe talpa de fundație a centralei Porțile de Fier II, centrală fundată pe marne argiloase și supusă unor variații importante a nivelurilor. Evaluările se bazează pe un model numeric realizat prin metoda elementelor finite, al cărui algoritm a fost conceput și implementat de autori.

1. CENTRALA HIDROELECTRICĂ PORȚILE DE FIER II

Amplasată la circa 80 km în aval de SHEN Porțile de Fier I, amenajarea Porțile de Fier II valorifică în continuare potențialul hidroenergetic al Dunării în sectorul comun româno-iugoslav. Principalele uvraje sînt dispuse pe brațul principal al Dunării și pe un braț al acesteia, constînd

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 4, 1981, P. 563–578

din cele două centrale hidroelectrice — română şi iugoslavă — ecluzele aferente celor două ţări, barajele deversoare şi barajul de închidere din materiale locale [1].

Centralele sînt echipate cu opt hidroagregate bulb fiecare, avînd caracteristici şi parametri tehnici identici, cu o putere instalată totală de 2 × 216 MW, la un debit de 6700 m^3/s şi o cădere medie de 6,75 m. Coeficientul de echipare, de 1,21 faţă de debitul mediu al Dunării de 5520 m^3/s, este justificat din punct de vedere energetic şi economic prin căderea relativ mică, cu fluctuaţii între 2,5 şi 12 m. Din punct de vedere constructiv, fiecare centrală este constituită din 4 blocuri de 38 × 73 m, cuprinzînd cîte două hidroagregate pe bloc (fig. 1). Lungimea totală a centralei este de 178, m iar înălţimea din fundaţie de 43 m. Partea masivă a construcţiei este dispusă în radier, acesta avînd o grosime medie de circa 5 m şi fiind prevăzut în amonte cu un pinten puternic. Pila intermediară şi culeele fiecărui bloc sînt de asemenea masive, dictate de tipul hidroagregatelor.

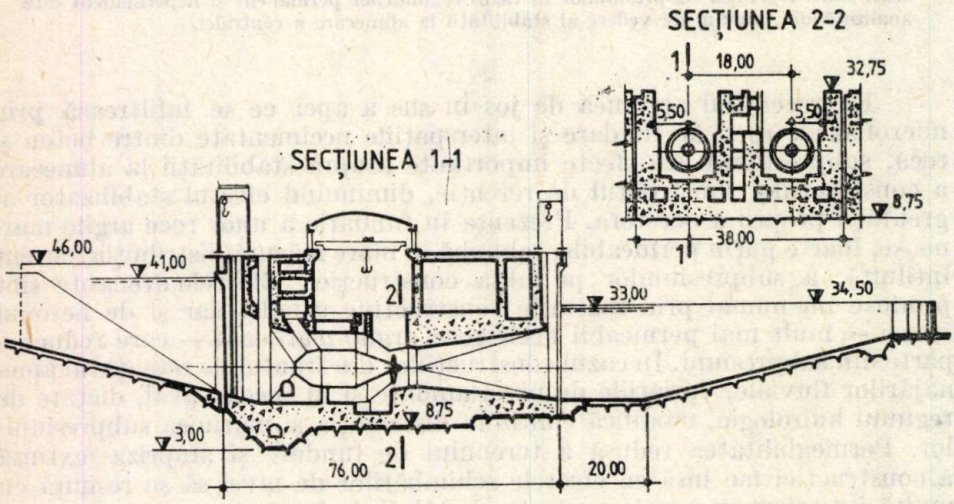


Fig. 1. — Centrala hidroelectrică Porţile de Fier II. Secţiuni caracteristice.

Nivelul normal de retenţie la centrală este de 41,00 mdA, nivel care se menţine în gama debitelor pe Dunăre de pînă la 7400 m^3/s. Pentru debite mai mari aceste niveluri se reduc, ajungînd la 39,50 mdA în cazul debitului de 16.000 m^3/s, pentru a limita efectele remuului în amonte şi a menţine o rezervă de evacuare la barajul deversor. Nivelurile din aval sînt dictate de variaţia debitelor uzinate — între 2 000 şi 6 700 m^3/s — în funcţie de condiţiile de atenuare a fluctuaţiilor debitelor evacuate la Porţile de Fier I şi de furnizare a energiei de vîrf sau de bază.

Terenul de fundare al centralei este alcătuit din roce argilo-marnoase cu rare filme şi intercalaţii de nisipuri. Caracterul pronunţat argilos face ca roca să fie în general impermeabilă. Absorbţiile de apă sînt mult sub limita la care roca necesită lucrări de etanşare prin injecţii. Infiltraţiile se pot produce cu viteze şi debite foarte mici prin filmele şi intercalaţiile subţiri

nisipoase. Coeficientul global de permeabilitate este cuprins între 10^{-9} și 10^{-10}m/s, roca avînd un modul de deformație cuprins între 2 000 și 10000 daN/cm^2.

2. MODELUL MATEMATIC

Studiul subpresiunilor, în regimurile permanent și nepermanent a fost făcut prin metoda elementelor finite. Domeniul format de radierul centralei și terenul de fundare a fost discretizat în elemente finite patrulatere, necunoscutele nodale fiind sarcinile hidraulice, respectiv presiunile neutrale.

Pentru *regimul permanent* s-a admis valabilitatea legii lui Darcy și s-a plecat de la ecuația generală a infiltrației [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} + k_{xz} \frac{\partial H}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zx} \frac{\partial H}{\partial x} + k_z \frac{\partial H}{\partial z}\right) = 0, \tag{1}$$

în care $H(x, z)$ este sarcina hidraulică, iar coeficienții de tip k sînt coeficienții de permeabilitate în cazul mediului anizotrop. Conform principiului variațional, soluția ecuației este aceea care minimizează funcționala [2, 3]:

$$E(H) = \frac{1}{2}\int_V \{v\}^T \{\text{grad } H\}\, dV, \tag{2}$$

în care $\{v\}$ este vectorul viteză. Expresia de sub semnul integrală reprezintă energia specifică disipată în procesul de infiltrație, minimizarea energiei totale fiind dată de soluțiile ecuației (1).

Admițînd o legitate cunoscută a variației sarcinii hidraulice pe domeniul unui element finit, valorile din cîmp se pot exprima în funcție de cele patru valori nodale:

$$H(x, z) = N_1(x, z)\, H_1 + N_2(x, z) H_2 + \ldots = [N]\{H_n\}, \tag{3}$$

în care $N(x, z)$ sînt funcții de aproximare. În funcție de acestea se pot exprima viteza și gradientul hidraulic și deci funcționala aferentă unui element:

$$\begin{aligned} &\{v\}^T = \{H_n\}^T [B_H]^T [C], \\ &\{\text{grad } H\} = [B_H]\{H_n\}, \\ &E_e(H) = \frac{1}{2}\int_{A,e} \{H_n\}^T [B_H]^T [C] [B_H] \{H_n\}\, dA = \frac{1}{2} \{H_n\}^T [k_i] \{H_n\}. \end{aligned} \tag{4}$$

În relațiile (4) notațiile introduse se referă la:

$[B_H] = \left[\begin{array}{c} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial z \end{array}\right]_{i=1\ldots4}$ reprezintă matricea de legătură gradient-sarcină hidraulică;

$[C] = \begin{bmatrix} k_x & k_{xz} \\ k_{zx} & k_z \end{bmatrix}$ — matricea de permeabilitate;

$[k_i] = \int_{A,e} [B_H]^T [C] [B_H] \, dA$ — matricea de infiltraţie a unui element.

Pentru întreg domeniul, funcţionala este dată de o expresie similară cu (4):

$$E(H) = \frac{1}{2} \{H_n\}^T [K_i] \{H_n\}, \tag{5}$$

unde $[K_i] = \sum_1^n {}_e [k_i]_e$ este dată de contribuţia tuturor elementelor din domeniu. Condiţiile de minimizare a funcţionalei, de tipul $\partial E/\partial H_i = 0$, conduc în final la un sistem liniar de ecuaţii algebrice:

$$[K_i] \{H_n\} = \{R\}, \tag{6}$$

în care $\{R\}$ este vectorul termenilor liberi, provenit din condiţiile de sarcini hidraulice impuse la limitele domeniului. Soluţia sistemului (6) furnizează valorile sarcinii hidraulice în nodurile discretizării. În funcţie de acestea, presiunile nodale sînt evaluate din:

$$p_n = \gamma_w (H_n - z_n), \tag{7}$$

unde z_n este cota nodului, iar γ_w greutatea specifică a apei.

În cadrul studiului, s-au adoptat elemente finite izoparametrice liniare, menţinînd o formă rectangulară, puţin distorsionată a reţelei de discretizare.

Pentru *regimul nepermanent* s-a admis valabilitatea ecuaţiei consolidării după modelul Terzaghi, considerînd domeniul alcătuit din radier şi terenul de fundare ca mediu saturat [2]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_V^* \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} + k_{xz} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{zx} \frac{\partial H}{\partial x} + k_z \frac{\partial H}{\partial z} \right) \right], \tag{8}$$

în care H semnifică tot sarcina hidraulică, iar

$C_V^* = \dfrac{E}{2\gamma_w (1 - 2\mu)(1 + \mu)}$ este un coeficient dependent de caracteristicile elastice ale domeniului. De remarcat similaritatea membrului drept al ecuaţiei (8) cu ecuaţia generală a infiltraţiei (1). Urmînd acelaşi

model al discretizării spațiale bidimensionale ca și în cazul regimului permanent, se obține setul de ecuații:

$$[K_i]\{H_n\} + [Q]\frac{\partial}{\partial t}\{H_n\} = 0, \tag{9}$$

unde $[K_i]$ este matricea de infiltrație a domeniului (vezi ec. (4)), iar

$$[Q] = \sum_1^n e \left(\int_A (N)^T \frac{1}{C_V^*} [N] \, dA \right) \tag{10}$$

este matricea deformației elastice.

Discretizarea temporală urmează principiile metodei reziduurilor a lui Galerkin [3]. Considerînd drept operator expresia (9):

$$L(\{H_n\}) = [K_i]\{H_n\} + [Q]\frac{\partial}{\partial t}\{H_n\} = 0,$$

și admițînd că valorile presiunilor apei din pori sînt cunoscute la momentul inițial $t = 0$, pentru domeniul timp se consideră intervale discrete $\Delta t = t_1 - t_0$. Pentru un asemenea interval, valorile presiunii apei din pori la orice moment t se pot exprima în funcție de valorile de la momentele extreme 0 și 1 prin utilizarea funcțiilor de aproximare:

$$\begin{aligned} \{H_n(t)\} &= [NT_0 \quad NT_1] \begin{Bmatrix} \{H_n\}_0 \\ \{H_n\}_1 \end{Bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\{H_n(t)\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial (NT_0)}{\partial t} & \frac{\partial (NT_1)}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{H_n\}_0 \\ \{H_n\}_1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

În cazul schemei de interpolare liniară, funcțiile de aproximare NT au valorile:

$$NT_0 = \frac{\Delta t - t}{\Delta t}; \qquad NT_1 = \frac{t}{\Delta t}. \tag{12}$$

Condiția de minimizare a reziduurilor pe domeniul timp, exprimată ca:

$$\int_0^{\Delta t} [NT_1] \left([K_i] \{H_n\} + [Q]\frac{\partial}{\partial t}\{H_n\} \right) dt = 0, \tag{13}$$

conduce la un set de ecuații algebrice:

$$\left(\frac{2}{3}[K_i] + \frac{1}{\Delta t}[Q] \right) \{H_n\}_1 = \left(\frac{1}{\Delta t}[Q] - \frac{1}{3}[K_i] \right) \{H_n\}_0, \tag{14}$$

a cărui rezolvare permite evaluarea mărimilor de la sfîrșitul intervalului în funcție de cele de la începutul acestuia. Pasul de timp s-a ales în conformitate cu condițiile de stabilitate numerică, în funcție de caracteristicile de permeabilitate și deformabilitate ale mediului analizat și de finețea de discretizare.

3. SUBPRESIUNILE ÎN REGIM PERMANENT

În calcule s-a admis ipoteza mișcării plan paralele în plan vertical pentru trei combinații de niveluri amonte-aval : 41,00—29,00 ; 41,00—33,60 și 39,50—36,50 mdA. Dată fiind variația grosimilor radierului și prezența pilelor în lungul unui bloc (fig. 1), secțiunea de calcul s-a schematizat ca o secțiune fictivă medie prin axul turbinei (fig. 4). Domeniul analizat a cuprins radierul centralei și terenul de fundare, cu o extindere amonte aval și în adîncime de odată și jumătate lungimea radierului.

În figura 2 este prezentată discretizarea domeniului de mișcare a apei subternare, care a cuprins 551 de puncte nodale și 510 elemente, dispuse cu o densitate mai mare în zona radierului. Condițiile de margine au fost specificate sub formă de sarcini hidraulice impuse în nodurile de contur ale rocii în amonte de radier, ale suprafeței superioare a radierului și în aval de radier. Zona de blindaj, situată în dreptul turbinei, s-a considerat impermeabilă. În amonte de blindaj, nodurile de contur au avut sarcina hidraulică egală cu cota apei din amonte, iar în aval de blindaj nodurile de contur au avut sarcina hidraulică egală cu cota apei din aval. Pentru nodurile care bordează galeriile de drenaj, sarcina hidraulică s-a luat egală cu cota inferioară a galeriei, ținînd seama de închiderea lor etanșe. Pentru alte zone drenante — foraje, tranșee sau pat drenant — sarcina hidraulică impusă a fost egală cu cota inferioară a galeriilor în care acestea debușează.

Determinările de teren ale caracteristicilor de permeabilitate au indicat pentru betonul din radier un coeficient de permeabilitate de 10^{-3} m/zi, iar pentru roca din fundație coeficienți de permeabilitate verticală cuprinși între 10^{-4} și 10^{-5} m/zi, cu anizotropii estimate de 10...100...1000 (direcțiile principale de anizotropie fiind practic după orizontală și verticală), permeabilitatea orizontală fiind sistematic mai mare. Este de remarcat că în cazul centralei Porțile de Fier II permeabilitatea betonului este mai mare decît aceea a rocii, ceea ce face ca betonul radierului să fie principalul element drenant, colectarea apei fiind făcută în galeriile din radier.

În figura 3 sînt figurate soluțiile analizate, referitoare la dispunerea elementelor de drenaj. Pe lîngă drenarea realizată de radierul centralei și galeriile de drenaj, s-au mai luat în considerație soluții cu foraje, tranșee sau pat drenant. Gama largă a caracteristicilor de permeabilitate a terenului de fundare a impus analiza unui număr mare de variante. În tabelul 1 sînt prezentate rezultatele calculelor efectuate pentru soluția de drenaj A (fig. 3) în cazul a două valori ale permeabilității verticale și trei cazuri de anizotropie, în ipotezele celor trei niveluri caracteristice, atît în situația de exploatare curentă, cît și în cazul reparațiilor.

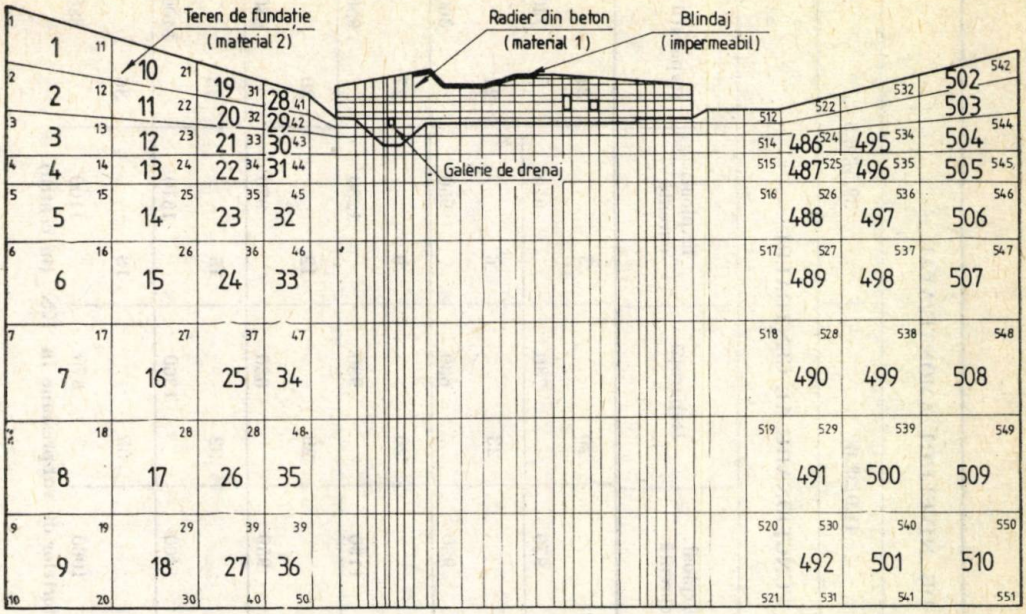


Fig. 2. — Discretizarea domeniului de mișcare a apei subterane.

Urmărind forța de subpresiune totală verticală pentru cele 36 de variante rezultate, se remarcă că valoarea maximă corespunde variantei 15, cu nivel aval ridicat și coeficient de anizotropie 1000. Alura subpresiunilor pentru această variantă este prezentată în figura 4. În toate cazurile ipoteza exploatării curente apare mai defavorabilă decît aceea de reparație, iar valorile subpresiunii cresc odată cu creșterea coeficientului de anizotropie. Gama largă de variație a subpresiunilor în funcție de caracteristicile admise se poate urmări și în figura 5, în care sînt indicate înfășurătorile — inferioară și superioară — ale distribuției de subpresiuni pentru nivelurile 41,00 amonte și 29,00 aval.

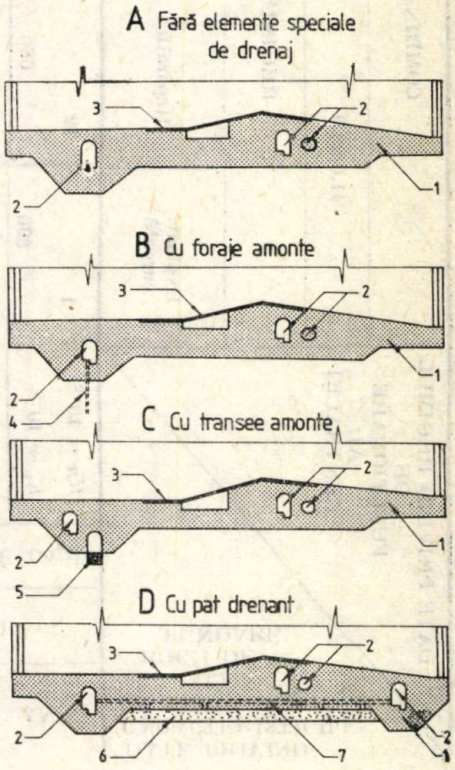


Fig. 3. — Variante de drenaj analizate: *1* — betonul radierului, *2* — galerii de drenaj, *3* — zona de blindaj a turbinei, *4* — foraje de drenaj, *5* — tranșee drenantă, *6* — pat drenant, *7* — conducte de colectare.

Tabelul 1)*

DATE PRIVIND CARACTERISTICILE DE PERMEABILITATE ALE ROCII DE FUNDARE: COEFICIENTUL DE ANIZOTROPIE A_N		COEFICIENTUL DE PERMEABILITATE (m/zi)	DATE PRIVIND REGIMUL DE FUNCŢIONARE AL CENTRALEI	COMBINAŢIA DE NIVELURI AMONTE/AVAL					
				41,0/29,0		41,0/33,6		39,5/36,5	
				REGIMUL DE FUNCŢIONARE AL CENTRALEI					
				Exploat. curentă	Reparaţii	Exploat. curentă	Reparaţii	Exploat. curentă	Reparaţii
10		$K_H = 10^{-2}$	$K_v = 10^{-5}$	1 890	19 680	2 970	20 730	3 970	21 740
100		$K_H = 10^{-1}$	$K_v = 10^{-4}$	4 850	22 620	5 930	23 630	6 950	24 660
		$K_H = 10^{-3}$	$K_v = 10^{-5}$	7 1020	25 920	8 1190	26 930	9 1230	27 950
		$K_H = 10^{-2}$	$K_v = 10^{-4}$	10 860	28 650	11 950	29 680	12 970	30 680
1000		$K_H = 10^{-4}$	$K_v = 10^{-5}$	13 1320	31 1220	14 1460	32 1360	15 1510	33 1400
		$K_H = 10^{-3}$	$K_v = 10^{-4}$	16 980	34 800	17 1060	35 870	18 1100	36 880

*) În tabel se dau numerotarea variantelor (colţul din stînga) şi valoarea forţelor de subpresiune în KN (în centru).

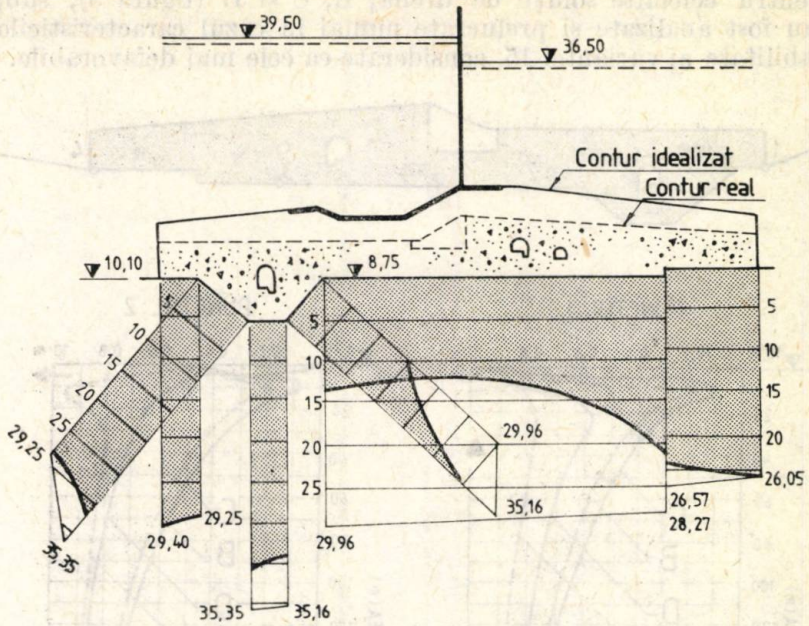


Fig. 4.— Distribuția subpresiunilor pentru soluția de drenaj A, varianta 15 ($K_H = 10^{-1}$ cm/s, $K_v = 10^{-4}$ cm/s).

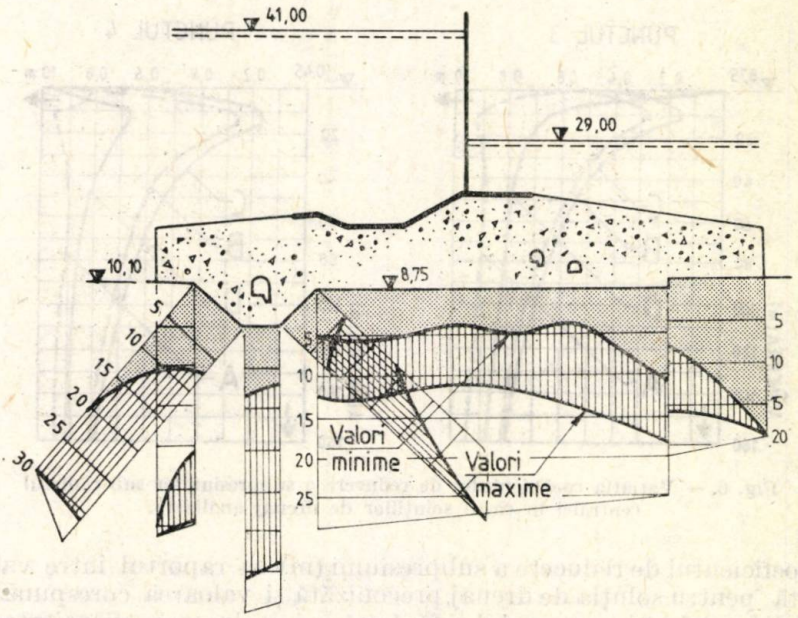
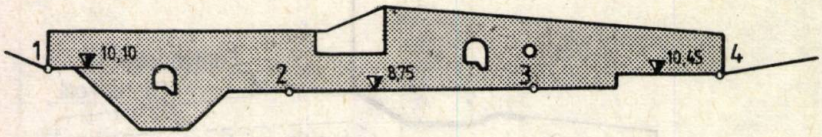


Fig. 5. — Înfășurătorile valorilor maxime și minime ale subpresiunilor în soluția de drenaj A, niveluri extreme.

Pentru celelalte soluţii de drenaj B, C şi D (figura 3), subpresiunile au fost analizate şi prelucrate numai în cazul caracteristicilor de permeabilitate ai variantei 15, considerate ca cele mai defavorabile. Defi-



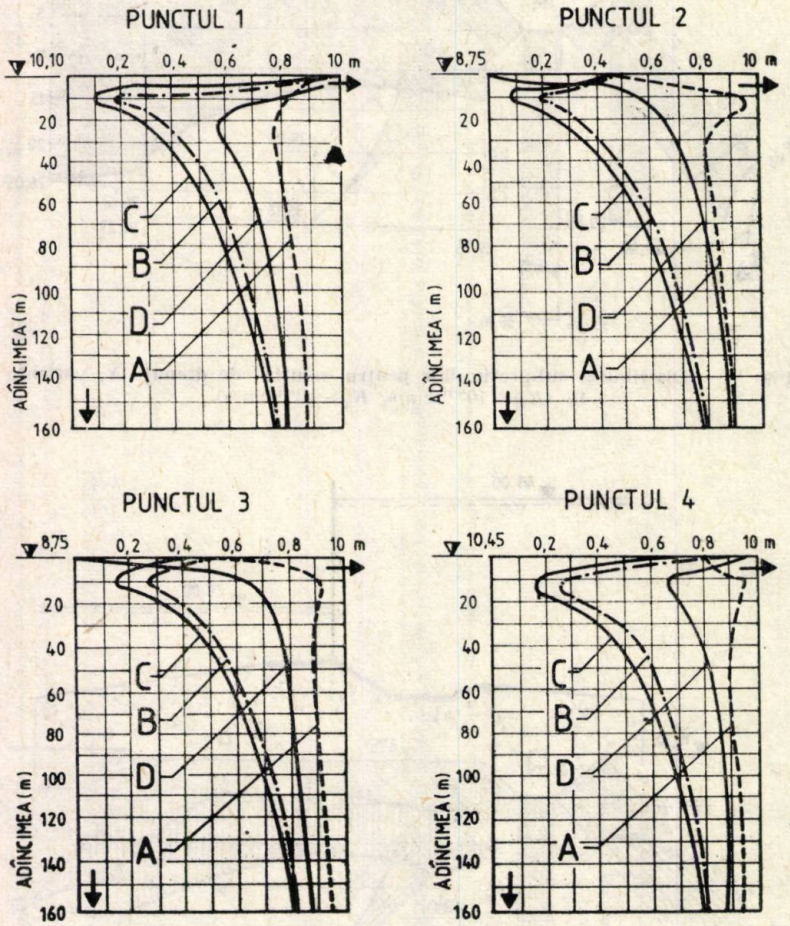


Fig. 6. — Variaţia coeficientului de reducere a subpresiunilor sub radierul centralei în cazul soluţiilor de drenaj analizate.

nind coeficientul de reducere a subpresiunii (m) ca raportul între valoarea obţinută pentru soluţia de drenaj preconizată şi valoarea corespunzătoare unui radier perfect impermeabil şi fără măsuri de drenare, eficacitatea soluţiilor analizate se poate urmări în figura 6. Pentru patru puncte caracte-

ristice dispuse în lungul radierului este reprezentată variația în adîncime a coeficientului de reducere a subpresiunii.

Se constată că soluțiile de drenaj B și C (cu foraje drenante, respectiv cu tranșee amonte) sînt cele mai eficiente ca efect global, atît în vecinătatea radierului, cît și în profunzime. Soluția D, cu pat drenant, creează reduceri însemnate în zona vecină patului drenant, dar efectul scade rapid în zona terenului de fundare.

4. SUBPRESIUNILE ÎN REGIM NEPERMANENT

Analiza efectelor introduse de variația nivelurilor din cele două biefuri asupra distribuției subpresiunilor a fost analizată pentru varianta 15, studiată în cazul regimului permanent. Caracteristicile roci de fundare și ale betonului din radier sînt date în tabelul 2.

Tabelul 2

	Coeficient de permeabilitate	Anizotropie	Modul de deformație (daN/cm²)	Coeficient Poisson
rocă	$k = 10^{-4}$ m/zi	1000	4000	0,22
beton	10^{-3} m/zi	1	200000	0,16

S-a admis aceeași ipoteză a fenomenului plan paralel, aceeași extindere a domeniului radier-teren de fundare și aceeași discretizare (fig. 2) ca și în cazul regimului permanent. Condițiile de margine, exprimate ca valori cunoscute ale presiunii în funcție de variația nivelurilor, s-au specificat și de această dată pe conturul teren-radier amonte de blindajul turbinei ca valori controlate de nivelurile amonte și pe conturul teren-radier aval de blindaj ca valori controlate de nivelurile aval. Pasul de timp de calcul a fost de două zile.

Pentru a se putea aprecia inerția transmiterii variațiilor de niveluri din cele două biefuri în terenul de fundare și sub talpa radierului, s-au analizat într-o primă etapă efectele unei schimbări bruște a nivelurilor de +2m în amonte și −7 m în aval. În figura 7 sînt prezentate distribuțiile supresiunilor pe radier corespunzătoare celor două situații de niveluri și diferențele între valorile subpresiunilor la diverse momente de timp de la modificarea nivelurilor. Se constată că în primele zile variația nivelurilor se resimte pe zone foarte limitate, numai spre picioarele amonte și aval ale radierului, subpresiunile ajungînd către distribuția aferentă unui regim permanent abia după circa cinci luni de zile.

Efectele reale ale regimului nepermanent au fost analizate pentru o variație probabilă a nivelurilor amonte și aval în conformitate cu regimul hidrologic al Dunării. Modificările nivelurilor corespunzătoare perioadelor de viitură sînt mai lente și sînt succedate de reveniri aproape asimptotice către nivelurile caracteristice, fapt care diminuează efectele inerțiale în propagarea subpresiunilor. Pentru un anumit joc de niveluri, mărimea subpresiunilor depinde de evoluția anterioară a nivelurilor, după cum momentul analizat succede unei perioade de ape mari sau ape mici.

Simularea variației subpresiunilor s-a făcut pentru doi ani hidrologici caracteristici — cu viitură lungă și respectiv scurtă — alegînd pentru aceștia hidrografele de debite din anii 1941—1942 și respectiv 1896—1897,

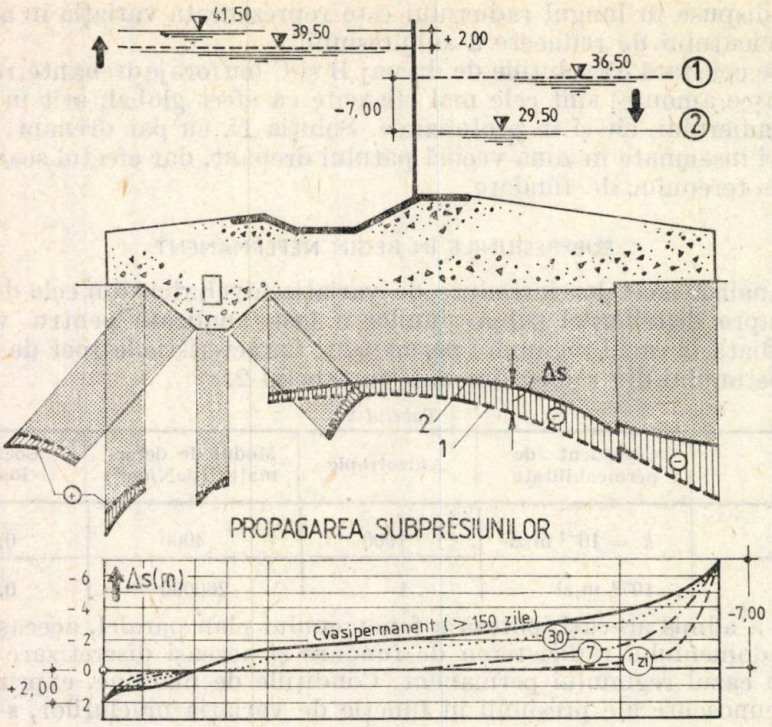


Fig. 7.—Efecte inerțiale în propagarea subpresiunilor în cazul unei variații bruște a nivelurilor amonte și aval: *1* — regim permanent inițial, *2* — regim cvasipermanent pentru noile niveluri.

ca situații extreme înregistrate. În figurile 8 și 9 sînt reprezentate hidrografele de debite, cheile limnimetrice din exploatare, date de regimul nivelurilor la centrală, hidrografele de niveluri amonte și aval rezultate și evoluția în timp a subpresiunilor pentru patru puncte caracterisice de pe radierul centralei. Drept situație inițială s-a admis în ambele cazuri regimul permanent corespunzător nivelurilor 41,00 mdA în amonte și 33,00 mdA în aval. Urmărind succesiunea în timp a subpresiunilor din punctele caracteristice, se constată, pentru ambele cazuri, că în zona radierului amonte de pinten subpresiunile sînt controlate de nivelul din amonte și că în zona aval de pinten subpresiunile sînt controlate de nivelul din aval. În amonte întîrzierile de transmitere sînt mai reduse, în timp ce în aval de pinten, pe măsură ce punctele sînt mai depărtate de piciorul aval, variațiile de nivel sînt resimțite numai ca tendință generală, iar întîrzierile sînt mult mai evidente. Aceste constatări sînt ușor de explicat, dacă se ține seama că efectele variațiilor de nivel se suprapun cu tendința generală de infiltrație amonte-aval, favorizînd propagarea din amonte și frînînd propagarea din aval. În cazul anului cu viitură scurtă, la care viitura de toamnă urmează unei perioade de niveluri puțin variabile, subpresiunea are variații mai bruște, cu efecte inerțiale mai apropiate de situația schimbării instantanee a jocului de niveluri din biefurile amonte și aval.

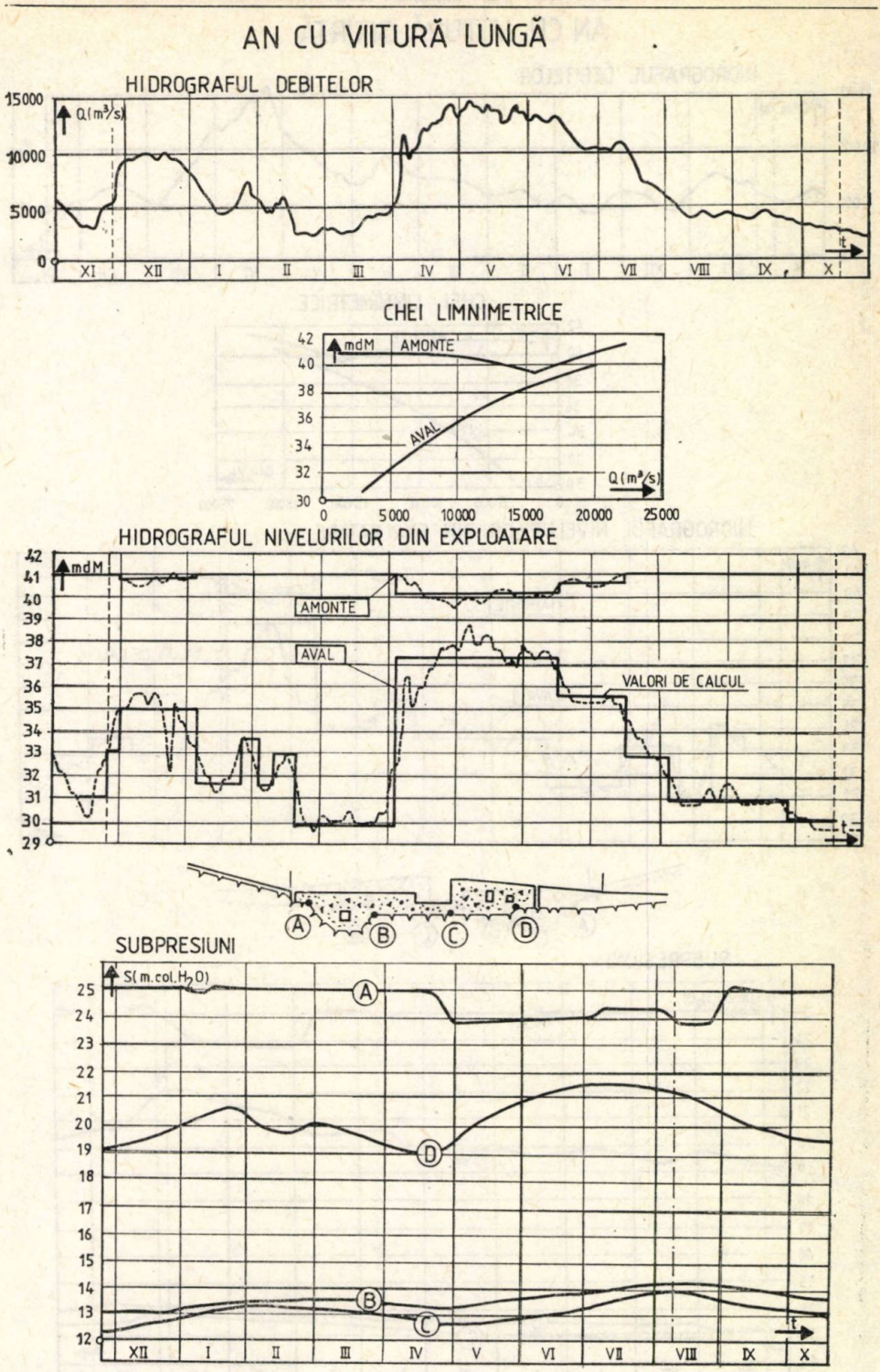


Fig. 8 — Simularea propagării subpresiunilor în cazul anului cu viitură lungă.

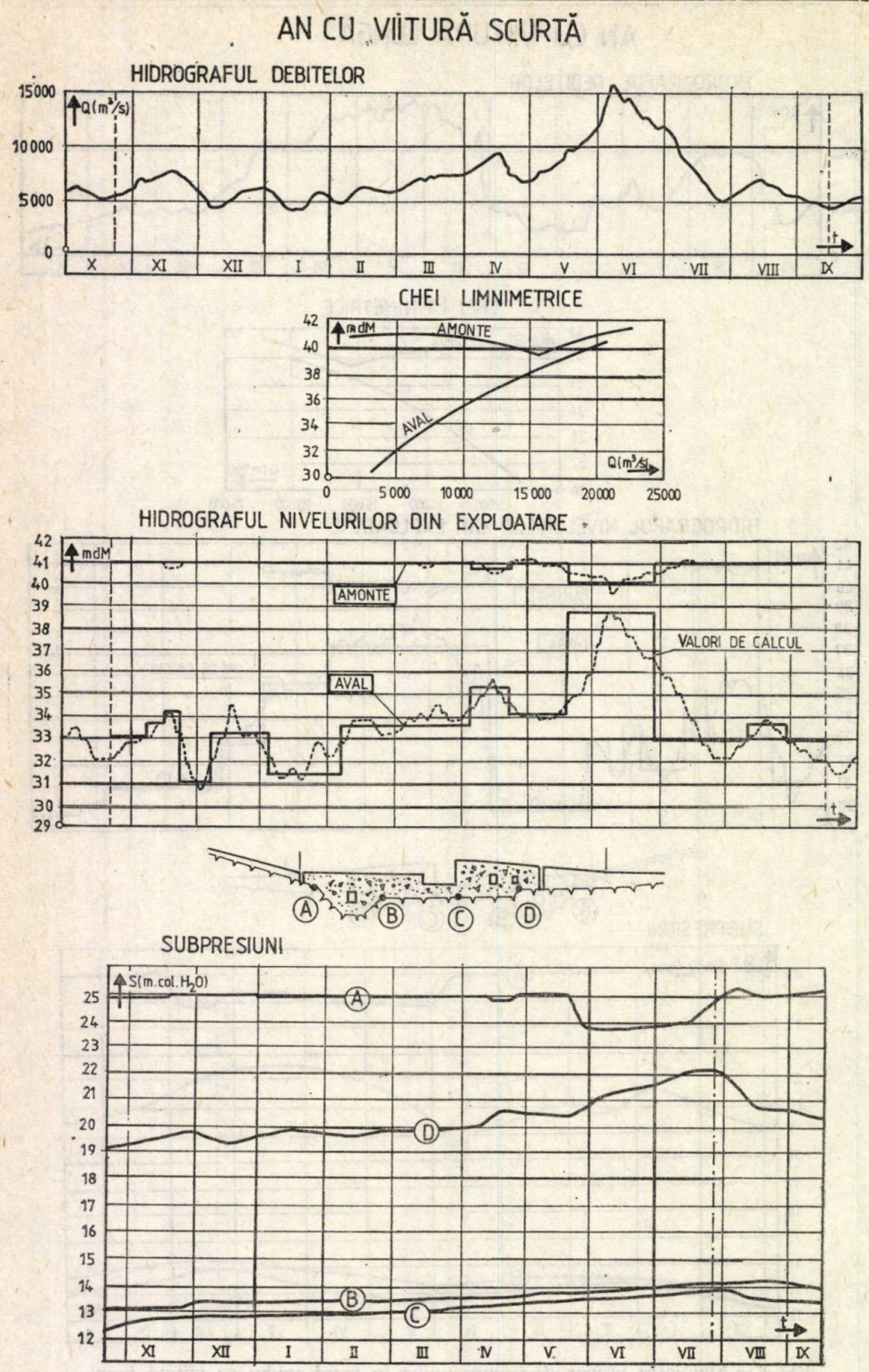


Fig. 9. — Simularea propagării subpresiunilor în cazul anului cu viitură scurtă.

Efectele regimului nepermanent asupra distribuției subpresiunilor sînt mai bine puse în evidență în figura 10, în care sînt prezentate comparativ subpresiunile în regim permanent și nepermanent pentru două

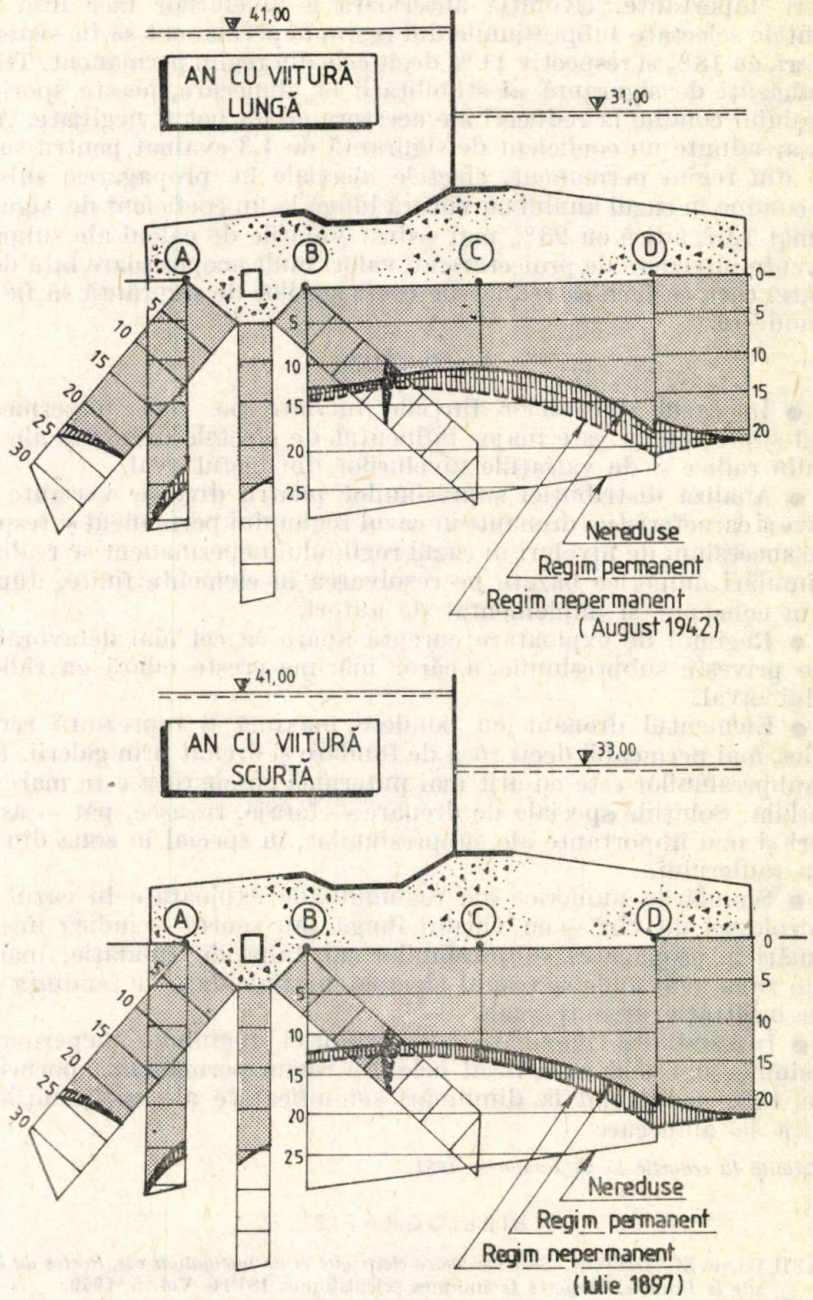


Fig. 10. — Distribuția subpresiunilor în cazul regimurilor permanente și nepermanente pentru două momente caracteristice din evoluția hidrologică.

momente caracteristice în evoluția hidrologică a anilor analizați. Față de diagrama teoretică a subpresiunilor nereduse — la care se neglijează efectele drenante — atît regimul nepermanent, cît și cel permanent indică reduceri importante. Evoluția anterioară a nivelurilor face însă ca la momentele selectate subpresiunile din regim nepermanent să fie sistematic mai mari, cu 18% și respectiv 11% decît cele din regim permanent. Traduse în coeficienți de siguranță ai stabilității la alunecare, aceste sporiri ale subpresiunii conduc la reduceri ale acestora ce nu pot fi neglijate. Astfel, dacă s-ar admite un coeficient de siguranță de 1,3 evaluat pentru subpresiunile din regim permanent, efectele inerțiale în propagarea subpresiunilor conduc în cazul anului cu viitură lungă la un coeficient de siguranță de numai 1,07, adică cu 23% mai redus. Valorile de calcul ale subpresiunilor avute în vedere de proiectare au valori mult acoperitoare față de cele rezultate, ceea ce face ca reducerile coeficienților de siguranță să fie mult mai modeste.

5. CONCLUZII

● În cazul centralelor fluviale fundate pe roci impermeabile, regimul supresiunilor este major influențat de efectele drenante ale betonului din radier și de variațiile nivelurilor din bieful aval.

● Analiza distribuției supresiunilor pentru diverse variante constructive și caracteristici drenante în cazul regimului permanent și respectiv diverse succesiuni de niveluri în cazul regimului nepermanent se realizează prin simulări numerice bazate pe rezolvarea în elemente finite, după un algoritm conceput și implementat de autori.

● Regimul de exploatare curentă apare ca cel mai defavorabil în ceea ce privește subpresiunile, a căror mărime crește odată cu ridicarea nivelului aval.

● Elementul drenant cu pondere maximă îl reprezintă radierul centralei, mai permeabil decît roca de fundare și drenat prin galerii. Reducerea subpresiunilor este cu atît mai puternică cu cît roca este mai puțin permeabilă. Soluțiile speciale de drenare — foraje, tranșee, pat — asigură reduceri și mai importante ale subpresiunilor, în special în zona din vecinătatea radierului.

● Simulările numerice ale regimului de exploatare în cazul unor ani hidrologici de vîrf — cu viitură lungă sau scurtă — indică întîrzieri și atenuări în propagarea subpresiunilor sub talpa de fundație, mai evidente în zona aval unde se resimt efectele inerțiale date de tendința generală de infiltrație amonte-aval.

● În anumite momente ale evoluției regimului nepermanent, subpresiunile sînt mai mari decît cele din regim permanent, sporurile de pînă la 18% conducînd la diminuări semnificative ale coeficienților de siguranță la alunecare.

Primită la redacție la 26 ianuarie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. A. VASILIU, F. SCVORȚOV, *Systéme hydro-electrique et de navigation des Portes de Fer II, sur le Danube.* Raports techniques scientifiques ISPH- Vol. 5, 1979.
2. V. PIETRARU, *Calculul infiltrațiilor*, București, 1977.
3. O. C. ZIENCHIEWICZ, *Finite element method in engineering science*, New York, 1973.

SCURGERILE DE GAZE PRIN DEFECTELE CONDUCTELOR CU PRESIUNI MARI

de T. OROVEANU, S. POPOVICIU şi AL. D. STAN

Insitutul de petrol şi gaze, Ploieşti
I.R.I.D.G.N., Tîrgu Mureş

În practica exploatării sistemelor de alimentare cu gaze naturale pot apare defecte ale conductelor prin care se produc scurgeri de gaze. Curgerea gazelor prin mediul poros care înconjoară conducta poate fi considerată liniară sau neliniară.
Situaţia cea mai defavorabilă se întîlneşte în anotimpul rece deoarece în această perioadă presiunea din conductă este mai mare, iar solul este îngheţat la suprafaţă, ceea ce favorizează scurgerea gazelor către imobile. Tot în anotimpul rece, deoarece imobilele sînt mai puţin ventilate, pericolul de a se ajunge în încăperi la limitele de explozie este mai mare. Imobilele mai îndepărtate de locul unde s-a produs defectul conductei sînt mai puţin expuse la infiltraţiile de gaze. Indiferent de această distanţă, valoarea debitului de gaze care se infiltrează într-un imobil este influenţată în principal de caracteristicile solului şi de presiunea din conductă.

1. INTRODUCERE

În cursul exploatării sistemelor de alimentare cu gaze naturale apar destul de frecvent defecte ale conductelor prin care se scurge o parte din gaze. Aceste defecte se produc în general la ţevile îngropate ceea ce face ca depistarea lor să fie uneori anevoioasă. Defectele pot proveni din coroziunea conductelor sau din ruperile acestora cauzate de traficul rutier, de construcţia lor incorectă sau de diferite alte sarcini suplimentare provenite din cauze asupra cărora nu este necesar să insistăm aici. La reţelele de repartiţie şi de distribuţie a gazelor s-a constatat că principalul factor care conduce la apariţia defectelor este coroziunea, chiar la conductele construite relativ recent. Astfel, în figura 1 se prezintă fotografia unui orificiu produs prin coroziune la o conductă de 1" care alimenta un imobil.

După formarea unui astfel de orificiu, gazele se scurg prin acesta şi prin mediul poros din vecinătatea conductei către suprafaţa solului. Situaţia în care mişcarea gazelor respectă legea liniară de filtrare a lui Darcy a fost examinată într-o lucrare anterioară [2], în care s-a arătat că prezenţa mediului poros lîngă conductă reduce debitul de gaze scurse prin orificiu faţă de cazul în care acesta ar fi liber. De asemenea, s-a constatat că dacă solul are o permeabilitate mică debitul de gaze pierdute prin orificiu se reduce.

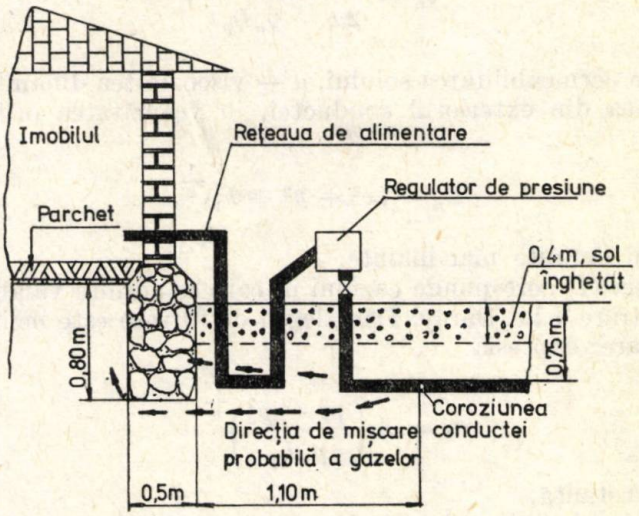
ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 4, 1981, P. 579–591

Fig. 1

2. SCURGEREA GAZELOR CĂTRE IMOBILELE INCOMPLET IZOLATE FAȚĂ DE SOL

Defectele care apar la conductele din sistemele de alimentare cu gaze sînt foarte periculoase deoarece prin aceste defecte se pierd cantități mari de gaze care se pot infiltra în imobile provocînd destul de frecvent explozii. În perioada rece a anului, presiunea din conducte crește cu 25%—30% față de presiunea din perioada caldă, fapt care conduce la o mărire a debitului de gaze scurse prin orificiile formate la conducte. Infiltrarea acestor gaze către imobile este aproape totală deoarece solul de deasupra conductei este în general înghețat pînă la o oarecare adîncime, devenind astfel impermeabil. Apariția unui defect al conductei în apropierea unui imobil, în perioada rece a anului, este mai periculoasă și datorită faptului că imobilele sînt mai puțin ventilate ceea ce face să se atingă limita inferioară de explozie mult mai repede. Depistarea scurgerii gazelor pe la baza imobilelor, prin solul în general uscat se face foarte greu și chiar dacă scurgerea se efectuează cu zgomot, acesta este acoperit de sunetele sau zgomotele provenite din interiorul imobilului (aparate de radio, televizoare etc.).

Pentru exemplificarea acestor considerații, menționăm explozia produsă în ziua de 11 ianuarie 1981 la un imobil ca urmare a formării prin coroziune a unui orificiu la conducta de distribuție. Punctul în care s-a format orificiul, distanțele pînă la imobil și pînă la suprafața solului sînt reprezentate în figura 2.



Fie. 2

Orificiul s-a format probabil mai înainte de data la care s-a produs explozia dar gazele infiltrate în imobil nu au ajuns la limita inferioară de explozie sau, dacă această limită a fost atinsă, nu a apărut o scînteie care să declanșeze explozia amestecului de gaze cu aer.

Imediat după explozie, au fost verificate răsuflătorile de pe conducta de distribuție din apropierea imbilului și a celor învecinate, fără ca să se constate scăpări de gaze. În urma dezgropării branșamentului imobilului avariat, s-a constatat existența unei coroziuni pe partea inferioară a conductei de branșament. În imobil, la circa 1,10 m față de locul coroziunii, pătrundeau gaze printre fișiile de parchet, pe sub fundația imobilului, care are o adîncime de 0,80 m și este executată din beton ciclopian. Infiltrarea gazelor s-a produs pe distanța dintre orificiul format prin coroziune și fundație prin terenul de umplutură care conține multă piatră spartă mărunt. Infiltrarea prin fundație a fost probabil facilitată de existența unor fisuri ale acesteia. Faptul că solul era înghețat la suprafață pînă la adîncimea de 0,40 m a contribuit de asemenea la canalizarea spre imobil a gazelor ieșite prin orificiul de la conductă.

Cantitățile de gaze infiltrate depind de mai mulți parametri ; în afară de presiunea din conductă p_c și de presiunea de la suprafața solului p_a, considerate ca parametri tehnologici, debitul scurs către un imobil depinde și de poziția acestuia față de orificiul format la conductă.

Pentru a aprecia influența ultimului parametru menționat, vom considera un sistem de axe $Oxyz$ cu axa Oz avînd sensul verticalei ascen-

dente și vom presupune că orificiul de la conductă se găsește în originea acestui sistem. Suprafața solului găsindu-se în planul $z = h_1$, viteza de filtrare într-un punct din acest plan, cu coordonatele x, y, h_1 are expresia

$$v_L = \frac{k}{2\mu} \cdot \frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a L_p}, \tag{1}$$

în care k este permeabilitatea solului, μ — viscozitatea dinamică a gazelor, p_e — presiunea din exteriorul conductei, în vecinătatea orificiului și

$$L_p = (x^2 + y^2 + h_1^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

p_e și p_c fiind definite mai înainte.

Expresia (1) corespunde cazului în care se admite valabilitatea legii liniare de filtrare a lui Darcy. Dacă legea de filtrare este neliniară, viteza de filtrare are expresia

$$v_T = A \left(\frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a L_p} \right)^{\frac{1}{n}}, \tag{3}$$

A fiind o constantă.

Renunțînd la indice și notînd cu v viteza de filtrare, în ambele situații, componenta normală v_n a acestuia pe un element de arie $dxdy$ situat în planul $z = h_1$ este

$$v_n = v \cos(\vec{v}, \vec{n}). \tag{4}$$

Deoarece viteza de filtrare v are aceeași direcție și același sens cu vectorul de poziție $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}h_1$ al unui punct de pe $dxdy$, rezultă

$$\cos(\vec{v}, \vec{n}) = \cos(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}|\,|\vec{n}|} = \frac{h_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_1^2}} \tag{5}$$

și dacă ținem seama de (2) obținem

$$v_n = \frac{k}{2\mu} \cdot \frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a} \cdot \frac{h_1}{x^2 + y^2 + h_1^2} \tag{6}$$

pentru cazul în care este valabilă legea lui Darcy, și

$$v_n = A \left(\frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{h_1}{(x^2 + y^2 + h_1^2)^{\frac{n+1}{2n}}} \tag{7}$$

atunci cînd se admite valabilitatea legii neliniare de filtrare.

Valorile coeficientului A și ale exponentului $\frac{1}{n}$ urmează a fi stabilite pe cale experimentală, așa cum vom arăta mai departe.

Dacă introducem variabilele adimensionale

$$\bar{x} = \frac{x}{h_1}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h_1}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h_1}, \tag{8}$$

obținem în loc de (6)

$$v_n = \frac{k}{2\mu} \cdot \frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a h_1} \cdot \frac{1}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1}, \tag{9}$$

în timp ce (7) devine

$$v_n = A \left(\frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a h_1} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1)^{\frac{n+1}{2n}}}. \tag{10}$$

Prin urmare, considerînd un imobil cu baza situată în planul $z = h_1$ ($\bar{z} = 1$), dacă notăm cu S aria acestei baze, debitul de gaze ce o traversează este

$$Q_L = \frac{k}{2\mu} \cdot \frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a} h_1 \iint_S \frac{\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1} \tag{11}$$

dacă admitem valabilitatea legii lui Darcy sau

$$Q_T = A \left(\frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a} \right)^{\frac{1}{n}} h_1^{\frac{2n-1}{n}} \iint_S \frac{\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{y}}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1)^{\frac{n+1}{2n}}} \tag{12}$$

în cazul în care este valabilă legea neliniară de filtrare.

Așadar, efectul poziției imobilului față de orificiul format la conductă se exprimă în primul caz prin valoarea integralei

$$L = \iint_S \frac{\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1}, \tag{13}$$

iar în al doilea caz prin valoarea integralei

$$T = \iint_S \frac{\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{y}}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1)^{\frac{n+1}{2n}}}. \tag{14}$$

Pentru exemplificare s-a considerat un imobil cu baza de formă dreptunghiulară cu laturile 4 și 6 care a fost plasat în diverse poziții față

de orificiul format la conductă. Astfel, distanţa de la centrul dreptunghiului pînă la punctul care reprezentă proiecţia orificiului pe planul $z = h_1$ ($\tilde{z} = 1$) s-a ales pe rînd 0 ; 7, 6 ; 15, 2 ; 22,8 (fig. 3) şi în fiecare caz au fost calculate integralele L şi T.

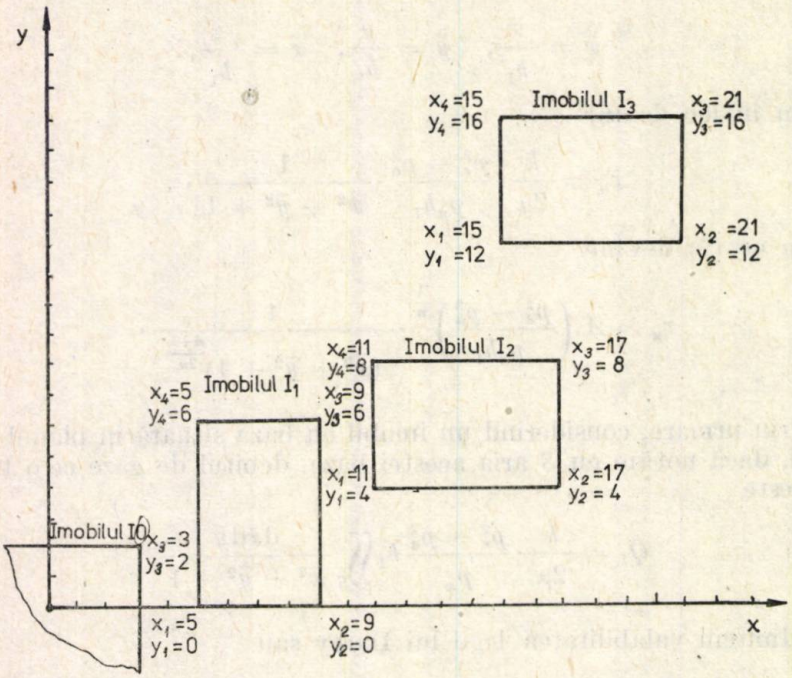


Fig. 3

Tabelul 1

Poziţia imobilului	I_0	I_1	I_2	I_3
L	7,304867	0,421881	0,105968	0,046524
T	8,192940	0,636871	0,183665	0,087518

Calculul integralelor a fost efectuat numeric, iar rezultatele sînt trecute în tabelul 1, imobilele fiind notate cu I_0, I_1, I_2 şi I_3 corespunzător, respectiv, distanţelor indicate mai sus. Se observă, aşa cum era de aşteptat, că pe măsură ce imobilul este mai depărtat de proiecţia orificiului atît L cît şi T scad, ceea ce corespunde la o scădere a debitelor infiltrate.

În figura 4 este reprezentat, pentru ambele legi de filtrare considerate, raportul I_k/I_0, ($k = 1, 2, 3$) în funcţie de distanţa de la centrul bazei fiecărui imobil la proiecţia orificiului pe planul acestei baze. Punctele care

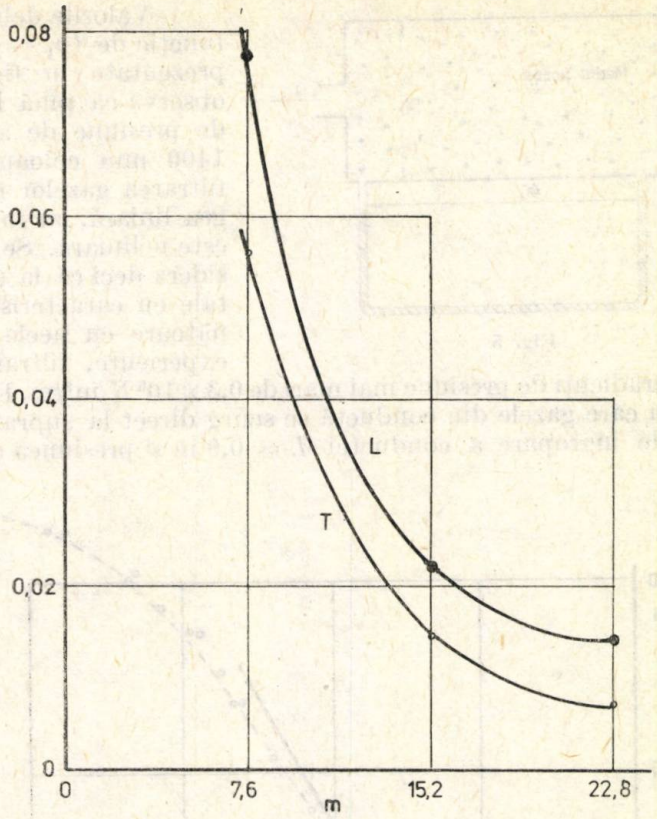


Fig. 4

au servit la trasarea curbelor au fost calculate cu ajutorul valorilor din tabelul 1. Valoarea acestui raport arată cu cît se reduce debitul de gaze infiltrate prin baza imobilului față de cazul în care centrul bazei imobilului ar coincide cu proiecția orificiului.

Se observă că imobilele plasate mai aproape de punctul în care s-a produs defectul conductei sînt expuse la infiltrații mai mari de gaze, indiferent de legea de filtrare admisă. Raportul I_k/I_0 are valori mai mici în cazul în care este valabilă legea neliniară de filtrare.

Cu toate că un imobil așezat cu baza peste orificiul format la conductă reprezintă un caz rar întîlnit în realitate, s-a efectuat și calculul pentru acesta deoarece în raport cu poziția lui se exprimă excentricitatea celor-alte imobile față de defectul apărut la conductă.

3. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A PARAMETRILOR A ȘI n

Pentru a se stabili care sînt valorile lui A și n care trebuie introduse în formulele corespunzătoare legii neliniare de filtrare, s-a realizat un aparat care a fost umplut cu sol vegetal. Simultan cu măsurarea debitului de gaze care au fost circulate prin aparat, s-au măsurat și presiunile p_1 și p_2 (fig. 5).

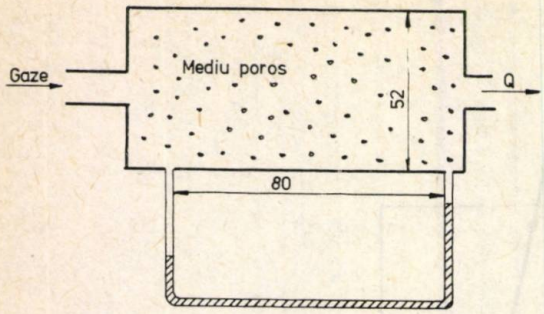


Fig. 5

Valorile debitului Q în funcție de $(p_1 - p_2)$ sînt reprezentate în figura 6. Se observă că pînă la o cădere de presiune de aproximativ 1400 mm coloană de apă, filtrarea gazelor respectă legea liniară, iar în continuare este neliniară. Se poate considera deci că la soluri vegetale cu caracteristici asemănătoare cu acela utilizat în experiențe, filtrarea devine neliniară la gradienți de presiune mai mari de $0{,}3 \times 10^5$ N/m^2/m. De exemplu, în situația în care gazele din conductă se scurg direct la suprafața solului (adîncimea de îngropare a conductei $L = 0{,}9$ m și presiunea atmosferică

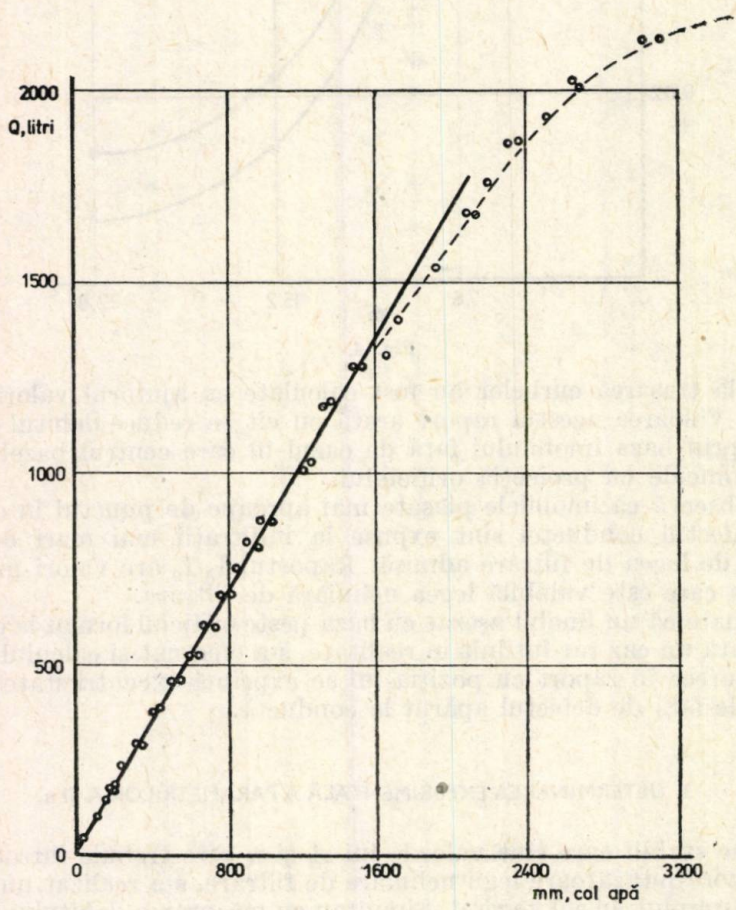


Fig. 6

$p_a = 1{,}01337 \times 10^5$ N/m^2), la valori ale presiunii din exteriorul conductei p_e mai mari decît $1{,}14 \times 10^5$ N/m^2 filtrarea gazelor este neliniară. Pentru acest gradient de presiune limită, din datele experimentale a rezultat o viteză de filtrare de 0,8 m/s. De asemenea, din datele corespunzătoare filtrării liniare s-a calculat permeabilitatea mediului poros, valoarea rezultată fiind 32,893 Darcy. Temperatura gazelor, în timpul experienţelor, a fost 1°C, viscozitatea dinamică ce corespunde acestei temperaturi fiind $0{,}9764 \times 10^{-5}$ Ns/m^2.

Din figura 6 se observă că peste gradientul limită de presiune admis în această lucrare debitul filtrat prin mediul poros este mai mic decît acela care ar corespunde legii liniare de filtrare.

Din corelaţia găsită experimental între viteza de filtrare şi $(p_1^2 - p_2^2)/p_a.l$ (fig. 7) a fost calculat coeficientul

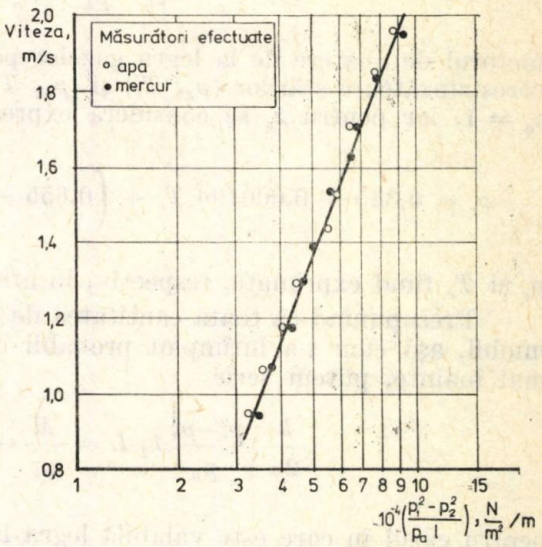


Fig. 7

A care are valoarea $3{,}2642 \times 10^{-5} \mathrm{m}^{\frac{n+3}{n}}/\mathrm{N}^{\frac{1}{n}}.\mathrm{s}$ şi exponentul n care este egal cu 1,2437, valoare care se încadrează între limitele de variaţie 1 şi 2 menţionate în literatura de specialitate [1].

4. CALCULUL PRESIUNII DIN EXTERIORUL CONDUCTEI

Presiunea din exteriorul conductei, în vecinătatea orificiului astupat poate fi calculată într-un mod asemănător cu acela expus în lucrarea noastră precedentă [2].

Viteza de scurgere a unui gaz dintr-un récipient este dată de formula

$$v = \varphi \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{p_e}{\rho_c}\left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}, \tag{15}$$

iar debitul masic are expresia

$$M = \mu^* f \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\, \rho_c p_c \left[\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}, \tag{16}$$

φ fiind coeficientul de viteză, μ^* coeficientul de debit, f aria orificiului, ρ_c masa specifică a gazelor la presiunea p_c şi $\varkappa$ exponentul adiabatic.

Exprimat în condițiile standard (p_a, T_a) debitul volumic are expresia

$$Q = \frac{M}{\rho_c} \cdot \frac{p_c}{p_a} \cdot \frac{T_a}{T_c} \cdot \frac{z_a}{z_c}, \tag{17}$$

factorul de abatere de la legea gazelor perfecte z avînd valorile z_c și z_a corespunzătoare stărilor (p_c, T_c) și (p_a, T_a). În calcule, se poate admite $z_a = 1$, iar pentru z_c se consideră expresia

$$z_c = 0{,}345 + 0{,}000196\, T_c + \left(0{,}655 - \frac{0{,}375}{191}\, T_c\right)\left(1 - \frac{p_c}{45{,}8}\right), \tag{18}$$

p_c și T_c fiind exprimate, respectiv, în atmosfere și grade Kelvin.

Presupunînd că toată cantitatea de gaz se infiltrează într-un singur imobil, așa cum s-a întîmplat probabil în cazul accidentului menționat mai înainte, putem scrie

$$\frac{k}{2\mu} \cdot \frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a} h_1 L = \frac{M}{\rho_c} \cdot \frac{p_c}{p_a} \cdot \frac{T_a}{T_c} \cdot \frac{1}{z_c} \tag{19}$$

pentru cazul în care este valabilă legea lui Darcy și

$$A \left(\frac{p_e^2 - p_a^2}{p_a}\right)^{\frac{1}{n}} h_1^{\frac{2n-1}{n}} T = \frac{M}{\rho_c} \cdot \frac{p_c}{p_a} \cdot \frac{T_a}{T_c} \cdot \frac{1}{z_c} \tag{20}$$

dacă se admite valabilitatea legii neliniare de filtrare; au fost utilizate și notațiile introduse prin formulele (13) și (14).

După cîteva calcule, în care utilizăm și formula (16), rezultă

$$C_L \left[\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^2 - \left(\frac{p_a}{p_c}\right)^2\right] = \frac{1}{z_c} \cdot \frac{T_a}{T_c} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{1}{\rho_c p_c} \left[\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]} \tag{21}$$

pentru filtrarea liniară și

$$C_T \left[\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^2 - \left(\frac{p_a}{p_c}\right)^2\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{p_a^{\frac{1}{n}-1}}{z_c} \times \tag{22}$$

$$\times \frac{T_a}{T_c} \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{1}{\rho_c p_c^{\frac{4-3n}{n}}} \left[\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}$$

pentru filtrarea neliniară, unde am notat

$$C_L = \frac{k}{2\mu} \cdot \frac{h_1}{\mu^* f} L, \tag{23}$$

respectiv

$$C_T = A \frac{h_1^{\frac{2n-1}{n}}}{\mu^* f} T. \tag{24}$$

În funcție de diverse valori ale lui C_L, ale presiunii p_c și ale exponentului adiabatic $\varkappa$, raportul p_e/p_c a fost calculat în lucrarea [2]. În mod asemănător se poate calcula raportul p_e/p_c din formula (22), considerîndu-se mai multe valori pentru C_T. Calculele au fost efectuate cu începere de la o valoare a raportului p_e/p_c egală cu p_a/p_c deoarece presiunea din exteriorul conductei nu poate fi mai mică decît presiunea atmosferică; aceasta din urmă a fost considerată egală cu $1{,}01337 \times 10^5$ N/m^2. Pentru valoarea admisă a raportului p_e/p_c, cu ρ_c și z_c corespunzătoare presiunii p_c și cu T_c și T_a date, s-a calculat și membrul drept al formulei (22), exponentul n avînd valoarea determinată experimental. Dacă raportul p_e/p_c obținut din membrul drept al formulei (22) a diferit cu mai puțin de 10^{-5} față de valoarea introdusă în membrul stîng, s-a considerat că valoarea obținută este corectă. În caz contrar, s-a introdus tot în membrul stîng o valoare $\left(\frac{p_e}{p_c}\right)' = \frac{p_e}{p_c} + 0{,}0001$ și iterația a continuat pînă la îndeplinirea condiției precizate mai înainte. Rezultatele calculelor sînt prezentate în figura 8, pentru domeniul de valori uzuale ale presiunii din conductă p_c și pentru trei valori ale lui C_T.

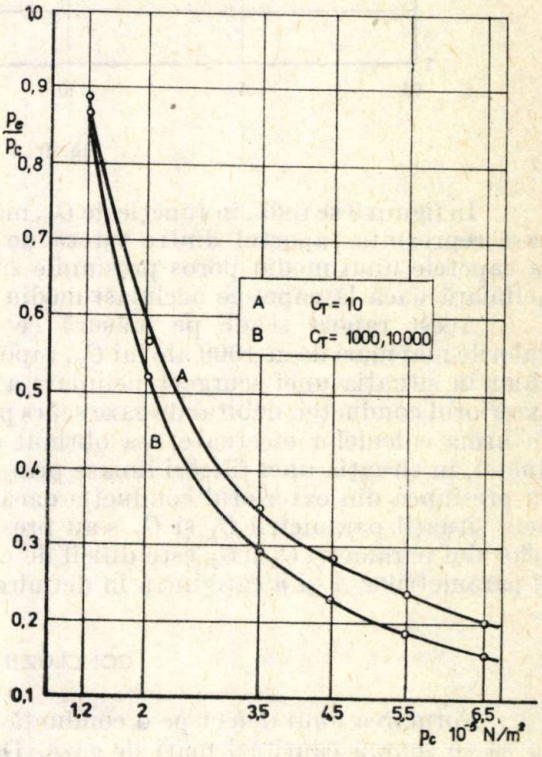


Fig. 8

Se observă că la o valoare dată a lui C_T presiunea din exteriorul orificiului format la conductă scade pe măsură ce crește presiunea din conductă. Această scădere se accentuează pe măsură ce crește valoarea lui C_T. Așa cum rezultă din (24) și din tabelul 1 sau din figura 4, cu

cît imobilul este mai apropiat de orificiul format la conductă, cu atît este mai mare valoarea lui C_T. Prin urmare, la imobilele cele mai apropiate corespund cei mai mari gradienţi de presiune, între presiunea de la exteriorul conductei şi presiunea din interiorul imobilului, presupusă egală cu aceea atmosferică.

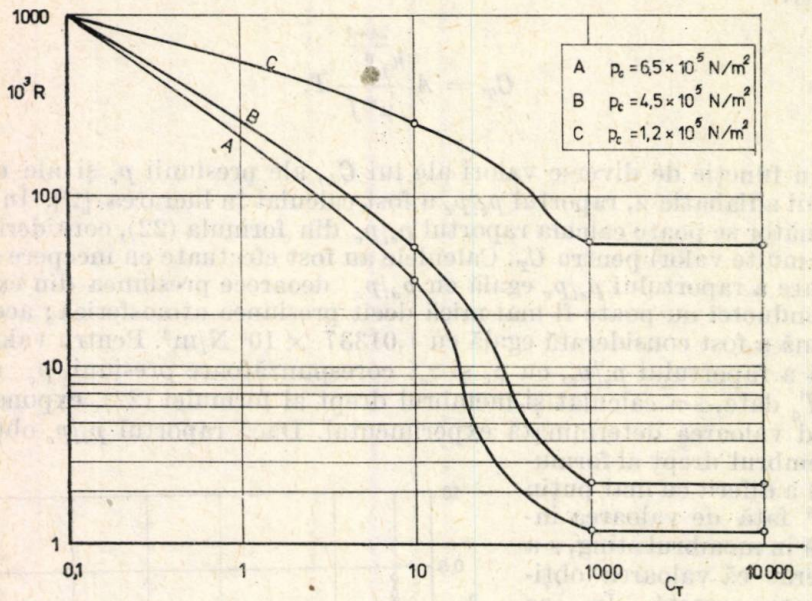


Fig. 9

În figura 9 se redă, în funcţie de C_T, mărimea $R = [(p_e^2 - p_a^2)/(p_c^2 - p_a^2)]^{1/n}$, care reprezintă raportul dintre viteza de filtrare neliniară în cazul cînd la capetele unui mediu poros presiunile sînt p_e şi p_a şi viteza de filtrare neliniară dacă la capetele aceluiaşi mediu poros presiunile ar fi p_c şi p_a.

Acest raport scade pe măsură ce creşte parametrul C_T. Pentru valorile mai mari decît 1000 ale lui C_T, raportul R rămîne constant. Aşadar, chiar în situaţia unei scurgeri neliniare a gazelor prin mediul poros din exteriorul conductei, debitul de gaze scurs prin defectul conductei se reduce. În urma calculelor efectuate, s-a obţinut că presiunea din exteriorul conductei, în situaţia unei filtrări liniare prin mediul poros, este practic egală cu presiunea din exteriorul conductei dacă filtrarea este neliniară; în ambele situaţii parametrii C_L şi C_T s-au presupus egali. Totuşi, compararea celor doi parametri C_L şi C_T este dificil de efectuat datorită permeabilităţii şi parametrilor A şi n care intră în definirea lor.

CONCLUZII

Formarea unui defect pe o conductă de distribuţie face ca prin aceasta să se scurgă cantităţi mari de gaze. Dacă gazele scurse se infiltrează către imobile, cele mai expuse la infiltraţiile de gaze sînt acelea mai apro-

piate de punctul prin care se scurg gazele. La fel ca la filtrarea liniară, debitele de gaze scurse prin defectele conductei depind de presiunea din conductă și de lungimea mediului poros prin care se filtrează. Cu cît orificiul prin care se scurg gazele are secțiunea mai mare cu atît se scurge o cantitate mai mare de gaze.

Primită la redacție la 20 martie 1981.

BIBLIOGRAFIE

1. I. CREȚU *Hidraulica generală și subterană*, Edit. didactică și pedagogică. București, 1971, p. 225–227.
2. T. OROVEANU, S. POPOVICIU, AL. D. STAN *Pierderile de gaze din rețeaua de distribuție*, St. cerc. mec. apl. **40**, *3* (1981).

ASUPRA PROIECTĂRII ELICEI EOLIENE DE RANDAMENT MAXIM

de S. GĂLETUȘE

Institutul politehnic București

Se prezintă o analiză privind efectul frecării asupra vitezelor induse, îmbunătățindu-se prin aceasta relațiile lui Glauert. În baza acestor rezultate se determină condițiile de optim atît pentru randamentul indus, cît și pentru randamentul global, condiții care definesc distribuția corzii și a răsucirii palei în lungul razei.

NOTAȚII

φ_r — unghi de așezare față de planul de rotație,
α_{ef} — incidența efectivă față de axa de portanță nulă (APN),
α_i — unghi indus,
V — viteza vîntului,
Ω — viteza unghiulară de rotație,
W_0 — viteza totală,
W — viteza totală reală,
v, ω — viteze induse de pînza de vîrtejuri,
v_f, ω_f — viteze induse de dîra de vîrtejuri,
$\bar{v}$, $\bar{v}_f$ $= v/V$, v_f/V,
$\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_f$ $= \omega/\Omega$, ω_f/Ω,
R — raza discului elicei,
X_r $= r\Omega/V = \operatorname{tg}\beta$ — pas geometric local,
X $= R\Omega/V$ — pas geometric la extremitate,
C_z — coeficient de portanță,
C_x — coeficientul de rezistență,
C_m — coeficient de moment,
C_t — coeficient de tracțiune,
c — coarda profilului,
$\bar{c}$ — c/R,
$\bar{r}$ — r/R,
n — numărul de pale,
σ $= nc/2\pi r$,
$\bar{T}$ $= 2T/\rho V^2\pi R^2$ — tracțiune adimensională,
$\bar{M}$ $= 2\ M/\rho\ V^2\pi R^3$ — cuplu adimensional.

1. INTRODUCERE

Folosirea vîntului ca sursă de putere se cunoaște de circa 2500 ani în urmă. Totuși, utilizarea elicilor eoliene de dimensiuni mari pentru generare de energie electrică a cunoscut un impuls în ultimul timp. Studii re-

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 4, 1981, P. 593–605

cente au confirmat superioritatea sistemelor cu ax orizontal privind atît eficiența, cît și costul [1]. Elementele de bază pentru calculul unei elici eoliene au fost date de Glauert [2]. Bazat pe similitudine electrică, teoria turbionară a lui Glauert a fost îmbunătățită la Universitatea Amherst [3]. Studii pe model și pe o instalație reală de 10 kW au fost făcute recent la Institutul politehnic Virginia, S.U.A., [4], [5].

Pentru proiectarea unor elici eoliene de mare putere (sute sau chiar mii de kw) cu randament maxim este necesară o analiză mai atentă privind efectul frecării aupra cîmpului de viteze și determinarea condițiilor de optim.

2. CÎMPUL DE VITEZE

Dacă, la o secțiune oarecare r, se determină incidența efectivă α_{ef} (fig. 1), se pot utiliza caracteristicile aerodinamice ale profilului din acea secțiune, ca făcînd parte din aripa de anvergură infinită, la calculul coeficienților de moment și de tracțiune,

$$C_m = C_z \cos(\beta + \alpha_i) - C_x \sin(\beta + \alpha_i),$$
$$C_t = C_z \sin(\beta + \alpha_i) + C_x \cos(\beta + \alpha_i). \tag{1}$$

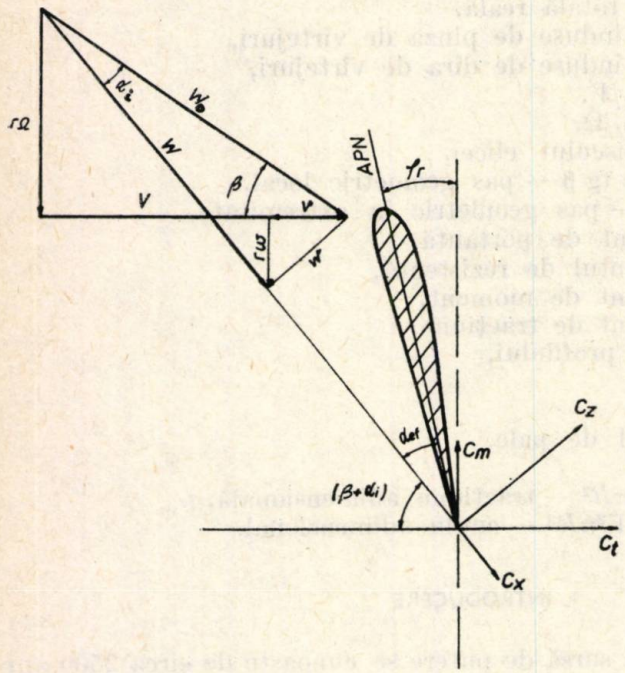


Fig. 1. — Notații

Se va considera următorul sistem de viteze induse,
— în fața profilului : v, ω,
— în dreptul profilului : $v + v_f$, $\omega - \omega_f$,

unde v_f, ω_f sînt viteze ce se datoresc frecării, mai precis vîrtejurilor din dîra spre aval,

— la infinit aval: $v^* + v_f^*$, $\omega^* - \omega_f^*$.

Se va reține că viteza w, compusă din v și $r\omega$, este perpendiculară pe viteza totală W, iar viteza datorată frecării w_f, compusă din v_f și $r\omega_f$, este în lungul lui W și de sens contrar acesteia.

În plus, între vitezele induse în dreptul profilului și cele de la infinit aval există legătura,

$$\begin{aligned} v^* &= 2v, & \omega^* &= 2\omega, \\ v_f^* &= 2v_f, & \omega_f^* &= 2\omega_f, \end{aligned} \tag{2}$$

bazat pe faptul că trena de vîrtejuri, pentru o secțiune departe de profil, reprezintă șir infinit, iar pentru secțiunea din dreptul profilului reprezintă șir de vîrtejuri semiinfinit și considerînd ca variația razei r în lungul scurgerii este neglijabilă. În această situație teoremele impulsului și momentului cinetic duc la;

$$\begin{aligned} \mathrm{d}T &= \mathrm{d}m(v^* + v_f^*) = 2\,\mathrm{d}m(v + v_f), \\ \mathrm{d}M &= \mathrm{d}m\, r^2(\omega^* - \omega_f^*) = 2\,\mathrm{d}m\, r^2(\omega - \omega_f), \end{aligned} \tag{3}$$

unde

$$\mathrm{d}m = \rho\, 2\pi\, r\mathrm{d}r\,(V - v). \tag{4}$$

Ecuația energiei se scrie, ținînd seama de componentele,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_1 &= \frac{\mathrm{d}m(V - v^* - v_f^*)^2}{2} - \frac{\mathrm{d}mV^2}{2} = \mathrm{d}T\, V\,[1 - (\bar{v} + \bar{v}_f)], \\ \mathrm{d}E_2 &= \frac{\mathrm{d}m\, r^2(\omega^* - \omega_f^*)^2}{2} = \mathrm{d}M\,\Omega\,(\bar{\omega} - \bar{\omega}_f), \\ \mathrm{d}E_3 &= \mathrm{d}M \cdot \Omega, \\ \mathrm{d}E_4 &= \frac{\rho}{2} W^2\, nc\,\mathrm{d}r\, C_x(W - w_f), \end{aligned} \tag{5}$$

unde $\mathrm{d}E_3$ este energia scoasă din sistem, iar $\mathrm{d}E_4$ este energia pierdută prin frecare,

$$\mathrm{d}TV[1 - (\bar{v} + \bar{v}_f)] = \mathrm{d}M\Omega[1 + (\bar{\omega} - \bar{\omega}_f)] + \frac{\rho}{2} W^2 nc\mathrm{d}r\, C_x(W - u_f). \tag{6}$$

Tracțiunea elementară dT și momentul elementar dM date de pale, sînt

$$dT = \frac{\rho}{2} W^2 n c d_r C_t, \quad dM = \frac{\rho}{2} W^2 n c r dr C_m. \tag{7}$$

Ținînd seama de expresiile (1) pentru C_t și C_m, se poate scrie relația

$$C_t \cos(\beta + \alpha_i) - C_m \sin(\beta + \alpha_i) = C_x. \tag{8}$$

Dacă se înmulțește cu $\rho W^3 n c dr/2$ relația (8) și se ține seama de expresiile (7) precum și de relațiile între viteze,

$$\begin{aligned} W \cos(\beta + \alpha_i) &= V(1 - \bar{v}), \\ W \sin(\beta + \alpha_i) &= r\Omega(1 + \bar{\omega}), \end{aligned} \tag{9}$$

rezultă

$$dTV(1 - \bar{v}) = dM\Omega(1 + \bar{\omega}) + \frac{\rho}{2} W^3 n c dr C_x. \tag{10}$$

Comparînd această relație (10) cu ecuația energiei (6), rezultă

$$dT v_f = dM \omega_f + \frac{\rho}{2} W^2 n c dr C_x w_f \tag{11}$$

și înlocuind expresiile (7) pentru dT și dM, se obține o relație automat satisfăcută

$$C_t v_f = C_m r \omega_f + C_x w_f \tag{12}$$

în cazul ipotezei că viteza indusă w_f este după direcția lui W.

Din raportul dintre dM și dT rezultă, ținînd seama de (3) și (7),

$$\frac{r^2(\omega - \omega_f)}{v + v_f} = \frac{r C_m}{C_t} \tag{13}$$

și dacă sînt luate în considerare relațiile dintre vitezele induse,

$$\begin{aligned} r\omega \sin(\beta + \alpha_i) &= v \cos(\beta + \alpha_i), \\ r\omega_f \cos(\beta + \alpha_i) &= v_f \sin(\beta + \alpha_i), \\ w &= v \sin(\beta + \alpha_i) + r\omega \cos(\beta + \alpha_i), \\ w_f &= v_f \cos(\beta + \alpha_i) + r\omega_f \sin(\beta + \alpha_i), \end{aligned} \tag{14}$$

se poate obține o expresie foarte simplă de legătură între w_f și w,

$$\frac{w_f}{w} = \frac{C_x}{C_z} = \mu. \tag{15}$$

Din egalarea tracțiunilor elementare (3) și (7), ținînd seama de prima relație (9) și de (15), rezultă

$$\frac{\bar{v}}{1-\bar{v}} = \frac{\sigma C_t}{4\cos^2(\beta + \alpha_i)\left[1 + \dfrac{\mu}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha_i)}\right]} \tag{16}$$

sau, după înlocuirea lui C_t cu (1),

$$\frac{\bar{v}}{1-\bar{v}} = \frac{\sigma C_z \sin(\beta + \alpha_i)}{4\cos^2(\beta + \alpha_i)}. \tag{17}$$

care este o expresie asemănătoare cu cea dedusă de Glauert [2] cu singura deosebire că în loc de coeficientul de tracțiune C_t trebuie luat numai termenul datorat portanței. Asemănător, din egalarea momentelor elementare (3) și (7) și folosind relația a doua (9), rezultă.

$$\frac{\bar{\omega}}{1+\bar{\omega}} = \frac{\sigma C_z}{4 \sin(\beta + \alpha_i)}. \tag{18}$$

Analizînd rezultatele (17) și (18) se poate spune că vitezele induse $\bar{v}$, $\bar{\omega}$, din fața profilului nu sînt influențate de frecarea din stratul limită, sau altfel spus frecarea nu are efect în față. Cu aceste rezultate se poate determina incidența reală α_{ef}, deci se pot utiliza caracteristicile aerodinamice ale profilului din acea secțiune, se poate determina pasul geometric local,

$$X_r = \frac{\bar{v}}{\bar{\omega} \operatorname{tg}(\beta + \alpha_i)}, \tag{19}$$

precum și pasul geometric la extremitate,

$$X = \frac{\bar{v}}{\bar{r}\,\bar{\omega} \operatorname{tg}(\beta + \alpha_i)}. \tag{20}$$

În situația în care raza r nu mai poate fi considerată constantă în lungul scurgerii, se pot păstra ipotezele referitoare la vitezele induse w și w_f, precum și faptul că circulația Γ^* în jurul axei de rotație a elicei este

$$\Gamma^* = 2\pi r^{*2} \omega^* \tag{21}$$

deoarece vîrtejurile alternante din trenă se anulează reciproc (r^* este raza la infinit aval). Circulația Γ^* este egală cu circulația în jurul profilului la raza r,

$$2\pi r^{*2}\,\omega^* = \frac{ncC_zW}{2}, \tag{22}$$

iar viteza ω în fața profilului este dată de

$$\omega = \frac{\Gamma^*}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\frac{r^{*2}}{r^2}\,\omega^*, \tag{23}$$

astfel încît se poate scrie

$$4\pi r^2\,\omega = \frac{n\,c\,C_r}{2}\,\frac{r\,\Omega\,(1+\bar{\omega})}{\sin(\beta+\alpha_i)}, \tag{24}$$

de unde rezultă exact aceeași relație (18) pentru $\bar{\omega}$. Cu această relație (18) și relațiile geometrice

$$\frac{r\Omega}{V}\,\frac{(1+\bar{\omega})}{(1-\bar{v})} = \operatorname{tg}(\beta+\alpha_i),\quad \frac{v}{r\omega} = \operatorname{tg}(\beta+\alpha_i) \tag{25}$$

rezultă și expresia pentru $\bar{v}$ identică cu (17).

Dacă se ține seamă că la extremitatea palei circulația trebuie să fie zero, se poate introduce factorul de corecție $\varkappa$ al lui Prandtl [2]

$$\varkappa = \frac{2}{\pi}\arccos e^{-\frac{n}{2}\frac{(1-\bar{r})}{\bar{r}\cos(\beta+\alpha_i)}}, \tag{26}$$

adică circulația Γ^* reală va fi Γ_r^*,

$$\Gamma_r^* = 4\pi\,\varkappa\,r^2\,\omega \tag{27}$$

și relațiile (18) și (17) devin

$$\frac{\bar{\omega}}{1+\bar{\omega}} = \frac{\sigma\,C_z}{4\,\varkappa\sin(\beta+\alpha_i)},\quad \frac{\bar{v}}{1-\bar{v}} = \frac{\sigma\,C_z\sin(\beta+\alpha_i)}{4\varkappa\cos^2(\beta+\alpha_i)}. \tag{28}$$

3. ELICEA EOLIANĂ DE RANDAMENT MAXIM

Se va defini randamentul global pentru o elice eoliană fără frecare ($\mu = 0$), astfel

$$\eta_0 = \frac{M\Omega}{\frac{\rho}{2}\pi R^2 V^3}, \tag{29}$$

iar randamentul indus η_i,

$$\eta_i = \frac{M\Omega}{TV} = \frac{\eta_0}{\bar{T}}. \tag{30}$$

Rezultă din (30) că o elice eoliană va avea randamentul maxim la un $\bar{T}$ dat pentru η_i maxim.

Integrînd relaţia (6) în cazul $C_x = 0$, $v_f = 0$, $\omega_f = 0$, rezultă randamentul indus sub forma

$$\eta_i = 1 - \frac{\int_0^R v\,\mathrm{d}T + \int_0^R \omega\,\mathrm{d}M}{TV}. \tag{31}$$

Ţinînd seama de expresiile (3) ale lui $\mathrm{d}T$ şi $\mathrm{d}M$, condiţia de minim pentru η_i cu constrîngerea TV=const., devine condiţia de extrem a expresiei

$$\int_0^R (V - v)[(v^2 + r^2\omega^2) - K\,V\,v\,]\,r\mathrm{d}r, \tag{32}$$

unde K este multiplicatorul lui Lagrange. Din această condiţie se obţine

$$(V - v)\,[(v^2 + r^2\omega^2) - K\,V\,v] = C, \tag{33}$$

unde constanta C se deduce ştiind că atunci cînd $w = 0$ componentele v şi ω se anulează simultan. Rezultă astfel

$$1 + \frac{r^2\omega^2}{v^2} = \frac{K}{v}, \tag{34}$$

relaţie identică cu condiţia de optim a elicei tractive fără frecare [6]. Înlocuind acest rezultat în relaţia (31) va rezulta

$$\eta_i = 1 - \frac{\int_0^R v^2\,(V - v)\left(1 + \frac{r^2\omega^2}{v^2}\right) r\mathrm{d}r}{V\int_0^R (V - v)v\,r\mathrm{d}r} = 1 - K. \tag{35}$$

Se poate arăta că randamentul indus la raza r,

$$\eta_{ir} = \frac{\mathrm{d}M\Omega}{\mathrm{d}TV} = \frac{r\Omega}{V}\cdot\frac{r\omega}{v} = \frac{1 - \bar{v}}{1 + \bar{\omega}}, \tag{36}$$

unde s-a ținut seama de (3) și (25), este constant și egal cu η_{it}. Din relațiile (25) rezultă și

$$\frac{v}{r\omega} = \frac{r\Omega}{V}\frac{(1+\bar{\omega})}{(1-\bar{v})} = \frac{r\Omega}{V}\frac{1}{\eta_{itr}}, \tag{37}$$

care, înlocuită în (36), duce la

$$\eta_{itr} = \frac{1-\bar{v}}{1+\dfrac{r^2\omega^2}{v^2}\dfrac{1}{\eta_{itr}}\bar{v}} \tag{38}$$

sau încă

$$\eta_{itr} = 1-\bar{v}\left(1+\frac{r^2\omega^2}{v^2}\right) = 1-K = \eta_{it}. \tag{39}$$

Din relația a doua (25) și (37) se obține

$$\operatorname{tg}(\beta+\alpha_i) = \frac{r\Omega}{V}\frac{1}{\eta_{itr}} = \frac{X\bar{r}}{\eta_{itr}}, \tag{40}$$

iar din expresia (34), ținînd seama de (39) și (40) se poate scrie

$$1+\frac{\eta_{it}^2}{X^2\bar{r}^2} = \frac{1-\eta_{it}}{\bar{v}} \tag{41}$$

și de aici se deduce viteza indusă $\bar{v}$,

$$\bar{v} = \frac{X^2\bar{r}^2(1-\eta_{it})}{X^2\bar{r}^2+\eta_{it}^2}, \tag{42}$$

iar pentru viteza unghiulară indusă $\bar{\omega}$, avem

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{v}\,V}{r\Omega\operatorname{tg}(\beta+\alpha_i)} = \frac{\bar{v}\,\eta_{it}}{X^2\bar{r}^2} = \frac{\eta_{it}(1-\eta_{it})}{X^2\bar{r}^2+\eta_{it}^2}. \tag{43}$$

Pentru elicea eoliană cu frecare, s-a arătat că vitezele induse $\bar{v}$, $\bar{\omega}$ nu depind de frecare (17), (18) și atunci se poate găsi direct condiția de optim, utilizînd rezultatele de la elicea fără frecare.

Randamentul indus se scrie acum,

$$\eta_{it} = \frac{\displaystyle\int_0^R (V-v)\,(1-\mu\operatorname{tg}(\beta+\alpha_i))\,r^2\omega\Omega\,r\,dr}{\displaystyle\int_0^R (V-v)\left(1+\frac{\mu}{\operatorname{tg}(\beta+\alpha_i)}\right)Vv\,r\,dr}, \tag{44}$$

unde s-au utilizat expresiile (7), (1), (17), şi (18).

Condiţia ca η_i să fie maxim cu constrîngerea TV = const., se scrie ca maxim al expresiei I_1,

$$I_1 = \int_0^R (V - v) r^2 \Omega \omega [1 - \mu \operatorname{tg}(\beta + \alpha_i)] r dr - \\ - K_1 \int_0^R V - v) V v \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha_i)}\right) r dr. \tag{45}$$

Se va observa că expresia I_1 se poate despărţi în două integrale I_2, I_3

$$I_1 = I_2 - I_3,$$

$$I_2 = \int_0^R (V - v)(r^2 \Omega \omega - K_1 V v) r dr, \tag{46}$$

$$I_3 = \int_0^R \mu (V - v) \left[r^2 \Omega \omega \operatorname{tg}(\beta + \alpha_i) + K_1 \frac{V v}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha_i)} \right] r dr.$$

Se poate arăta imediat că extremul integralei I_2 este obţinut în cazul în care

$$\frac{v}{r\omega} = \frac{r\Omega}{K_1 V} = \frac{X \bar{r}}{K_1} = \text{Const. } \bar{r}, \tag{47}$$

condiţie care este identică cu condiţia (34). În integrala I_3 expresia care înmulţeşte μ este strict pozitivă, deci pentru ca I_3 să fie minimă trebuie ca μ să fie minim. În plus, dacă se consideră acelaşi tip de profil în lungul palei, se poate considera $\mu_0 = (C_x/C_z)_{minim}$ constant cu raza.

Condiţia (47) este o aproximare cu o eroare sub 5% a soluţiei exacte corespunzătoare extremului integralei I_1.

În aceste condiţii randamentul golbal η_i se scrie

$$\eta_i = \eta_{i0} - \frac{8 X^3}{\eta_{i0}} \mu \int_0^1 (1 - \bar{v}) \bar{\omega} \bar{r}^4 \, d\bar{r} \tag{48}$$

şi înlocuind expresiile (42), (43) pentru $\bar{v}$ şi $\bar{\omega}$, se obţine

$$\eta_i = 4\eta_{i0}^2 (1 - \eta_{i0}) \left[\frac{X^2 + 2\eta_{i0}^2 - \eta_{i0}}{\eta_{i0}^2 + X^2} + \frac{\eta_{i0}(1 - 2\eta_{i0})}{X^2} \ln \left(1 + \frac{X^2}{\eta_{i0}^2}\right) \right] - \\ - 4\mu_0 X \eta_{i0} (1 - \eta_{i0}) \left[\frac{2X^2 + 5\eta_{i0}^2 - 3\eta_{i0}}{3(\eta_{i0}^2 + X^2)} + \frac{\eta_{i0}(3 - 5\eta_{i0})}{X^2} + \frac{2\eta_{i0}}{X^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{X}{\eta_{i0}} \right]. \tag{49}$$

Valoarea lui η_i necesară ca η să fie maxim se deduce din $d\eta/d\eta_i = 0$

$$(2 - 3\eta_i) + \frac{\eta_i(1 - \eta_i)(7\eta_i - 5)}{\eta_i^2 + X^2} + \frac{2\eta_i^3(1 - \eta_i)^2}{(\eta_i^2 + X^2)^2} +$$

$$+ \frac{\eta_i(10\eta_i^2 - 12\eta_i + 3)}{X^2} \ln \frac{\eta_i^2 + X^2}{\eta_i^2} - \mu_0 X \left[\frac{2(1 - 2\eta_i)}{3} - \frac{2\eta_i^3(1 - \eta_i)}{X^2(\eta_i^2 + X^2)} + \right.$$

$$+ \frac{2\eta_i^3(1 - \eta_i)^2}{(\eta_i^2 + X^2)^2} + \frac{2\eta_i(1 - \eta_i)(2\eta_i - 1)}{(\eta_i^2 + X^2)} + \frac{2\eta_i(10\eta_i^2 - 12\eta_i + 3)}{X^2} +$$

$$\left. + \frac{2\eta_i^2(3 - 4\eta_i)}{X^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{X}{\eta_i} \right] = 0. \qquad (50)$$

Cu relația (50) s-au determinat randamentele induse necesare ca randamentul global să fie maxim, pentru diferite valori μ_0, după care s-a calculat randamentul maxim posibil. Rezultatele sînt prezentate în figura 2

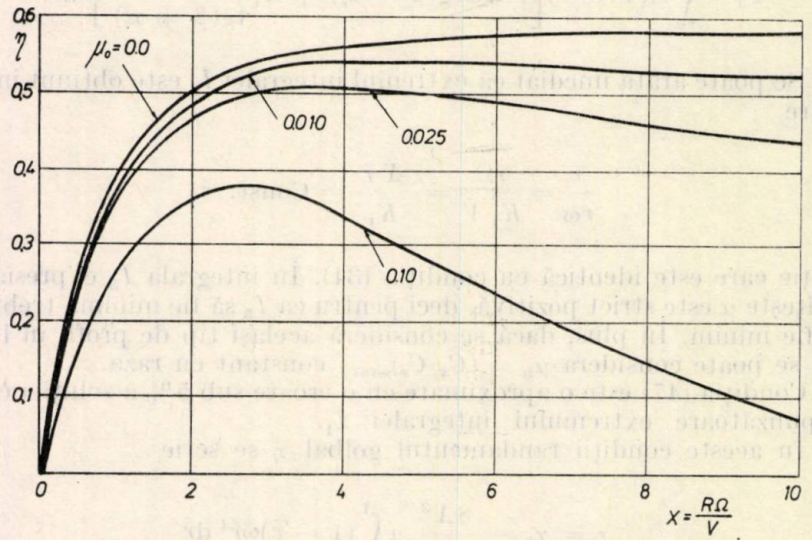


Fig. 2. — Randamentul global maxim

Dacă se împarte randamentul η la pasul geometric X, se obține momentul adimensional

$$\bar{M} = \frac{\eta}{X}. \qquad (51)$$

În figura 3 sînt prezentate rezultatele privind momentul adimensional maxim pe care poate să-l dea o elice eoliană pentru diferite valori μ_0.

Randamentul local η_{ir} definit ca

$$\eta_{ir} = \frac{\mathrm{d}M\Omega}{\frac{\rho}{2} V^2 2\pi r \mathrm{d}r \cdot V} \tag{52}$$

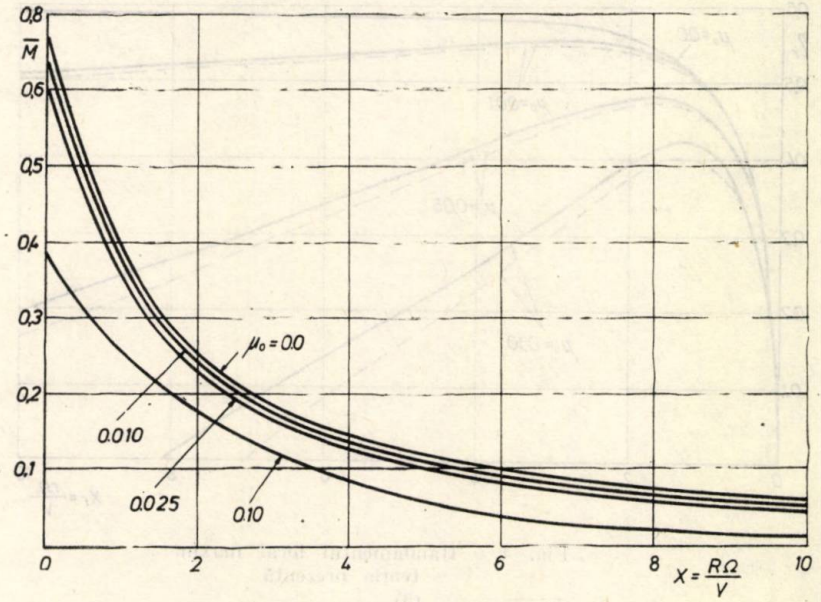


Fig. 3. — Cuplul adimensional maxim

se poate deduce în funcţie de vitezele induse, utilizînd relaţiile (7), (1), (9), (17), (18).

$$\eta_{ir} = 4 X_r^2 (1 - \bar{v})\bar{\omega} - \mu \frac{4X_r^3 (1 - \bar{v})\bar{\omega}}{\eta_{it}} \tag{53}$$

sau încă, după înlocuirea lui $\bar{v}$ şi $\bar{\omega}$ cu (42), (43),

$$\eta_{ir} = \frac{4X_r^2 \eta_{it}^2 (\eta_{it} + X_r^2)(1 - \eta_{it})}{(\eta_{it}^2 + X_r^2)^2} - \mu_0 \frac{4X_r^3 \eta_{it}(1 - \eta_{it})(\eta_{it} + X_r^2)}{(\eta_{it}^2 + X_r^2)^2}. \tag{54}$$

Condiţia pentru η_r maxim este dedusă din

$$\left[\eta_{it}(2 - 3\eta_{it}) + \frac{\eta_{it}^2 (1 - \eta_{it})}{\eta_{it} + X_r^2} - \frac{4\eta_{it}^3 (1 - \eta_{it})}{\eta_{it}^2 + X_r^2}\right] -$$

$$- \mu_0 X_r \left[1 - 2\eta_{it} + \frac{\eta_{it}(1 - \eta_{it})}{\eta_{it} + X_r^2} - \frac{4\eta_{it}^2 + (1 - \eta_{it})}{\eta_{it}^2 + X_r^2}\right] = 0. \tag{55}$$

Folosind relația (55) s-au determinat randamentele locale maxime pentru diferite valori μ_0, în funcție de pasul geometric local și s-au reprezentat în figura 4. În aceeași figură s-au prezentat și rezultatele obținute la Universitatea Amherst [3] și se poate remarca o bună concordanță cu rezultatele prezente.

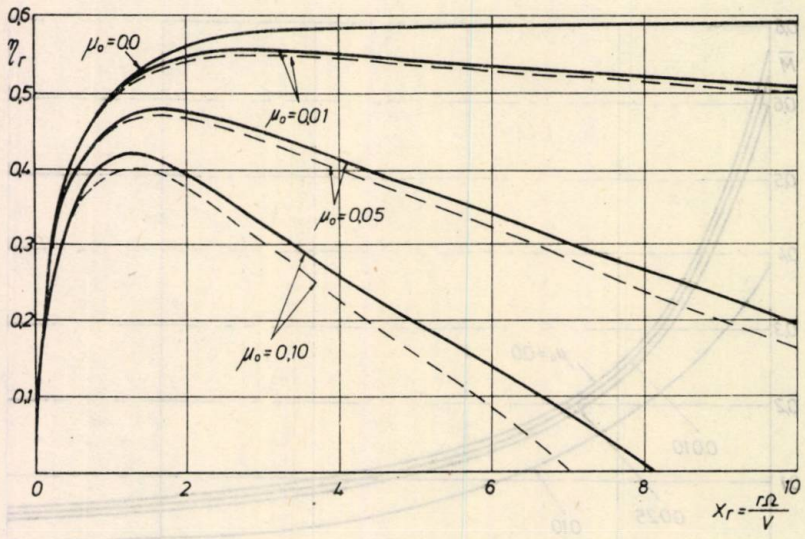


Fig. 4. — Randamentul local maxim:
———————— teoria prezentă
– – – – – – – (3)

4. PROIECTAREA ELICII EOLIENE OPTIME

Pentru un pas geometric X, se poate deduce din (50) randamentul indus necesar pentru a obține randament η maxim (în cazul unui profil cu finețe $1/\mu_0$ cunoscută). Din relația (40) se poate determina unghiul $(\beta + \alpha_i)$,

$$\beta + \alpha_i = \operatorname{arc\,tg} \frac{X \bar{r}}{\eta_i}, \tag{56}$$

la care se adugă incidența efectivă α_{ef} pentru μ_0 (notată cu α_{μ_0}), obținîndu-se astfel unghiul φ_r față de planul de rotație,

$$\varphi_r = 90^\circ - (\beta + \alpha_i + \alpha_{\mu_0}). \tag{57}$$

Din a doua relație (28) se poate deduce,

$$\bar{v} = \frac{\dfrac{\sigma}{4} \dfrac{C_z \operatorname{tg}(\beta + \alpha_i)}{\varkappa \cos(\beta + \alpha_i)}}{1 + \dfrac{\sigma}{4} \dfrac{C_z \operatorname{tg}(\beta + \alpha_i)}{\varkappa \cos(\beta + \alpha_i)}}, \tag{58}$$

iar după dezvoltare și utilizînd expresiile (40) și (42) se obține

$$n\bar{c}\,C_z = \frac{8\pi\,\varkappa\,\bar{r}^2\,\eta_i(1-\eta_i)X}{(\eta_i+\bar{r}^2\,X^2)\sqrt{\eta_i^2+\bar{r}^2\,X^2}}, \tag{59}$$

în care numărul de pale n și coeficientul de portanță C_z se cunosc. Se va lua C_z corespunzător incidenței α_{μ_0}, respectiv C_z pentru $(C_x/C_z)_{minim}$.

Pentru alte aspecte legate de proiectarea și utilizarea elicilor eoliene se pot consulta lucrările de sinteză /7/, [8].

Primită la redacție la 15 ianuarie, 1981

BIBLIOGRAFIE

1. H. DORNER, *Efficiency and economic comparison of different WEC rotor system*, presented at an International Conference on Appropiate Technologies for Semi-arid Areas: Wind and Solar Energy for Water Supply, Berlin, sept (1975).
2. H. GLAUERT, *Airplane Propellers*, in „Aerodynamic Theory", vol. IV, ed. W. F. Durand, pp. 230—269, 324—341, Berlin (1935).
3. P. L. LEFEBVRE, D. E. CROMACK, *A comparative study of optimized blade configurations for high speed wind turbines*. T. R. for U. S. Energy Research, prepared by the Mechanical Engineering Department of Amherst, Massachussets University, august (1977).
4. R. L. FIGARD, J. A. SCHETZ, *Studies of the aerodynamic performance of a 10 kW horizontal axis windmill*, AIAA Journal of Energy 3, pp. 3—7, ian-feb (1979).
5. R. L. FIGARD, J. A. SCHETZ, *Flowfield measurements in the vicinity of the rotor of a 10 kW windmill*, AIAA Terrestrial Energy Systems Conference, June 4—6, Orlando, Florida, U.S.A, (1979).
6. E. CARAFOLI, *Elici aeriene*, Litografia Institutului politehnic București (1954).
7. E. M. FATEEV, *Vetrodvigateli i vetroustanovski*, Oghiz, Moscova (1948).
8. D. Le GOURIÈRES, *Energie eolienne*, Eyrolles, Paris (1980).

MIŞCAREA ŞI ÎNSCRIEREA ÎN CURBĂ A AUTOMOBILULUI

de CH. VASILIU, TR. CANŢĂ

OLTCIT, Bucureşti

Mişcarea în curbă a automobilului este influenţată de elasticitatea laterală a pneurilor. Astfel, datorită unghiurilor de derivă de mărime diferită ce apar la roţile din faţă şi din spate, automobilele se comportă diferit la acţiunea de înscriere şi circulaţie în curbe. De asemenea, înscrierea în curbe a automobilului, cu asigurarea unui confort minim privind variaţia acceleraţiei centrifuge de-a lungul traseului de racordare (trecere), necesită satisfacerea unor cerinţe cineto-dinamice din partea automobilului şi geometrice din partea căii rutiere.

În lucrare sînt evidenţiate aceste aspecte şi prezentate relaţiile analitice de interdependenţă a factorilor ce intervin în desfăşurarea fenomenului.

1. INFLUENŢA UNGHIULUI DE DERIVĂ ASUPRA MERSULUI ÎN CURBĂ A AUTOMOBILULUI

În mişcarea neuniformă şi curbilinie a automobilului, cu variaţii ale unghiului de virare, apar forţe de inerţie datorate masei automobilului aflată în mişcare variată şi momente datorită inerţiei maselor ce execută mişcări rotitorii.

Literatura de specialitate analizează echilibrul dinamic al automobilului în curbă, făcîndu-se abstracţie de deformarea laterală a pneurilor [1; 2; 3].

Se cunoaşte — însă — că datorită elasticităţii transversale a pneurilor, poziţia centrului efectiv de viraj 0_ε (fig. 1), nu se mai află pe prelungirea osiei din spate a automobilului, ci la intersecţia perpendicularelor în punctele M şi N pe vectorii viteză V_f şi V_s, care indică direcţia efectivă a mişcării mijlocului osiilor din faţă şi, respectiv, din spate ale automobilului.

În curbă, unghiul de virare mediu θ al roţilor de direcţie (θ_i fiind unghiul de virare al roţii directoare interioare virajului, iar θ_e, unghiul roţii exterioare) va fi diminuat cu unghiul de derivă al pneurilor din faţă ε_f, mediana osiei din spate făcînd unghiul de derivă ε_s cu vectorul viteză al său.

Prin proiectarea centrului efectiv de viraj pe planul lon-

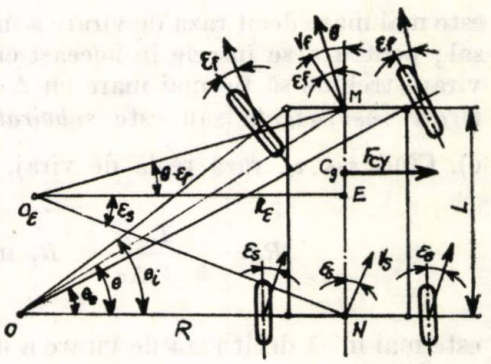


Fig. 1

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 4, 1981, P. 607–617

gitudinal al automobilului și analiza trigonometrică a figurii rezultate, se determină raza efectivă de viraj [2]:

$$R_\varepsilon = \frac{L}{\operatorname{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \operatorname{tg}\varepsilon_s}. \tag{1}$$

Ținînd seama că unghiurile de derivă ale roților cu pneuri nu depășesc valorile de 10°, pentru unghiuri de viraj mici, se admite practic relația

$$R_\varepsilon = \frac{L}{\theta + \varepsilon_s - \varepsilon_f}. \tag{2}$$

Mărimea diferită a unghiurilor de derivă a roților din față și din spate, conduce — din punct de vedere al virajului efectuat — la comportări diferite ale automobilului la înscrierea în curbă.

Se remarcă trei cazuri distincte:

a) Cînd $\varepsilon_f = \varepsilon_s$, raza reală de viraj,

$$R_\varepsilon = \frac{L}{\theta} = R,$$

este egală cu raza de viraj a automobilului cu roți rigide transversal (fig. 1), adică virajul nu este influențat de unghiul de derivă; se spune că automobilul are *virare neutră*.

b). Cînd $\varepsilon_f > \varepsilon_s$, raza reală de viraj,

$$R_\varepsilon = \frac{L}{\theta - \Delta\varepsilon} > R, \text{ în care } \Delta\varepsilon = \varepsilon_f - \varepsilon_s,$$

este mai mare decît raza de virare a unui automobil cu roți rigide transversal; pentru a se înscrie în aceeași curbă a drumului, unghiul efectiv de virare trebuie să fie mai mare cu $\Delta\varepsilon$; se spune că automobilul posedă o *virare insuficientă* sau este *subvirator*.

c). Cînd $\varepsilon_f < \varepsilon_s$, raza reală de viraj,

$$R_\varepsilon = \frac{L}{\theta + \Delta\varepsilon} < R, \text{ în care } \Delta\varepsilon = \varepsilon_f - \varepsilon_s,$$

este mai mică decît raza de virare a unui automobil cu roți rigide transversal; pentru a se obține aceeași traiectorie a mișcării, unghiul de virare trebuie să fie mai mic cu $\Delta\varepsilon = \varepsilon_f - \varepsilon_s$; se spune că automobilul posedă o *virare în exces* sau este *supravirator*.

2. DINAMICA MIȘCĂRII ÎN CURBĂ A AUTOMOBILULUI

La o mișcare accelerată curbilinie și cu variație a unghiului de virare (adică $\frac{dv}{dt} = \text{const.}$ și $\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$), relațiile generale care exprimă echilibrul dinamic al automobilului (fig. 2) sînt :

$$F_{ix} = m_a \left(\frac{dv}{dt} - b\,\omega^2 \right),$$

$$F_{iy} = m_a \left(R\,\omega^2 + b \frac{d\omega}{dt} \right), \quad (3)$$

$$M_{iz} = m_a \rho_z^2 \frac{d\omega}{dt},$$

în care $m_a = \frac{G_a}{g}$ este masa automobilului ;

$\frac{dv}{dt}$ — accelerația liniară a automobilului ;

ω — viteza unghiulară în jurul centrului instantaneu de rotație ;

$\frac{d\omega}{dt}$ — accelerația unghiulară ;

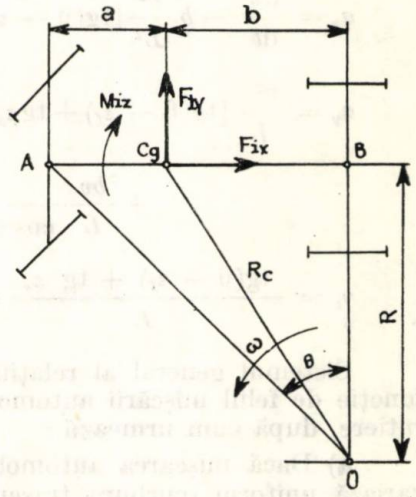


Fig. 2

ρ_z — raza de giratie a masei automobilului, în raport cu axa Z.

Luînd în considerație influența unghiurilor de derivă, astfel ca $\omega = \frac{v}{R_\varepsilon}$ și ținînd seama de relația (1), rezultă

$$\omega = \frac{v}{L} [tg(\theta - \varepsilon_f) + \text{tg}\ \varepsilon_s], \quad (4)$$

de unde

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{L} [\text{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \text{tg}\ \varepsilon_s] \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} \frac{1}{\cos^2(\theta - \varepsilon_f)} \frac{d\theta}{dt}. \quad (5)$$

Cunoscînd că variabilele independente sînt viteza de circulație și unghiul de viraj, relațiile de echilibru dinamic vor deveni :

$$F_{ix} = m_a \left(\frac{dv}{dt} - b \frac{v^2}{R_\varepsilon^2} \right),$$

$$F_{iy} = m_a \left(\frac{v^2}{R_\varepsilon} + \frac{b}{R_\varepsilon} \frac{dv}{dt} + \frac{b}{L} \frac{v}{\cos^2(\theta - \varepsilon_f)} \frac{d\theta}{dt} \right), \quad (6)$$

$$M_{iz} = m_a \rho_z^2 \left(\frac{1}{R_\varepsilon} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \frac{v}{\cos^2(\theta - \varepsilon_f)} \frac{d\theta}{dt} \right),$$

în care R_ε este o funcție dependentă de unghiul de viraj θ și de unghiurile de derivă ε_f și ε_s.

Se constată — deci — că într-o astfel de mișcare, planparalelă, curbilinie și variată, vor apare două accelerații liniare — una longitudinală și alta transversală —și o accelerație unghiulară, în jurul verticalei prin centrul de greutate al automobilului:

$$a_x = \frac{dv}{dt} - b\frac{v^2}{L^2}[\operatorname{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \operatorname{tg}\varepsilon_s]^2,$$

$$a_y = \frac{v^2}{L}[\operatorname{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \operatorname{tg}\varepsilon_s] + \frac{b}{L}[\operatorname{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \operatorname{tg}\varepsilon_s]\frac{dv}{dt} + \tag{7}$$

$$+ \frac{bv}{L}\frac{1}{\cos^2(\theta - \varepsilon_f)}\frac{d\theta}{dt},$$

$$\nu_z = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \operatorname{tg}\varepsilon_s}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L}\frac{1}{\cos^2(\theta - \varepsilon_f)}\frac{d\theta}{dt}.$$

Sistemul general al relațiilor de echilibru dinamic se modifică în funcție de felul mișcării automobilului și de forma curbei traseului căii rutiere, după cum urmează:

a) Dacă mișcarea automobilului este uniformă, iar raza de viraj variază uniform (curbura traseului căii rutiere crește uniform), adică $\frac{dv}{dt} = 0$ și $\frac{d\theta}{dt} = \text{const}$, sistemul de ecuații (7) capătă forma:

$$a_x = -b\frac{v^2}{L^2}[\operatorname{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \operatorname{tg}\varepsilon_s]^2,$$

$$a_y = \frac{v^2}{L}[\operatorname{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \operatorname{tg}\varepsilon_s] + \frac{bv}{L}\frac{1}{\cos^2(\theta - \varepsilon_f)}\frac{d\theta}{dt}, \tag{8}$$

$$\nu_z = \frac{v}{L}\frac{1}{\cos^2(\theta - \varepsilon_f)}\frac{d\theta}{dt}.$$

b) Dacă mișcarea automobilului variază uniform, iar curbura traseului căii rutiere este constantă, adică $\frac{dv}{dt} = \text{const.}$ și $\frac{d\theta}{dt} = 0$, sistemul de ecuații (7) devine:

$$a_x = \frac{dv}{dt} - b\frac{v^2}{L^2}[\operatorname{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \operatorname{tg}\varepsilon_s]^2,$$

$$a_y = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \operatorname{tg}\varepsilon_s}{L}\left(v^2 + b\frac{dv}{dt}\right), \tag{9}$$

$$\nu_z = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \operatorname{tg}\varepsilon_s}{L}\frac{dv}{dt}.$$

c) Dacă atît viteza automobilului, cît şi curbura traseului căii rutiere sînt constante, adică $\frac{dv}{dt} = 0$ şi $\frac{d\theta}{dt} = 0$, sistemul de ecuaţii (7) capătă forma :

$$a_x = -b\frac{v^2}{L^2}[\mathrm{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \mathrm{tg}\,\varepsilon_s]^2,$$

$$a_y = \frac{v^2}{L}[\mathrm{tg}(\theta - \varepsilon_f) + \mathrm{tg}\,\varepsilon_s], \tag{10}$$

$$\nu_z = 0.$$

Acest ultim fel de mişcare în curbă a automobilului este cea mai des folosită, raza de curbură a traseului curb al căii rutiere R fiind constantă, iar raza efectivă de viraj a automobilului trebuind să fie astfel realizată $R_e = R$) încît vehiculul să se înscrie în curbă, chiar dacă este supraviratator sau subvirator.

În acest caz automobilul se află numai sub acţiunea forţelor de inerţie [2] :

$$F_{ix} = -m_a b\frac{v^2}{R^2} \quad ; \quad F_{iy} = m_a\frac{v^2}{R}, \tag{11}$$

prin a căror însumare geometrică se obţine forţa centrifugă

$$F_c = m_a\frac{v^2}{R^2}\sqrt{b^2 + R^2}. \tag{12}$$

Ţinînd seama de relaţiile geometrice (fig. 2) şi cinematice :

$$R_c = \sqrt{b^2 + R^2} \quad \text{şi} \quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{v_c}{R_c},$$

în care R_c este raza de viraj a centrului de greutate al automobilului ; v_c — viteza tangenţială a centrului de greutate, rezultă relaţia cunoscută :

$$F_c = m_a\frac{v_c^2}{R_c}. \tag{13}$$

3. STABILITATEA TRANSVERSALĂ, ÎN CURBĂ, A AUTOMOBILELOR

La parcurgerea unei curbe, forţa centrifugă poate să provoace derapparea sau răsturnarea automobilului. Construcţiile actuale ale automobilelor evită apariţia răsturnării înaintea derapării ; ca atare, în mod normal, stabilitatea transversală în curbă este condiţionată de evitarea apariţiei derapării automobilului.

Pe o cale orizontală în curbă, deraparea apare cînd forța centrifugă depășește forța de aderență transversală a automobilului:

$$F_D = \frac{G_a}{g}\frac{V_D^2}{R_c} \geqslant \varphi G_a \tag{14}$$

sau cînd viteza depășește limita

$$V_D = \sqrt{\varphi g R_c}. \tag{15}$$

Se consideră că forța centrifugă este repartizată pe roți în același raport ca și sarcinile pe osii și că nici o altă forță, precum ar fi forțele de tracțiune sau frînare, nu acționează asupra roților.

Pentru a mări stabilitatea, sub acțiunea accelerației centrifuge a automobilelor care circulă cu viteze mari, se folosește supraînălțarea transversală în curbe a căilor rutiere.

Pe o cale supraînălțată exterior cu unghiul β, automobilul va derapa atunci cînd rezultanta dată de însumarea vectorială a greutății vehiculului și a forței centrifuge (fig. 3), formează cu verticala un unghi egal cu suma unghiurilor $\beta + \rho$[2], ρ fiind unghiul de aderență: $\varphi = \operatorname{tg}\rho$.

În acest caz, limita vitezei de derapare este:

$$V_D = \sqrt{g R_c \operatorname{tg}(\beta + \rho)} \tag{16}$$

sau

$$V_D = \sqrt{g R_c \frac{\varphi + \operatorname{tg}\beta}{1 - \varphi \cdot \operatorname{tg}\beta}}. \tag{17}$$

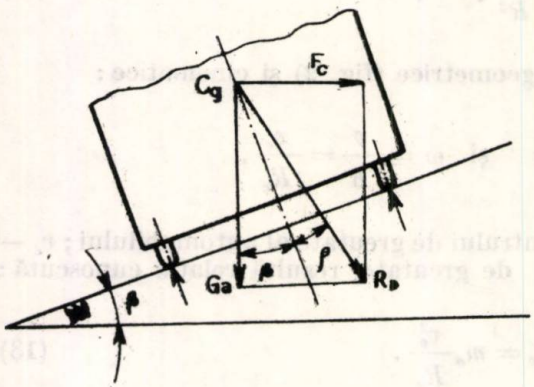


Fig. 3

Dacă în viraj, asupra roților se exercită forțe de antrenare sau de frînare, limita superioară a forțelor de ghidare laterală a roților se micșorează, pierderea stabilității transversale începînd cu roțile motoare sau frînate, la raze de curbură mai mari sau la unghiuri de înclinare transversală mai mici decît cele determinate analitic.

Raza de curbură care trebuie dată traseului căii rutiere, depinde de viteza maximă de circulație, prin relația:

$$R_c > \frac{V_M^2}{g \operatorname{tg}(\beta + \rho)} \tag{18}$$

sau, prin aproximație în plus,

$$R_c > \frac{V_M^2}{g(\varphi + \rho)}, \tag{19}$$

în care

V_M reprezintă viteza maximă de circulație admisă în curba respectivă;

φ — coeficientul de aderență dintre pneuri și calea rutieră;

p — panta transversală (care este de ordinul de la 0,06 la 0,10);

astfel încît să se obțină stabilitatea transversală a automobilelor în curbă.

4. CINEMATICA ÎNSCRIERII ÎN CURBĂ A AUTOMOBILELOR

Traseul axei oricărei căi rutiere este alcătuit din aliniamente (trasee rectilinii), arce de cerc și curbe de racordare sau de trecere. Aceste curbe de racordare au rolul de a elimina discontinuitatea de curbură care se manifestă la contactul dintre o dreaptă cu un arc de cerc, discontinuitate incompatibilă cu un traseu rațional al căilor rutiere.

Practic, traiectoria unui vehicul — în zona de racordare — trebuie să aibă o curbură progresivă, variind de la zero în punctul de contact cu traseul rectiliniu, pînă la $1/R_c$ în punctul de contact cu partea circulară; de-a lungul acestei zone panta supraînălțării va varia proporțional cu curbura.

Lungimea racordării este determinată de *condiția de confort*, care constă în limitarea variației în timp a părții de accelerație transversală necompensată prin supraînălțare, la o fracțiune din accelerația gravitației:

$$\frac{\frac{V_c^2}{R_c} - p\,g}{t} \leqslant k\,g\,. \tag{20}$$

Pentru diminuarea senzației de solicitare radială a pasagerilor, se admite ca valoarea lui k să fie cuprinsă între $\frac{1}{10}$ și $\frac{1}{15}$, iar pentru căile rutiere de viteze mari se admite $k = \frac{5}{V_M}$, în care V_M este viteza de bază (maximă) admisă.

Viteza de circulație în curbă fiind constantă, rezultă că

$$t = \frac{L_r}{V_c}\,,$$

unde L_r este lungimea racordării.

Ca atare, pentru satisfacerea condiției de confort, lungimea înscrierii în curbă a automobilelor va fi:

$$L_r = \frac{V_c}{k}\left(\frac{V_c^2}{gR_c} - p\right). \tag{21}$$

De-a lungul acestei lungimi, accelerația centrifugă va varia de la zero la valoarea sa maximă :

$a_c = \frac{V_c^2}{R_c}$, cînd automobilul a pătruns în curba de rază constantă, R_c.

În timpul înscrierii în curbă a automobilului se cere ca variația în timp a accelerației centrifuge să fie constantă, condițiile cinematice de înscriere în curbă devenind astfel [4] :

$$V_c = \text{const.}\,;\; q_c = \frac{\mathrm{d}a_c}{\mathrm{d}t} = \text{const. și } a_c = \frac{V_c^2}{R},$$

în care raza de curbură R este variabilă : $R \in (\infty\,;\, R_c)$.

În aceste condiții se poate scrie :

$$q_c = \frac{\mathrm{d}a_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a_c}{\mathrm{d}R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{V_c^2}{R}\right)\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}. \tag{22}$$

Viteza în curbă este dată de relația

$$V_c = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{R\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \tag{23}$$

în care θ este unghiul de înclinare a tangentei față de traiectorie, egal cu unghiul la centru al segmentului curbiliniu (fig. 4)

Se știe că

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{V_c^2}{R}\right) = -\frac{V_c^2}{R^2},$$

iar din relația (23) se deduce că

$$\mathrm{d}t = \frac{R}{V_c}\,\mathrm{d}\,\theta,$$

care, introduse în relația (22), vor conduce la

$$q_c = -\frac{V_c^2}{R^2}\frac{V_c}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{V_c^3}{R^3}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}. \tag{24}$$

Separînd variabilele, obținem ecuația diferențială :

$$-\frac{q_c}{V_c^3}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}R}{R^3}, \tag{25}$$

care, prin integrare

$$-\frac{q_c}{V_c^3}\int_0^{\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{\infty}^{R}\frac{\mathrm{d}R}{R^3},$$

va da

$$-\frac{q_c}{V_c^3}\cdot\theta=-\frac{1}{2R^2}$$

sau

$$R^2=\frac{V_c^3}{2q_c\cdot\theta}$$

sau

$$R=\sqrt{\frac{V_c^3}{2q_c}}\frac{1}{\sqrt{\theta}} \tag{26}$$

Această curbă, care asigură o variaţie progresivă a curburii şi a acceleraţiei centrifuge, se numeşte *clotoidă*.

Construcţia practică a clotoidei se poate face prin arcuri de cerc de rază constantă, din 5° în 5°, în tabelul 1 dîndu-se valorile expresiei $\frac{1}{\sqrt{\theta}}$, pentru astfel de intervale, pînă la 90°.

Lungimea arcului de clotoidă (fig. 4) rezultă din

$$dL_r=R\,d\theta,$$

Tabelul 1

θ°	$\frac{1}{\sqrt{\theta}}$	θ°	$\frac{1}{\sqrt{\theta}}$	θ°	$\frac{1}{\sqrt{\theta}}$
0	∞	30	1,380	60	0,977
5	3,385	35	1,279	65	0,941
10	2,393	40	1,199	70	0,904
15	1,955	45	1,128	75	0,875
20	1,692	50	1,070	80	0,846
25	1,514	55	1,021	85	0,822
—	—	—	—	90	0,798

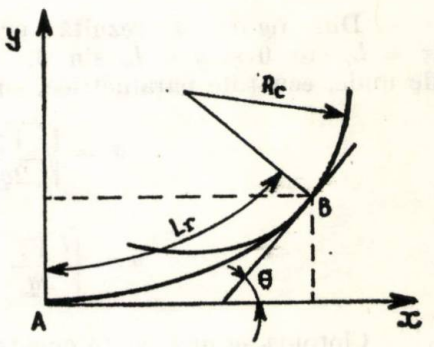


Fig. 4

în care dacă introducem relaţia (26), rezultă

$$dL_r=\sqrt{\frac{V_c^3}{2q_c}}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}, \tag{27}$$

care, integrată,

$$L_r=\sqrt{\frac{V_c^3}{2q_c}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}, \tag{28}$$

va da

$$L_r=\sqrt{\frac{2V_c^3}{q_c}}\sqrt{\theta}\cdot \tag{29}$$

Din produsul relaţiilor (26) şi (29), rezultă

$$L_r\,R=\frac{V_c^3}{q_c}=\text{const.} \tag{30}$$

Se constată că produsul dintre lungimea curbei și raza de curbură, în cazul clotoidei, este constant.

Dacă un automobil se înscrie într-o curbă de trecere clotoidală, construită pentru o viteză V_{c0} și o accelerație de de gradul doi q_{c0}, și circulă cu viteza V_{c1}, atunci va avea o variație a accelerației egală cu

$$q_{c1} = q_{c0} \left(\frac{V_{c1}}{V_{c0}} \right)^3 . \tag{31}$$

Valorile curente pentru variația accelerațiilor

$$q_c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{V^2}{R} \right)$$

în timpul înscrierii în curbă a automobilelor, depind de categoria căilor rutiere, astfel:

— pentru căi rutiere normale: $q_c = 0{,}30 - 0{,}45$ m/s^3,

— pentru autostrăzi: $q_c = 0{,}50 - 1{,}25$ m/s^3.

Din figura 4 rezultă următoarele coordonate ale clotoidei: $x = L_r \cos \theta$ și $y = L_r \sin \theta$,
de unde, ecuațiile parametrice, ținînd seama de relația (28), sînt

$$x = \sqrt{\frac{V_c^3}{2q_c}} \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}} \, \mathrm{d}\theta,$$

$$y = \sqrt{\frac{V_c^3}{2q_c}} \int_0^\theta \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}} \, \mathrm{d}\theta. \tag{32}$$

Clotoida se mai poate construi folosind aceste relații, funcțiile fiind prezentate în tabelul 2.

Tabelul 2

θ^o	$\int_0^\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}} \mathrm{d}\theta$	$\int_0^\theta \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}} \mathrm{d}\theta$	θ^o	$\int_0^\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}} \mathrm{d}\theta$	$\int_0^\theta \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}} \mathrm{d}\theta$	θ^o	$\int_0^\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}} \mathrm{d}\theta$	$\int_0^\theta \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}} \mathrm{d}\theta$
5	0,590	0	35	1,507	0,310	65	1,872	0,735
10	0,834	0,017	40	1,592	0,376	70	1,903	0,809
15	1,018	0,048	45	1,666	0,444	75	1,926	0,883
20	1,169	0,136	50	1,731	0,515	80	1,942	0,956
25	1,297	0,189	55	1,786	0,587	85	1,949	1,028
30	1,409	0,248	60	1,833	0,661	90	1 953	1,099

Curbele clotoidale pot să racordeze nu numai trasee liniare cu arce de cerc, ci și arce de cerc de raze diferite.

La înscrierea în curbă printr-un arc de clotoidă se consideră că este asigurată condiţia rotirii constante a volanului $\left(\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}\right)$. În realitate, curba este puţin diferită, însă, practic, diferenţele variaţiei rotirii volanului sînt neesenţiale, curba fiind indicată în construcţia căilor rutiere.

Primită la redacţie la 22 decembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. C. GHIULAI, *Mecanica automobilului*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965.
2. C. GHIULAI şi CH. VASILIU, *Dinamica autovehiculelor*, Bucureşti, E. D. P., 1975.
3. A. JANTE, *Zur Theorie des Kraftwagens*, Akademie - Verlag Berlin, 1974.
4. N. NISTOR şi CH. VASILIU, *Teoria traficului rutier şi siguranţa circulaţiei*, Ed. I. P. Bucureşti, 1977.

ACORDAREA ELECTROREZISTIVĂ A TIRANȚILOR REZERVOARELOR SFERICE

de A. PAVEL, L. RIZEA, C. MATEESCU, M. CULIN, N. GRIGORE

Institutul de petrol și gaze, Ploiești

Lucrarea prezintă o nouă rezolvare originală a problemei acordării tiranților rezervoarelor sferice.
Se expun etapele principale ale pretensionării, la același nivel, a tuturor tiranților rezervoarelor sferice, operație controlată și asistată de aparatură electronică adecvată.

În varianta concepțională modernă, rezervoarele sferice de mare capacitate ($\geqslant 1000$ m^3) pentru depozitarea industrială a gazelor lichefiate tehnice sînt echipate cu sisteme de rezemare discretă, cvasipunctuală, la nivelul planului ecuatorial (fig. 1 *a*) sau ușor subecuatorial (fig. 1 *b*), principalele componente ale sistemelor respective fiind picioarele verticale (de regulă tubulare, mai rar profilate în U, dublu U, T etc.) și tiranții, în practică, ultimii mai numindu-se contravînturi sau tendoane.

Pentru asigurarea conlucrării spațiale a sistemului tehnic format din mantaua sferică, picioarele de rezemare și fundație, în condițiile unor răspunsuri dinamice la acțiunea sarcinilor orizontale generate de cutremure, manifestări eoliene, explozii, impacturi mecanice, vibrații etc., se impune așa-numita *acordare* a tiranților. De fapt, acordarea tiranților (fig. 2) este o lucrare de *pretensionare*, care se execută în diferite stadii (înainte sau după încercarea de presiune hidraulică a rezervorului, după un anumit incident sau eveniment de exploatare, la scadențele ISCIR sau după epuizarea intervalului de garanție atestat prin buletinul de acordare etc.) și cu diferite mijloace, însă întotdeauna în conjunctura efectuării de studii detaliate și control riguros privind sarcinile de pretensionare [1, 2].

Procedeul de acordare electrorezistivă, care face obiectul lucrării prezentate, se bazează pe utilizarea unui dispozitiv original de tip *captor* [3], dare transformă variațiile unei mărimi mecanice în semnale electrice proporționale cu variațiile respective. Evident, la utilizarea practică a captoarelor, în general, este necesar să se țină seama de caracteristicile lor constructive și funcționale, dintre care cele mai importante sînt :

a) *sarcina nominală*, reprezentînd valoarea maximă a sarcinii aplicate captorului, cu garantarea tuturor caracteristicilor sale :

b) *curba de etalonare*, respectiv curba care reprezintă modificarea semnalului de ieșire în funcție de sarcina aplicată ;

c) *sensibilitatea*, caracterizată prin raportul dintre variația intensității semnalului de ieșire și variația mărimii sarcinii care l-a provocat ;

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 4, 1981, P. 619–628

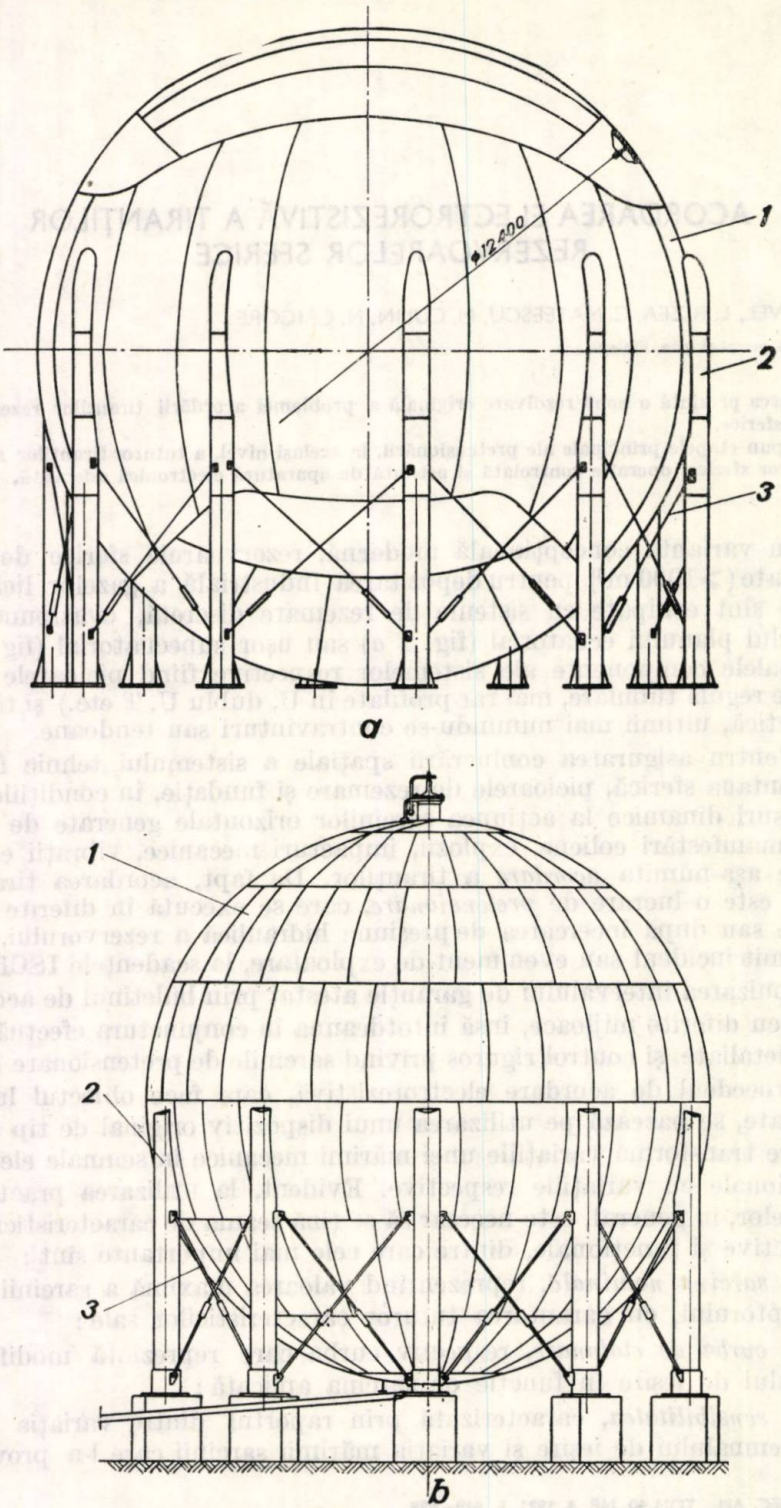


Fig. 1. — Rezervoarele sferice de 1000 m³ : *a* — rezemarea pe picioare tubulare la nivelul planului ecuatorial ; *b* — rezemarea pe picioare tubulare la nivelul planului uşor subecuatorial ; *1* — mantaua rezervorului ; *2* — picioarele tubulare, verticale ; *3* — tiranţii.

d) *precizia*, definită ca fiind cea mai mică valoare care este superioară diferenței dintre valoarea sarcinii reale aplicate și valoarea determinată pe curba de etalonare;

e) *fidelitatea*, caracterizată prin împrăștierea maximă a semnalelor de ieșire corespunzătoare aplicării repetate a aceleiași sarcini în aceleași condiții etc., pentru fiecare captor în parte trebuind determinate valorile *optime* cel puțin pentru caracteristicile menționate.

Alegerea tipului de captor și precizarea caracteristicilor sale se va face în funcție de natura sarcinii, modul variației acesteia, în timp, durata măsurării etc., captoarele trebuind să fie bine adaptate condițiilor în care urmează a fi utilizate. În acest context, se impun restricții corespunzătoare privind sensibilitatea transversală și limitarea influenței semnalului de ieșire, mai ales atunci dînd punctul de aplicație al sarcinii se schimbă. De asemenea, devine necesară protejarea captorului împotriva unor suprasolicitări, care pot apare în timpul măsurării sau al unor operații auxiliare, acestea putînd genera deterioarea (dereglarea sau modificarea) curbei de etalonare a dispozitivului. Protejarea captoarelor împotriva acțiunii agenților corozivi, temperaturilor ridicate și umidității excesive se asigură prin utilizarea de carcase etanșe sau ecrane protectoare. Masa și, deci, greutatea, de asemenea dimensiunile corespunzătoare de gabarit, sînt factori importanți pentru proiectarea unui captor, acestea depinzînd de tipul captorului, de soluțiile constructive adoptate, precum și de materialele utilizate. Evident, utilizînd oțeluri cu limită tehnică de elasticitate ridicată, dimensiunile elementului elastic al captorului vor fi mai mici. Se va avea în vedere, însă, ca pentru a nu genera modificări sensibile ale parametrilor sistemelui mecanic care se studiază, rigiditatea elementului elastic (fig. 2) să fie determinată corect.

Constanta elastică k și deformațiile specifice ε, în diferite puncte și pe diferite direcții ale elementului elastic, au următoarele expresii:

— pentru varianta din figura 3 *a* (consolă de egală rezistență la încovoiere):

$$k = \frac{E\,b\,h^3}{6\,l^3}, \qquad [\mathrm{N/m}], \tag{1}$$

$$\varepsilon_x = \frac{6Pl}{Ebh^2}, \qquad [\mu\mathrm{m/m}], \tag{2}$$

$$\varepsilon_y = -\,\mu_x \varepsilon, \qquad [\mu\mathrm{m/m}], \tag{3}$$

— pentru varianta din figura 3 *b* (consolă clasică):

$$k = \frac{Ebh^3}{4\,l^3}, \qquad [\mathrm{N/m}], \tag{4}$$

ε_x și ε_y determinîndu-se cu formulele corespunzătoare (2) și (3).

La adoptarea formei constructive a elementului elastic se are în vedere următoarele:

— aplicarea practică a traductoarelor tensometrice trebuie să fie ușoară și comodă;

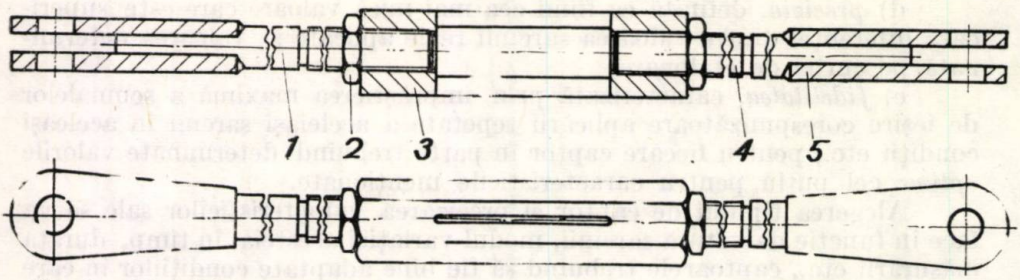


Fig. 2. — Tirantul rezervoarelor sferice : *1* — semitirantul lung ; *2* — contrapiuliţa ; *3* — mufa (piuliţa) întinzătoare ; *4* — semitirantul scurt ; *5* — elementul de articulare (simplu — ureche, dublu — furcă, ca în figură, sau chiar triplu).

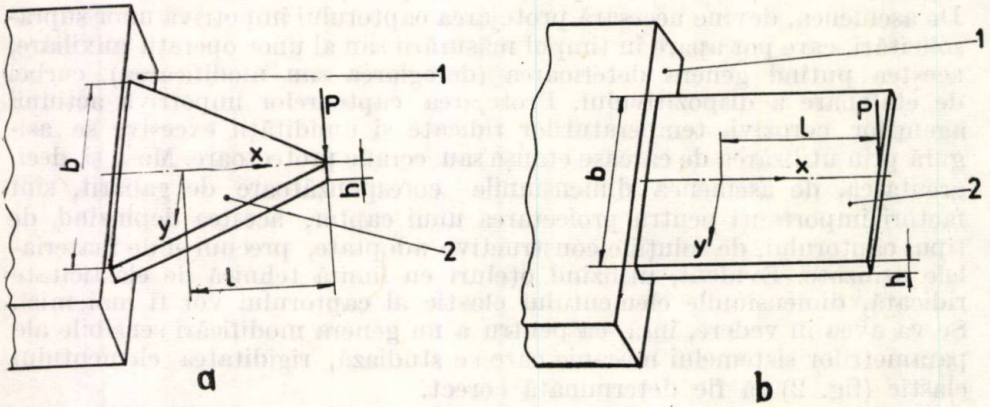


Fig. 3. — Două tipuri de element sensibil (elastic) pentru captor : *a* — consola de egală rezistenţă ; *b* — consola clasică ; *1* — brida ; *2* — elementul elastic propriu-zis.

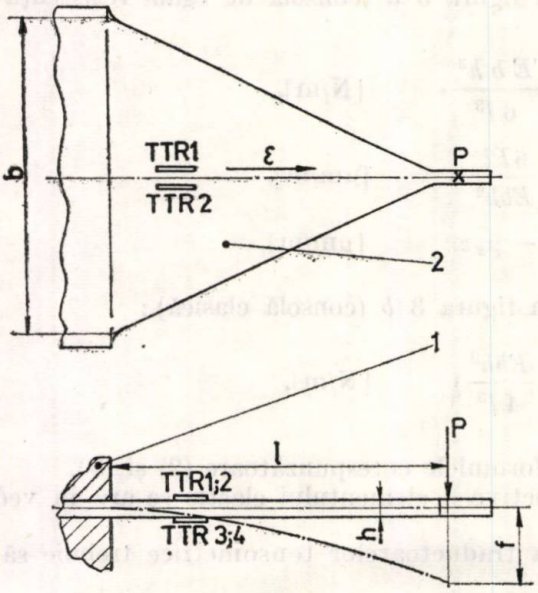


Fig. 4. — Captor pentru măsurarea deplasărilor : *1* — suportul (brida) ; *2* — elementul sensibil (elastic) ; TTR — traductoarele tensometrice rezistive.

— amplasarea acelorași traductoare trebuie realizată pe suprafețele cu duritatea cea mai mare;

— perturbațiile (deformații, deplasări etc.) în traductoare trebuie să fie așa de mari, încît, semnalul generat să poată fi citit cu suficientă precizie.

Traductoarele rezistive se nominalizează respectîndu-se condițiile:

— rezistența electrică să fie cît se poate de mare;

— conductorii de legătură să aibă o bună rezistență mecanică și să permită efectuarea unor conexiuni fiabile.

Solicitarea elementului sensibil trebuie asigurată în domeniul elastic, obținîndu-se astfel valori acceptabile pentru revenirea la zero, liniaritate, histerezis etc.

Marele avantaj al procedeului de acordare electrorezistivă este acela că mărcile tensometrice se lipesc pe elementul sensibil (fig. 4) în condiții de laborator. Se elimină, astfel, inconvenientele legate de lipirea directă, în condițiile nepropice ale șantierului de montaj sau ale platformei tehnologice industriale, a mărcilor tensometrice, pe tiranții rezervoarelor sferice.

Captoarele, avînd la bază principiul electrorezistiv cunoscut [4, 5] se realizează — atît în țara noastră, cît și în străinătate — cu diferit] forme constructive, în funcție de domeniul strict al aplicației. În continuare, se prezintă un dispozitiv (fig. 5) conceput și realizat pentru acordarea electrorezistivă a tiranților rezervoarelor sferice, dispozitivul respectiv înglobînd un captor original [3] pentru măsurarea deplasărilor cu traductoare tensometrice. Captorul în discuție funcționează pe principiul barei etalon de secțiune constantă solicitată la încovoiere și asigură o caracteristică de măsurare *liniară*. Elementul sensibil (elastic), respectiv bara etalon pe care sînt lipite traductoarele tensometrice rezistive, este încastrat într-o carcasă. Dispozitivul electrorezistiv, alcătuit din două astfel de captoare, se fixează pe tirant, prin intermediul unor bride, așa cum se vede în figura 6.

Evident, pentru acordarea celor 20 de tiranți ai unui rezervor de 1000 m^3, pentru GLT, se vor utiliza 20 de dispozitive electrorezistive, schema-bloc de acordare prezentîndu-se în figura 7.

Datorită numărului relativ mare al dispozitivelor electrorezistive, informațiile privind deformațiile specifice ε se urmăresc efectiv și se colectează cu aparatura tensometrică binecunoscută, sistemul de măsurare preferat fiind cel corespunzător metodei punții dezechilibrate.

Fiecărui dispozitiv electrorezistiv (alcătuit din cîte două captoare) îi corespunde o diagramă de lucru proprie, trasată, în condiții de laborator, pe mașini universale de încercare (la tracțiune).

O astfel de diagramă, care, de fapt, se identifică cu curba de etalonare corespunzătoare, este exemplificată în figura 8.

În operația practică de acordare a tiranților unui rezervor sferic, o problemă importantă o constituie locul în care și direcția după care se montează dispozitivele electrorezistive, deoarece indicația inițială i_0 nu trebuie să prezinte fluctuații de valori generate de săgeata pe care tirantul, sub acțiunea greutății proprii, o face în raport cu axa ideal geometrică

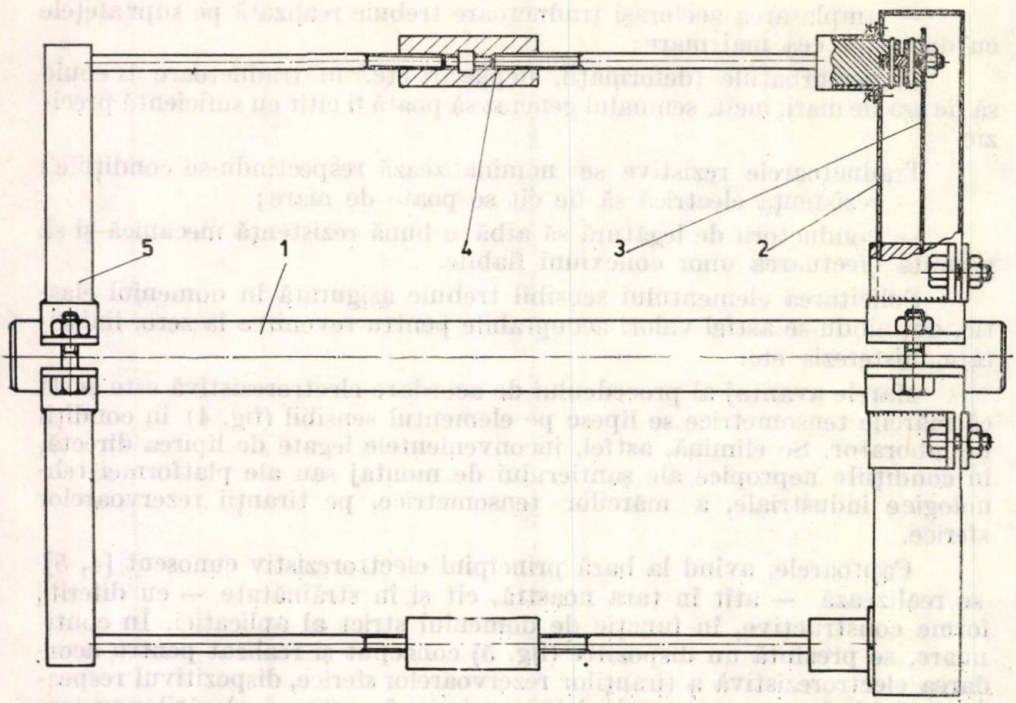


Fig. 5. — Dispozitivul electrorezistiv pentru acordarea tiranţilor rezervoarelor sferice : *1* — tirantul ; *2* — captorul electrorezistiv ; *3* — elementul sensibil (elastic) al captorului ; *4* — bucşa de reglare iniţială a săgeţii elementului elastic ; *5* — cadrul de fixare pe tirant.

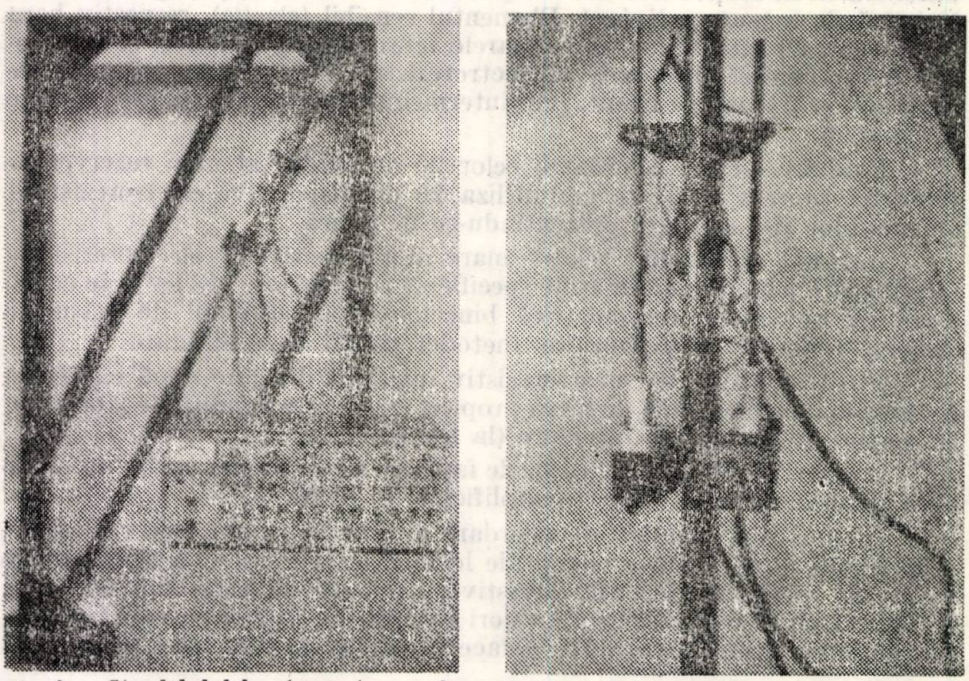


Fig. 6. — Standul de laborator pentru acordarea electrorezistivă a tiranţilor rezervoarelor sferice.

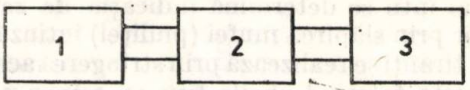


Fig. 7. — Schema-bloc de acordare electrorezistivă a tiranților rezervoarelor sferice : *1* — dispozitivul electrorezistiv ; *2* — cutia de comutare ; *3* — puntea tensometrică.

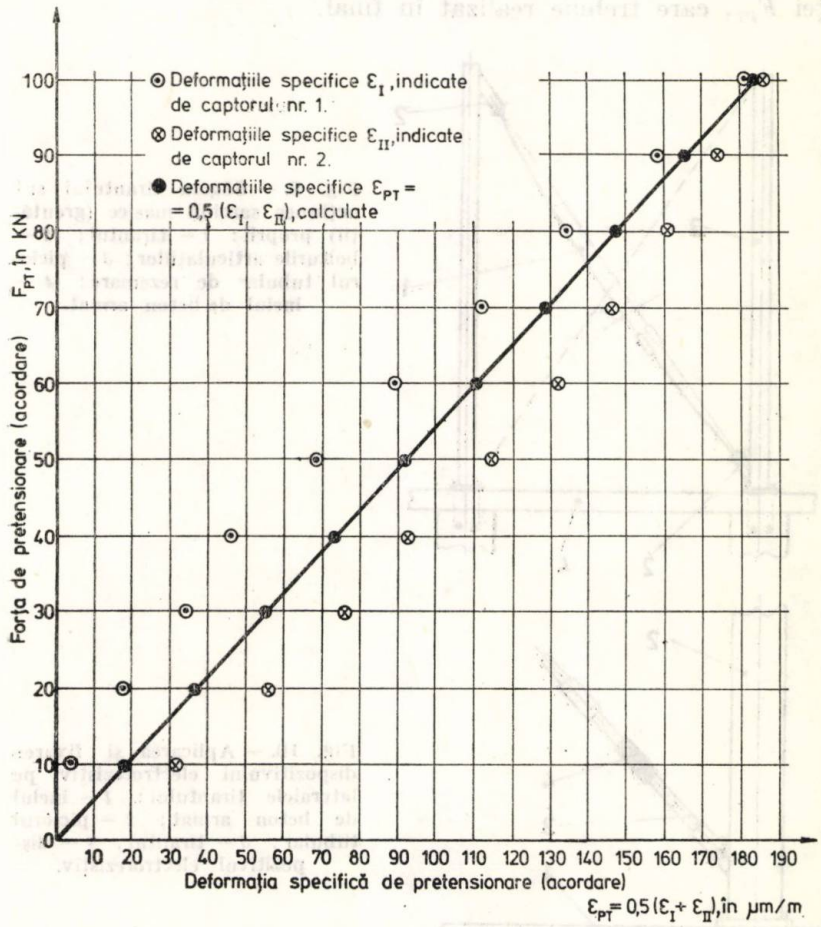


Fig. 8. — Diagrama de lucru (caracteristica de etalonare) a unui dispozitiv electrorezistiv.

(fig. 9) care unește centrele bolțurilor de articulare. Din acest motiv, dispozitivele electrorezistive se aplică pe fețele laterale (fig. 10) ale tirantului, după fibra medie nedeformată la încovoiere, care se găsește într-un plan vertical, tangent la suprafața laterală (fig. 11).

După marcarea tiranților supuși acordării (fig. 12), dispozitivele electrorezistive se conectează, prin conductoare numerotate la ambele capete, la apartura tensometrică. Pentru realizarea operației de pretensio-

nare şi acordare, mai întîi se determină indicaţia de zero i_0, procedînd la descărcarea tiranţilor prin slăbirea mufei (piuliţei) întinzătoare. Apoi, forţa de pretensionare din tiranţi se realizează prin strîngerea aceloraşi piuliţe întinzătoare, pentru aceasta folosind cheile fixe cu mîner pentru prelungitor.

Este de remarcat faptul că, datorită valorii sale ridicate, forţa de pretensionare F_{PT} se realizează în mai multe trepte, acordarea tuturor tiranţilor realizîndu-se pentru fiecare treaptă în parte. Numărul treptelor de pretensionare şi, deci, de acordare se stabileşte în funcţie de nivelul maxim al forţei F_{PT}, care trebuie realizat în final.

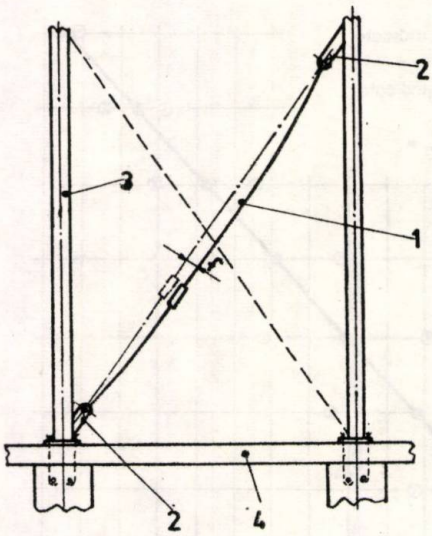


Fig. 9. — Săgeta tirantului sub acţiunea sarcinii masice (greutăţii) proprii: *1* — tirantul; *2* — bolţurile articulaţiilor; *3* — piciorul tubular de rezemare; *4* — inelul de beton armat.

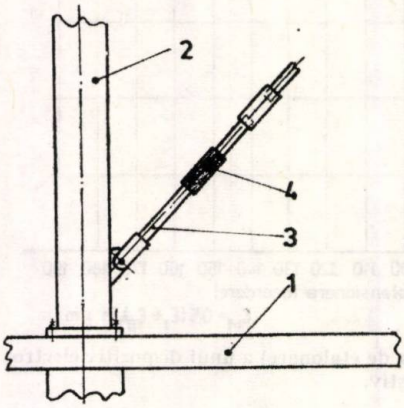


Fig. 10. — Aplicarea şi fixarea dispozitivului electrorezistiv pe lateralele tirantului: *1* — inelul de beton armat; *2* — piciorul tubular; *3* — tirantul; *4* — dispozitivul electrorezistiv.

NOTAŢII

E reprezintă modulul de elasticitate longitudinal al materialului de bază al tirantului, în N/mm²;

ε_x — deformaţia specifică corespunzătoare direcţiei longitudinale a elementului sensibil (elastic), în μm/m;

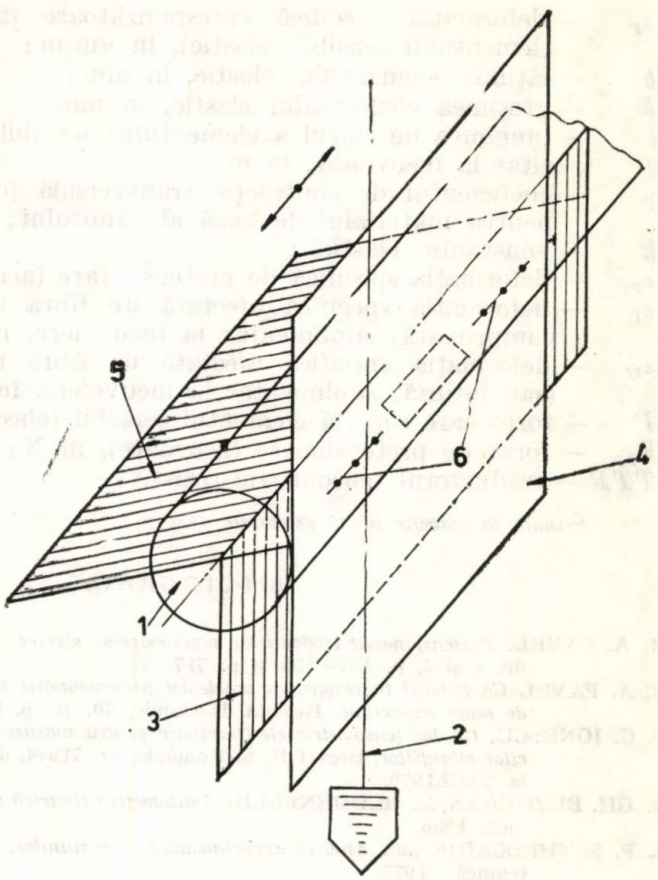


Fig. 11. — Trasarea fibrei medii nedeformate la încovoiere, sub acțiunea sarcinii masice (greutății) proprii, a tirantului: *1* — tirantul; *2* — firul cu plumb; *3* — planul (vertical) în care acționează greutatea tirantului; *4* — planul, tangent la suprafața exterioară a tirantului, în care se deplasează firul cu plumb; *5* — plumbul fibrelor medii nedeformate; *6* — fibra medie nedeformată la încovoiere.

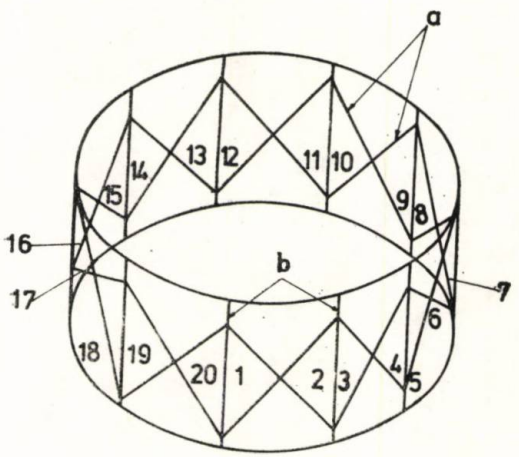


Fig. 12. — Marcarea, în vederea acordării, a tiranților rezervorului sferic: *a* — tiranții conjugați; *b* — picioarele tubulare de rezemare.

ε_y — deformaţia specifică corespunzătoare direcţiei transversale a elementului sensibil (elastic), în μm/m;
b — lăţimea elementului elastic, în mm;
h — grosimea elementului elastic, în mm;
l — lungimea de calcul a elementului sensibil (consolă elastică) solicitat la încovoiere, în mm;
μ — coeficientul de contracţie transversală (coeficientul lui Poisson) pentru materialul de bază al tirantului;
k — constanta elastică;
ε_{PT} — deformaţia specifică de pretensionare (acordare), în μm/m;
ε_I — deformaţia specifică afectată de fibra tirantului, întinsă (sau comprimată) suplimentar la încovoiere, în μm/m;
ε_{II} — deformaţia specifică afectată de fibra tirantului, comprimată (sau întinsă) suplimentar la încovoiere, în μm/m;
P — forţa care solicită elementul sensibil (elastic), în N;
F_{PT} — forţa de pretensionare (acordare), în N;
TTR — traductorul tensometric rezistiv.

Primită la redacţie la 10 decembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. A. PAVEL, *Pretensionarea tendoanelor rezervoarelor sferice*. I şi II. St. cerc. mec. apl., **38**, *4* şi *5*, p. 537—555 şi p. 717—730
2. A. PAVEL *Contribuţii la rezolvarea problemei pretensionării tendoanelor rezervoarelor sferice de mare capacitate*, Revista de chimie, **30**, *12*, p. 1256—1259, 1979.
3. C. IONESCU, *Captor tensometric electrorezistiv pentru măsurarea deplasărilor şi caracteristicilor vibraţiilor*, Brevet R. S. România, nr. 71944, declarat la 08.04.1976, aprobat la 28.02.1979.
4. GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, *Tensometria electrică rezistivă*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1966.
6. P. S. THEOCARIS ş.a., *Analiza experimentală a tensiunilor*, Vol. I şi II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1977.

KAUCZOR E., Metallographie in der Schadenuntersuchung — Klärung der Ursachen von Bauteilschäden (Metalografia în expertizarea avariilor — Clarificarea cauzelor avarierii pieselor metalice. Măsuri de evitare a avariilor) Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1979, 96 p. 141 fig.

Lucrarea prezintă posibilităţile cercetării metalografice pentru evidenţierea cauzelor unor defecte tipice apărute în exploatarea în diferite condiţii a unor piese şi subansamble, indicînd totodată modalităţile de evitare a apariţiei acestor defecte.

Adresîndu-se tehnicienilor şi inginerilor ce lucrează în domeniul construcţiilor de maşini şi metalurgiei, lucrarea presupune cunoscute principiile de bază ale cercetării metalografice şi ale metalurgiei fizice a metalelor şi aliajelor.

În cele 12 capitole ale cărţii se analizează următoarele defecte tipice;

— fisurarea pieselor sudate, datorită atît vitezei de încălzire la sudare, cît şi vitezei de de răcire ulterioare;

— carburarea pieselor în urma sudurii cu gaz;

— fragilizarea cu hidrogen a ţevilor din oţel nealiat utilizate în industria chimică;

— coroziunea alamelor datorită scăderii conţinutului de zinc sub 15% ;

— eroziunea şi coroziunea ţevilor utilizate la cazanele de abur;

— formarea unor zone cu carburi în urma sudării ţevilor din oţeluri nealiate şi slab aliate cu electrozi din oţel inoxidabil austenitic;

— coroziunea oţelurilor inoxidabile;

— fisurarea pieselor din oţel datorită difuziei de la suprafaţa pieselor a unor metale neferoase (Cu, Zn) depuse pe suprafaţă în diferite faze ale procesului tehnologic;

— fisuri provocate de separarea la limitele grăunţilor de ferită a cementitei secundare şi terţiare;

— coroziunea fisurantă sub sarcină a alamelor şi a oţelurilor inoxidabile austenitice;

— defecte apărute în piese executate din oţel manganos;

— fragilizarea la hidrogen a cuprului;

Exemplele prezentate sînt bogat ilustrate prin micrografii, ceea ce oferă o imagine mai clară a modului de acţiune a factorilor de risc prezenţi în fabricaţia şi exploatarea diferitelor piese.

A. T. Dumitrescu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 40, nr. 5 septembrie — octombrie 1981

SUMAR

STUDII

M. ERHAN, A. ERHAN, Soluţii aproximative ale mişcării plane a fuidelor grele cu suprafaţa liberă peste obstacole de o formă arbitrară 633

MIHAI POPESCU, Asupra unor clase de extremale privind mişcarea comandată în jurul punctelor de libraţie din sistemul Pământ—Lună 647

IOSIF ŢEPOSU, Legea de rezistenţă $\vec{R} = -cm\vec{v}/r^2$ în problema celor două corpuri 677

Al. D. STAN, S. POPOVICIU, Asupra canalizării gazelor către imobile 683

G. ONU, Calculul fundaţiilor pe coloane în domeniul neliniar elastic 697

S. PĂRĂIAN, T. SIRETEANU, I. ROŞU, Determinarea densităţilor spectrale ale drumurilor pe baza analizei experimentale a vibraţiilor automobilelor 715

I. SZÉKELY, I. BOCIAN, V. CHIOREANU, Aspecte noi în teoria angrenajelor conico-evolventice 721

IULIAN POPESCU, Calculul regimurilor de aşchiere care asigură un consum energetic minim 735

A. TUDOR, LI CHUN BO, Aspecte teoretice privind influenţa vitezei de antrenare şi a amortizării asupra parametrilor mişcării sacadate (stick-slip) 741

TRAIAN CANŢĂ, Cercetări tribologice şi teoretico-experimentale în vederea elaborării tehnologiei optime de metalizare în jet de plasmă a fisurilor de arbori cotiţi 753

A. PAVEL, L. RIZEA, M. CULIN, C. MATEESCU, N. GRIGORE, Acordarea mecanică a tiranţilor rezervoarelor sferice 773

PETRE SIMA, GRIGORE COSTIN, DAN CĂMĂRĂSCU, Instalaţie pentru studiul frecării dintre lagăr şi arbore 783

STUDII

SOLUȚII APROXIMATIVE ALE MIȘCĂRII PLANE A FLUIDELOR GRELE CU SUPRAFAȚA LIBERĂ PESTE OBSTACOLE DE O FORMĂ ARBITRARĂ

de M. ERHAN
Institutul Politehnic București,
A. ERHAN
Liceul industrial nr. 15 București

Mișcarea cu suprafață liberă a fluidelor grele constituie un capitol important al mecanicii fluidelor, cu numeroase și însemnate aplicații în hidraulică și hidrotehnică.
Se prezintă soluțiile aproximative ale mișcării plane a fluidelor grele cu suprafață liberă peste obstacole de o formă oarecare, soluții obținute prin metoda parametrului mic.
Se compară rezultatele analitice cu cercetările experimentale efectuate de autori în cazul deversorului cu secțiune longitudinală triunghiulară.

1. INTRODUCERE

În ultimele trei decenii, în studiul mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă au fost făcute progrese remarcabile, datorită dezvoltării unor capitole fundamentele ale matematicii, precum și a rezultatelor deosebite obținute în tehnica de calcul. Cu toate acestea, dificultățile matematice ale problemei nu au putut fi în întregime depășite. Una din ipotezele de bază este ipoteza fluidului perfect, care, în anumite condiții, conduce la rezultate teoretice, redînd cu o foarte bună aproximație multe mișcări întîlnite în hidraulica practică. O a doua ipoteză utilizată este ipoteza mișcării plane potențiale, care are la dispoziție un bogat aparat matematic, bine pus la punct, ceea ce a permis determinarea unor clase de mișcări cu aplicații practice.

Studiul mișcării potențiale plane constă în integrarea ecuației lui Laplace, a cărei soluție trebuie să verifice ecuația lui Bernoulli pe o linie de curent apriori necunoscută — linia liberă care trebuie determinată paralel cu însăși soluția problemei. Dificultatea constă, în primul rînd, în faptul că domeniul de mișcare nu este cunoscut în întregime apriori, și în al doilea rînd, în neliniaritatea condiției la limită pe suprafața liberă (ecuația lui Bernoulli).Pentru a evita prima dificultate, se efectuează o transformare conformă, astfel încît domeniul de mișcare este reprezentat într-o

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 40, NR. 5, 1981, P. 633–646

bandă dreptunghiulară cunoscută. Mişcarea se defineşte prin determinarea unei funcţii analitice $Z(f)$, unică în această bandă, care efectuează reprezentarea conformă a domeniului de mişcare din planul fizic pe domeniul definit de bandă. În plus, pe imaginea suprafeţei libere din planul potenţialului complex — marginea superioară a bandei — trebuie să fie satisfăcută relaţia lui Bernoulli.

Problema, pusă astfel, a fost formulată de H. Villat [14],care a demonstrat că dacă se dă forma liniei libere, determinarea elementelor mişcării revine la rezolvarea unei ecuaţii integrale. Plecînd de la aceste cercetări, F. Aimond [1], [2] a dedus opt forme de reprezentare ale ecuaţiei integrale, în ipoteza că suprafaţa liberă este o funcţie analitică. H. Poncin [12] a arătat că dacă se dă forma obstacolului, trebuie să se rezolve o problemă la limită mixtă, a cărei soluţie este unică. R. Gerber [11] a demonstrat existenţa şi unicitatea soluţiilor mişcării potenţiale plane cu suprafaţă liberă, impunînd condiţia ca panta vitezei pe suprafaţa obstacolului să fie monotonă şi să îndeplinească o condiţie Hölder, obstacolul fiind descris de o curbă rectificabilă cu tangentă continuă.

O contribuţie de seamă în acest domeniu au adus-o lucrările elaborate sub conducerea acad. D. Dumitrescu [5], [6], [7]. În aceste lucrări, se face o tratare unitară a problemeiî cu aplicaţii la studiul lamelor deversante. Problema la limită rezultată este o problemă de tip Voltera, rezolvată prin metoda Signorini.

Cercetările menţionate conduc la ecuaţii integrale, care nu pot fi soluţionate decît cu metode numerice.

2. FORMULAREA PROBLEMEI

Se studiază mişcarea fluidelor grele cu suprafaţă liberă în următoarele ipoteze:

1) fluidul este perfect, incompresibil şi greu;

2) mişcarea este bidimensională (plană) şi permanentă;

3) ecuaţia obstacolului se poate scrie sub forma:

$$y = \begin{cases} S(x) & \text{pentru } x \in [x_1,\ x_2], \\ 0 & \text{în rest;} \end{cases} \tag{1}$$

4) funcţia $S(x)$ este o funcţie de clasă C^∞ pe tot domeniul său de definiţie;

5) funcţia $S(x)$ are contacte de orice ordin cu axa Ox în x_1 şi x_2, ceea ce înseamnă că $S(x)$ împreună cu toate derivatele sale se anulează în aceste puncte.

Se notează cu q debitul mişcării şi cu H adîncimea curentului la infinit amonte. Dacă se introduce funcţia de curent $\psi(x, y)$ prin relaţiile:

$$u(x, y) = \partial\psi(x, y)/\partial y,\ v(x, y) = -\partial\psi(x, y)/\partial x, \tag{2}$$

ecuaţiile lui Euler se pot pune sub forma:

$$\Delta(\psi) = f(\psi), \tag{3}$$

în care $f(\psi)$ este o funcţie analitică arbitrară.

Studiul mişcării unui fluid perfect, greu şi incompresibil, se reduce la integrarea ecuaţiei (3) cu următoarele condiţii la limită:

$$\psi(x, y) = 0 \qquad \text{pentru } y = S(x), \tag{4}$$

$$\psi(x, y) = q, \qquad \text{pentru } y = N(x), \tag{5}$$

$$(\partial\psi/\partial x)^2 + (\partial\psi/\partial y)^2 = 2g(K - y) \qquad \text{pentru } y = N(x), \tag{6}$$

unde $y = N(x)$ reprezintă ecuaţia suprafeţei libere, funcţie necunoscută care trebuie determinată paralel cu soluţia problemei.

Constanta K este energia fluidului la infinit amonte pe suprafaţa liberă. Dacă admitem ipoteza că funcţia $f(\psi)$ este integrabilă în raport cu ψ, deci că există o funcţie $E(\psi)$ astfel încît:

$$dE(\psi)/d\psi = f(\psi), \tag{7}$$

atunci condiţia la limită (6) se poate pune sub forma echivalentă [9]:

$$1/2((\partial\psi/\partial x)^2 + (\partial\psi/\partial y)^2) - E(\psi) + p/\rho + gy = \text{const.}, \tag{6a}$$

care este ecuaţia lui Bernoulli în cazul general.

Dacă notăm cu u_∞ viteza fluidului pe suprafaţa liberă la infinit amonte şi scriem ecuaţia (6a) între acest punct şi punctul curent de pe suprafaţa liberă, obţinem ecuaţia (6), în care

$$K = H + u_\infty^2/2g. \tag{8}$$

3. METODA DE STUDIU

Ca metodă de studiu, se utilizează metoda parametrului mic, care se bazează pe deformarea coordonatelor şi, implicit, a mărimilor cinematice şi dinamice ale mişcării. Această metodă a fot introdusă de Whitham şi Lighthill în 1940 [13], ca o alternativă a metodei dezvoltărilor asimptotice racordate.

Introducem următoarele mărimi adimensionale:

$$X = \sqrt{\varepsilon}x/H;\ Y = y/H;\ \psi = \psi/q;\ \eta = N/H;\ \delta = S/H;\ F(\psi) = f(\psi/q), \tag{9}$$

unde ε este un parametru adimensional, pozitiv şi subunitar.

În literatura de specialitate, definirea parametrului mic se poate clasifica în două mari categorii:

1) ε este raportul a două lungimi: $\varepsilon = (H/L)^2$;

2) ε este raportul a două viteze caracteristice: $\varepsilon = (\sqrt{2gH}/u_\infty)^2 = 2/\mathscr{F}r$.

În acest al doilea caz, ε este invers proporțional cu numărul Froude al mișcării, iar alegerea sa ca parametru mic este justificată numai pentru $\mathscr{F}r < 2$.

Vom defini parametrul mic astfel:

$$\varepsilon = (a/H)^2, \tag{10}$$

unde a este înălțimea maximă a obstacolului, iar H reprezintă adîncimea curentului la infinit amonte.

Astfel, ecuația de mișcare (3) și condițiile la limită (4), (5) și (6) devin:

$$\varepsilon \partial^2\Psi/\partial X^2 + \partial^2\Psi/\partial Y^2 = F(\Psi), \tag{11}$$

$$\Psi(X,\ Y) = 0 \qquad \text{pentru } Y = \delta(X), \tag{12}$$

$$\Psi(X,\ Y) = 1 \qquad \text{pentru } Y = \eta(X), \tag{13}$$

$$\varepsilon(\partial\Psi/\partial X)^2 + (\partial\Psi/\partial Y)^2 = 2/\mathscr{F}r\ (\Lambda - Y) \quad \text{pentru } Y = \eta(X). \tag{14}$$

Vom căuta soluția problemei (11) — (14) sub forma:

$$\Psi(X,\ Y;\ \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k\ \Psi_k\ (X,\ Y), \tag{15}$$

$$\eta\,(X;\ \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k\ \eta_k\ (X). \tag{16}$$

Deoarece atît în condiția la limită (13), cît și în relația lui Bernoulli (14), ε intervine atît explicit, cît și implicit, vom dezvolta, în aceste relații, funcția de curent în serie Taylor în jurul punctului de coordonate $(X,\ \eta_0)$, unde η_0 reprezintă aproximația de ordinul zero a suprafeței libere. Ținînd seama de (15) și (16), condițiile la limită (13) și (14) se scriu sub forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \psi_k\,(X,\ \eta_0)}{\partial Y^n} (Y - \eta_0)^n \right) = 0, \tag{13a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial X} \left(\sum_{k-0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \psi_k\,(X,\ \eta_0)}{Y^n} (Y - \eta_0)^n \right) \right) \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial Y} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \psi_k\,(X,\ \eta_0)}{Y^n} (Y - \eta_0)^n \right) \right) \right)^2 =$$

$$= \frac{2}{\mathscr{F}r} (\Lambda - Y) \qquad \text{pentru } Y = \eta(X). \tag{14 a}$$

Din aceleași considerente, vom presupune că funcția $F(\Psi)$ este analitică în raport cu Ψ și se poate pune sub forma:

$$F(\Psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k F(\Psi_0)}{\mathrm{d}\Psi^k} (\Psi - \Psi_0)^k.$$

Astfel, problema la limită (11), (12), (13 a), (14 a) se reduce la integrarea următorului șir de aproximații succesive:

a) *aproximația de ordinul zero*:

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial Y^2} = F(\Psi_0), \tag{17}$$

$$\Psi_0(X, \delta) = 0, \tag{18}$$

$$\Psi_0(X, \eta_0) = 1, \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y}\right)^2 = \frac{2}{\mathscr{F}_i} (\Lambda - \eta_0); \tag{20}$$

b) *aproximația de ordinul întîi*:

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial Y^2} = \Psi_1 \frac{\mathrm{d}F(\Psi_0)}{\mathrm{d}\Psi}, \tag{21}$$

$$\Psi_1(X, \delta) = 0, \tag{22}$$

$$\Psi_1(X, \eta_0) + \eta_1 \frac{\partial \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y} = 0, \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial X}\right)^2 + 2 \frac{\partial \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y^2} \eta_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Psi_1(X, \eta_0)}{\partial Y}\right) = -\frac{2}{\mathscr{F}_i} \eta_1; \tag{24}$$

c) *aproximația de ordinul al doilea*:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial Y^2} = \Psi_2 \frac{\mathrm{d}F(\Psi_0)}{\mathrm{d}\Psi} + \frac{1}{2!} \frac{\mathrm{d}^2 F(\Psi_0)}{\mathrm{d}\Psi^2} \Psi_1^2, \tag{25}$$

$$\Psi_2(X, \delta) = 0, \tag{26}$$

$$\Psi_2(X, \eta_0) + \eta_{i1} \frac{\partial \Psi_1(X, \eta_0)}{\partial Y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y^2} \eta_{i1}^2 +$$

$$+ \eta_{i2} \frac{\partial \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y} = 0, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y^2}\right)^2 \eta_{i1}^2 + 2 \frac{\partial \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial X \partial Y} \eta_{i1} + \frac{\partial \Psi_1(X, \eta_0)}{\partial X} \right) +$$

$$+ 2 \frac{\partial \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y^3} \eta_{i1}^2 + \frac{\partial^2 \Psi_1(X, \eta_0)}{\partial Y^2} \eta_{i1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Psi_2(X, \eta_0)}{\partial Y} \right) + 2 \eta_{i1} \frac{\partial^2 \Psi_0(X, \eta_0)}{\partial Y^2} \frac{\partial \Psi_1(X, \eta_0)}{\partial Y} + \left(\frac{\partial \Psi_1(X, \eta_0)}{\partial Y} \right)^2 =$$

$$= -\frac{2}{\mathscr{F}_r} \eta_2. \tag{28}$$

Analog, se obţin şi celelalte aproximaţii. Deoarece după aproximaţia de ordinul al doilea, calculele devin extrem de laborioase, iar din rezultatele numerice rezultă că aportul adus de aproximaţiile de ordin superior este extrem de mic, în cele ce urmează, ne vom limita la studiul primelor trei aproximaţii.

4. MIŞCAREA POTENŢIALĂ

Dacă $F(\Psi) \equiv 0$, atunci ecuaţia (3) se reduce la ecuaţia lui Laplace. Deoarece, în cazul mişcării potenţiale, în ipotezele adoptate, mişcarea la infinit amonte este uniformă, constanta lui Bernoulli, care în acest caz este aceiaşi în tot domeniul de curgere, se poate pune sub forma :

$$K = H + \frac{q^2}{2gH^2} = H \left(1 + \frac{\mathscr{F}_r}{2} \right), \tag{29}$$

unde $\mathscr{F}_r$ este numărul Froude al mişcării.

4.1. APROXIMAŢIA DE ORDINUL ZERO

Funcţia de curent în această aproximaţie este dată de ecuaţia

$$\Psi_0(X, Y) = \frac{Y - \delta(X)}{\eta_0(X) - \delta(X)}. \tag{30}$$

Din relaţia lui Bernoulli (20), deducem :

$$\frac{1}{(\eta_0 - \delta)^2} = \frac{2}{\mathcal{F}r}(\Lambda - \eta_0) \qquad (\Lambda = 1 + \mathcal{F}r/2), \tag{31}$$

care este o ecuaţie algebrică de gradul trei în η_0.

Dacă notăm $h_0 = \eta_0 - \delta$, atunci ecuaţia (31) se poate pune sub forma :

$$E(h_0) = h_0^3 - (\Lambda_0 - \delta)h_0^2 + \mathcal{F}r/2 = 0. \tag{32}$$

Vom studia natura rădăcinilor acestei ecuaţii cu teorema lui Rolle :

$$E'(h_0) = 3h_0^2 - 2(\Lambda_0 - \delta)\, h_0 = 0,$$

$$h_{01} = 0\,; \; h_{02} = \frac{2}{3}(\Lambda_0 - \delta)\,; \; E(h_{01}) = \mathcal{F}r/2,$$

$$E(h_{02}) = 4\left(\mathcal{F}r/8 - \left(\frac{\Lambda_0 - \delta}{3}\right)^3\right).$$

Rezultă următorul tabel de variaţie a funcţiei $E(h_0)$:

h_0	0		$\frac{2}{3}(\Lambda_0 - \delta)$		$+\infty$
$E(h_0)$	$\mathcal{F}r/2$		$4(\mathcal{F}r/8 - (\Lambda_0 - \delta)^3/27)$		$+\infty$
$E'(h_0)$	0	$-$	0	$+$	

Variaţia lui h_0 este limitată inferior de însăşi natura fenomenului fizic ($\eta_0 > \delta \Rightarrow h_0 > 0$). Cum $\mathcal{F}r/2 > 0$, pentru a avea cel puţin o rădăcină pozitivă, este necesar şi suficient să fie îndeplinită condiţia :

$$\delta(X) \leqslant 1 + \mathcal{F}r/2 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\mathcal{F}r} \quad (\forall) \quad X \in R. \tag{33}$$

Inegalitatea (33) reprezintă condiţia de existenţă a soluţiei şi coincide cu relaţia prezentată de Bellevaux şi Fruman [4]. Marginea superioară de variaţie a lui h_0 este $\Lambda_0 - \delta$, deoarece $E(\Lambda_0 - \delta) = \mathcal{F}r/2$. Astfel, în cazul cel mai general, ecuaţia (32) are două rădăcini pozitive cuprinse în intervalele $(0, 2/3(\lambda_0 - \delta)]$ şi $[2/3(\Lambda_0 - \delta), \Lambda_0 - \delta)$.

Dacă notăm δ_M înălțimea relativă maximă a obstacolului și avem îndeplinită condiția :

$$\delta_M = 1 + \mathcal{F}r/2 - 3/2 \sqrt[3]{\mathcal{F}r}, \tag{34}$$

cele două rădăcini ale ecuației (32) sînt egale :

$$h_{01} = h_{02} = \frac{2}{3}(\Lambda_0 - \delta_M) = \sqrt[3]{\mathcal{F}r}.$$

valoarea lor fiind adîncimea critică adimensională.

După cum se poate observa, în cazul mișcării potențiale, adîncimea critică apare pe înălțimea maximă a obstacolului, fapt confirmat experimental, și numai pentru mișcări ale căror numere Froude satisfac condiția (34). În acest caz, în funcție de condițiile aval, poate avea loc trecerea de la un regim lent în amonte la un regim rapid în aval, sau de la un regim rapid în amonte la unul lent în aval. Variația numărului Froude caracteristic mișcării în funcție de înălțimea relativă maximă a obstacolului este prezentată în tabela 1 și figura 1. Valorile $\mathcal{F}r_1$ și $\mathcal{F}r_2$ reprezintă rădăcinile

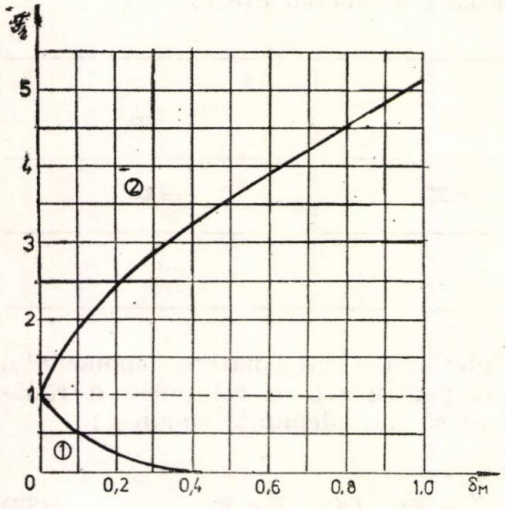


Fig. 1

Tabela 1

δ_M	$\mathcal{F}r_1$	$\mathcal{F}r_2$
0,0	1,0	1,0
0,1	0,387897	1,944421
0,2	0,225199	2,437297
0,3	0,133585	2,856760
0,4	0,077155	3,238493
0,5	0,041889	3,596266
0,6	0,020455	3,937115
0,7	0,008338	4,267874
0,8	0,002413	4,583245
0,9	0,000297	4,893107
1,0	—	5,193152

pozitive ale ecuației (34). Din figura 1 rezultă că, pentru un δ_M fixat, existența mișcării este asigurată numai pentru numere Froude cuprinse în zonele 1 și 2. De asemenea, se poate observa că dacă la infinit amonte regimul de mișcare este critic ($\mathcal{F}r = 1$), atunci mișcarea poate avea loc numai într-un canal orizontal.

Dacă este satisfăcută condiţia (33), atunci din (32) rezultă ecuaţia suprafeţei libere de ordinul zero. Din ecuaţia (30) se deduc componentele vitezei :

$$U_0(X) = \frac{1}{\eta_0 - \delta}\ ;\ V_0(X,\ Y) = U_0\left(1 + \frac{\Psi_0(X,\ Y)}{A(X)}\right), \tag{35}$$

unde $A(X) = \mathcal{F}r\ U_0^3(X) - 1$. Cînd $\delta = \delta_M$ şi este îndeplinită condiţia (34), rezultă

$$\eta_0(X) = \delta_M + \sqrt[3]{\mathcal{F}r} = \text{const.}, \tag{36}$$

iar

$$V_0(X,\ \delta_M) = 0. \tag{37}$$

Din prima formulă (35) se observă că, în această aproximaţie, componenta orizontală a vitezei nu depinde de ordonata punctului de calcul, fiind constantă pentru o secţiune transversală dată şi egală cu viteza medie în secţiunea respectivă.

4.2. APROXIMAŢIA DE ORDINUL ÎNTÎI

Soluţia problemei la limită pentru această aproximaţie este :

$$\Psi_1(X,\ Y) = \frac{1}{3!}\frac{a_0(X)}{U_0^2(X)}\Psi_0^3(X,\ Y) + \frac{1}{2!}\frac{b_0(X)}{U_0^2(X)}\Psi_0^2(X,\ Y) +$$

$$+ \frac{a_1(X)}{U_0(X)}\Psi_0(X,\ Y), \tag{38}$$

coeficienţii $a_0(X)$, $b_0(X)$ şi $a_1(X)$ avînd următoarele expresii :

$$a_0(X) = \frac{b_0(X)}{A(X)} - \frac{\delta' A'(X)}{A^2(X)}\ U_0(X), \tag{39}$$

$$b_0(X) = \delta''\ U_0(X) - 2\frac{\delta'^2}{A(X)}\ U_0^2(X), \tag{40}$$

$$a_1(X) = -\frac{1}{3!}\frac{a_0(X)}{U_0(X)} - \frac{b_0(X)}{U_0(X)} - \eta_{11}(X)\ U_0^2(X). \tag{41}$$

Din relaţia lui Bernoulli rezultă :

$$\eta_{11}(X) = \frac{\mathcal{F}r}{A(X)}\left(V_0^2(X,\ \eta_0) + \frac{2}{3}a_0(X) + b_0(X)\right). \tag{42}$$

Astfel, funcţia de curent şi suprafaţa liberă vor avea ecuaţiile:

$$\Psi_I(X,\ Y;\ \varepsilon) = \Psi_0(X,\ Y) + \varepsilon\Psi_1(X,\ Y), \tag{43}$$

$$\eta_{II}(X;\ \varepsilon) \quad = \eta_0(X) + \varepsilon\eta_1(X). \tag{44}$$

Componentele vitezei au expresiile:

$$U_I(X,\ Y) = U_0(X) + \varepsilon V_1(X,\ Y), \tag{45}$$

$$V_I(X,\ Y) = V_0(X,\ Y) + \varepsilon V_1(X,\ Y), \tag{46}$$

unde

$$U_1(X,\ Y) = \frac{\partial\Psi_1(X,\ Y)}{\partial Y} = \frac{1}{2!}\frac{a_0(X)}{U_0(X)}\Psi_0^2(X,\ Y) + \frac{b_0(X)}{U_0(X)}\Psi_0(X,\ Y) + a_1(X), \tag{47}$$

$$V_1(X,\ Y) = -\frac{\partial\Psi_1(X,\ Y)}{\partial X} = \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta' a_0(X)}{A(X)U_0} - \frac{a_0'(X)}{U_0^2}\right)\Psi_0^3(X,\ Y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta' a_0(X)}{U_0} - \frac{b_0'(X)}{U_0^2}\right)\Psi_0^2(X,\ Y) + \left(\frac{\delta' b_0(X)}{U_0} - \frac{a_0'(X)}{U_0}\right)\Psi_0(X,\ Y) + \delta' a_1(X), \tag{48}$$

în care cu prim, secund etc. s-au notat derivatele în raport cu X.

4.3. APROXIMAŢIA DE ORDINUL AL DOILEA

Funcţia de curent este de forma:

$$\Psi_{II}(X,\ Y;\ \varepsilon) = \Psi_0(X,\ Y) + \varepsilon\Psi_1(X,\ Y) + \varepsilon^2\Psi_2(X,\ Y), \tag{49}$$

unde $\Psi_2(X,\ Y)$ este soluţia problemei la limită din această aproximaţie:

$$\Psi_2(X,\ Y) = \frac{1}{5!}\frac{a_2(X)}{U_0^2(X)}\Psi_0^5(X,\ Y) + \frac{1}{4!}\frac{b_2(X)}{U_0^2(X)}\Psi_0^4(X,\ Y) + \frac{1}{3!}\frac{a_3(X)}{U_0^2(X)}\Psi_0^3(X,\ Y) + \frac{1}{2!}\frac{b_3(X)}{U_0^2(X)}\Psi_0^2(X,\ Y) + \frac{a_4(X)}{U_0(X)}\Psi_0(X,\ Y), \tag{50}$$

în care coeficienţii au expresiile:

$$a_2(X) = -\frac{a_0''(X)}{U_0^2(X)} + \frac{2\,\delta' a_0'(X)}{A(X)\,U_0(X)} + \frac{a_0^2(X)}{U_0^2(X)}, \tag{51}$$

$$b_2(X) = -\frac{b_0''(X)}{U_0^2(X)} + 2\,\frac{\delta' a_0'(X)}{U_0(X)} + \frac{a_0(X)\,b_0(X)}{U_0^2(X)}, \tag{52}$$

$$a_3(X) = -\frac{a_1''(X)}{U_0(X)} + 2\,\frac{\delta' b_0'(X)}{U_0(X)} + (\delta'' - \delta'^2)\,a_0(X), \tag{53}$$

$$b_3(X) = -\delta'^2 b_0(X) + 2\delta' a_1'(X) + \delta'' a_1(X), \tag{54}$$

$$a_4(X) = -\frac{1}{U_0(X)}\left(\frac{1}{5!}\,a_2(X) + \frac{1}{4!}\,b_2(X) + \frac{1}{3!}\,a_3(X) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}\,b_3(X)\right) - U_0(X)\,U_1(X,\ \eta_0)\,\eta_{11}(X) - U_0^2(X)\,\eta_{12}(X). \tag{55}$$

Din relaţia lui Bernoulli rezultă:

$$\eta_{12}(X) = \frac{\mathcal{F}_r}{A(X)}\left(\frac{4}{5!}\,a_2(X) + \frac{3}{4!}\,b_2(X) + \frac{2}{3!}\,a_3(X) + \frac{1}{2!}\,b_3(X) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\,U_1(X,\ \eta_0) + V_0(X,\ \eta_0)\,V_1(X,\ \eta_0) + \frac{\delta'}{A(X)}\,U_0^2(X)\,V_0(X,\ \eta_0)\times$$

$$\left.\times\,\eta_0(X) + U_0(X)\,\eta_{11}(X)\,(a_0(X) + b_0(X)) - \eta_{11}(X)\,U_0^2(X)\,U_1(X,\ \eta_0)\right), \tag{56}$$

astfel că suprafaţa liberă va avea ecuaţia:

$$\eta_{II}(X;\ \varepsilon) = \eta_0(X) + \varepsilon\eta_{11}(X) + \varepsilon^2\eta_{12}(X). \tag{57}$$

Componentele vitezei au expresiile:

$$U_{II}(X,\ Y;\ \varepsilon) = U_0(X) + \varepsilon U_1(X,\ Y) + \varepsilon^2 U_2(V,\ Y), \tag{58}$$

$$V_{II}(X,\ Y;\ \varepsilon) = V_0(X,\ Y) + \varepsilon V_1(X,\ Y) + \varepsilon^2 V_2(X,\ Y), \tag{59}$$

în care s-au efectuat notațiile :

$$U_2(X,\ Y) = \frac{1}{4!}\frac{a_2(X)}{U_0(X)}\Psi_0^4(X,\ Y) + \frac{1}{3!}\frac{b_2(X)}{U_0(X)}\Psi_0^3(X,\ Y) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\frac{a_3(X)}{U_0(X)}\Psi_0^2(X,\ Y) + \frac{b_3(X)}{U_0(X)}\Psi_0(X,\ Y) + a_4(X), \quad (60)$$

$$V_2(X,\ Y) = \frac{V_0(X,\ Y)}{U_0(X)}\ U_2(X,\ Y) - 2\frac{\delta'}{A(X)}\ U_0(X)\ \Psi_2(X,\ Y) -$$

$$- \frac{1}{5!}\frac{a_2'(X)}{U_0^2(X)}\Psi_0^5(X,\ Y) - \frac{1}{4!}\frac{b_2'(X)}{U_0^2(X)}\Psi_0^4(X,\ Y) -$$

$$- \frac{1}{3!}\frac{a_3'(X)}{U_0^2(X)}\Psi_0^3(X,\ Y) - \frac{1}{2!}\frac{b_3'(X)}{U_0^2(X)}\Psi_0^2(X,\ Y) -$$

$$- \left(\frac{a_4'(X)}{U_0(X)} - \frac{\delta' a_4(X)}{A(X)}\right)\Psi_0(X,\ Y). \quad (61)$$

5. APLICAȚII LA MIȘCAREA CU SUPRAFAȚA LIBERĂ PESTE DEVERSORUL CU SECȚIUNE LONGITUDINALĂ TRIUNGHIULARĂ

Metoda de calcul propusă a fost aplicată la deversorul cu secțiune longitudinală triunghiulară, a cărei ecuație se poate scrie sub formă adimensională astfel :

$$\delta(X) = -\frac{a}{2}\left(\frac{1}{H} + \frac{X}{b_1}\right)\left(\cos^n\frac{\pi}{2}\left(\frac{X + b_1/H}{\sqrt{(X + b_1/H)^2 + \varepsilon_2^2}} + 1\right) +\right.$$

$$\left. + \cos^n\frac{\pi}{2}\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + \varepsilon_2^2}} - 1\right)\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{1}{H} - \frac{X}{b_2}\right) \times$$

$$\times\left(\cos^n\frac{\pi}{2}\left(\frac{X - b_2/H}{\sqrt{(X - b_2/H)^2 + \varepsilon_2^2}} - 1\right) +\right.$$

$$\left. + \cos^n\frac{\pi}{2}\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + \varepsilon_2^2}} + 1\right)\right), \quad (62)$$

în care a, b_1, b_2 sînt dimensiunile caracteristice ale deversorului, H este adîncimea apei la infinit amonte, iar $\varepsilon_2 = 0{,}001$. Exponentul n se alege în funcție de numărul aproximațiilor calculate ($n = 2N + 1$).

Parametri hidrodinamici și geometrici ai mișcării sînt:
— debitul specific $q = 0{,}08975$ m^3/s.ml.;
— adîncimea apei la infinit amonte $H = 0{,}281$ m;
— înălțimea maximă a deversorului $a = 0{,}14574$ m;
— panta parametrului amonte $m_1 = b_1/a = 3$;
— panta parametrului aval $m_2 = b_2/a = 3{,}5$.
Cu aceste elemente se deduc caracteristicile mișcării:
— numărul Froude $\mathcal{F}r = 0{,}03700675$;
— înălțimea relativă maximă a deversorului $\delta_{max} = 0{,}518648$;
— adîncimea critică adimensională $h_{cr} = 0{,}333236459$.
Din relația (34) rezultă $\delta_M = 0{,}518614$ și deci $\delta_{max} - \delta_M = 7{,}9838 \times \times 10^{-6}$, ceea ce înseamnă că pe creasta deversorului apare adîncimea critică, fapt confirmat experimental.

Cercetările experimentale demonstrează o bună concordanță între mărimile calculate și cele măsurate (1% în cazul suprafeței libere și 2—3% în cazul vitezelor), cu excepția zonei de trecere de la mișcarea lentă din amonte la mișcarea rapidă din aval (fig. 2). Diferențele relativ mari (5—7%),

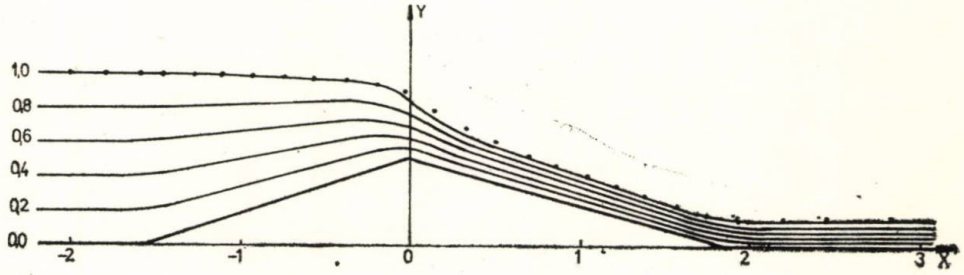


Fig. 2

care apar în această zonă, sînt explicabile, pe de o parte prin deficiențele metodei aplicate și, pe de altă parte, prin faptul că în această zonă ipoteza fluidului perfect nu poate fi acceptată deoarece gradientul vitezei crește brusc, făcîndu-se simțită influența rugozității suprafeței obstacolului.

Primită la redacție la 16 februarie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. F. AIMOND, *Recherches d'hydrodimamique en vue de la determination du mouvement plane de l'eau sur un barrage deversoire.* Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 1928.
2. F. AIMOND, *Contributions a l'écoulement des fluides pesants à surface libre*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 1929.
3. C. BELLEVAUX, D. FRUMAN, *Surfaces non linéaires dans les canaux découvertàs*, La Houille Blanche, *2* (1969).
4. C. BELLEVAUX, D. FRUMAN *Surfaces non lineaires dans les canaux decouverts.* C.R.A.S., **266**, *13* (1968).
5. D. DUMITRESCU, C. CRĂCIUN, C. IANCU, *Contribuții la studiul mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă*, Sesiunea științifică jubiliară a I. M.A. „Traian Vuia" al Academiei R.S.R., 1960.

6. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, *Studiul mișcării fluidelor deversante într-un plan vertical*, Comunicările Academiei R.S.România, **X**, *3* (1960).
7. D. DUMITRESCU, V. IONESCU, C. CRĂCIUN, *Studiul unitar al mișcării fuidelor grele cu suprafață liberă*, S.C.M.A., *2* (1962).
8. M. ERHAN, *Mișcări potențiale plane cu suprafață liberă peste obstacole hidrotehnice*, Ridicarea economicității sistemului energetic, **2** (1975).
9. M. ERHAN, *Contribuții la hidrodinamica curenților cu suprafață liberă*, Teză de doctorat, 1979.
10. J. FLOREA *Studiul teoretic și experimental al mișcării fluidelor grele cu suprafață liberă peste deversoare cu prag lat*, Teză de doctorat, 1971.
11. R. GERBER, *Sur les solutions exactes des equations du mouvement avec surface libre d'un liquid pesant*, Journal de Math. Pure et Appl. (1955).
12. H. PONCIN., *Sur le mouvement d'un fluide pesant dans un plan vertical*. Publ. Scient. et Techn., **16** (1932).
13. M. VAN DYKE, *Perturbation methods in Fluid Mechanics*, Academic Press, New York, London 1964.
41. H. VILLAT, *L'écoulement des fluides pesants à surface libre*, Ann. de l'Ecole Normale Sup., **32**, (1915).

ASUPRA UNOR CLASE DE EXTREMALE PRIVIND MIȘCAREA COMANDATĂ ÎN JURUL PUNCTELOR DE LIBRAȚIE DIN SISTEMUL PĂMÎNT—LUNĂ

de MIHAI POPESCU
Institutul național pentru creație științifică și tehnică, București

Această lucrare generalizează o serie de rezultate anterioare ale autorului privind transferul optimal de pe orbite, în punctele de librație ale sistemului Pămînt — Lună sau invers.
Prima parte tratează o problemă de extremum condiționat a transferului în timp optimal. Partea a doua a lucrării se ocupă de stabilirea comenzii, care, pentru o pondere cunoscută între doi indici de performanță diferiți, asigură transferul optimal astfel încît să fie satisfăcuți simultan ambii indici de performanță.

1. INTRODUCERE

În lucrările anterioare [1], [2], [3], [5] s-a tratat problema atingerii punctelor de librație coliniare și echilaterale ale sistemului Pămînt-Lună ale unui vehicul spațial care se află plasat pe orbite ale Pămîntului sau Lunii.

Mișcarea vehiculului spațial este asimilată cu mișcarea unui corp infinitezimal care evoluează în cîmpul generat de masele Pămîntului, respectiv Lunii. Un obiectiv de mare importanță pentru viitoarele operații spațiale îl constituie atingerea punctelor de librație din sistemul Pămînt-Lună.

Acest lucru este posibil fie venind direct dinspre planetele sistemului, fie prin coborîrea de pe orbite în jurul acestor puncte. S-a constatat că variații mici ale vitezelor inițiale determină o deviere importantă față de punctele de librație utilizînd metoda impulsurilor. Așa cum au semnalat-o lucrările anterioare, acest inconvenient poate fi înlăturat prin utilizarea continuă a unei tracțiuni mici. În aceste condiții lucrările precedente au determinat traiectoriile optimale care induc un consum minim de combustibil în transferul de pe orbite ale Pămîntului sau Lunii în punctele de librație. Formularea matematică revine la rezolvarea unor probleme de tip Lagrange cu extremități fixe [1], [2]. De asemenea, s-a analizat mișcarea comandată a vehiculelor spațiale care asigură transferul dintr-un punct dat din spațiu, în punctele de librație într-un timp minim, atunci cînd viteza de atingere a acestor puncte este arbitrară.

În studiul transferului din punctele de librație pe orbite ale Pămîntului sau Lunii au fost stabilite traiectoriile optimale care asigură o maximizare a valorilor finale pentru variabilele de stare, respectiv distanța

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 5, 1981, P. 647—675

parcursă și viteza, pentru un timp de evoluție cunoscut [4], [7]. Această succesiune de abordări a acoperit un cîmp larg de investigații ale mișcării optime comandate privind transferul în vid.

Lucrarea de față și-a propus ca pe baza unor rezultate anterioare să formuleze o generalizare a problemelor tratate. În acest scop, presupunînd date puterea vehiculului, ceea ce implică cunoașterea funcționalei care dă consumul de combustibil, se determină timpul minim de manevră necesar atingerii punctelor de librație. Presupunînd cunoscută ponderea care vizează satisfacerea simultană a minimizării consumului de combustibil, cît și maximizarea valorii finale a variabilelor de stare, se găsește legea de comandă care îndeplinește acest obiectiv, aceasta constituind o generalizare a rezultatelor din lucrările [1], [2] [3], [4], [5].

2. TEORIA GENERALĂ

Se consideră sistemul comandat prezentat prin ecuațiile de stare

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots x_n, u_1, \ldots u_m), \quad i = 1, \ldots n, \tag{1}$$

unde $x_1(t) \ldots x_n(t)$ sînt variabile de stare, iar $u_1(t) \ldots u_m(t)$ variabilele de comandă definite pe intervalul de timp $[t_0, t_1]$. Problema de tip Bolza este să determinăm parametrii de comandă astfel încît să se realizeze minimul sau maximul unei funcționale numită indice de performanță, care, în cazul cel mai general, poate fi scris

$$I = S[x(t_1), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} L(x, u, t)\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

unde am notat

$$x = (x_1 \ldots x_n), \quad u = (u_1, \ldots u_m), \tag{3}$$

astfel încît să fie satisfăcute în orice moment următoarele ecuații:

$$\Phi_i \equiv \begin{cases} \dot{x}_i - f_i(x, u, t) = 0, & i = 1, \ldots n, \\ h_j(x, u, t) = 0, & j = 1, \ldots p < m \end{cases} \tag{4}$$

și următoarele condiții la capete:

$$\Psi_p \equiv \begin{cases} g_k^0(x(t_0), t_0) = 0, & k = 1, \ldots, \\ g_l^1(x(t_1), t_1) = 0, & l = 1, \ldots, \end{cases} \tag{5}$$

funcțiile G, f_0, f_i și h_j sînt funcții continui în raport cu toate argumentele și avînd derivatele parațiale de un ordin suficient de mare pe o mulțime deschisă.

Dezvoltările care vor fi făcute au ca scop să transforme problema de comandă optimă într-o problemă variațională.

Fie indicele de performanță

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \left[L(x, u, t) + \frac{\mathrm{d}S(x, t)}{\mathrm{d}t} \right] \mathrm{d}t, \tag{6}$$

care mai poate fi scris

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} L(x, u, t)\,\mathrm{d}t + S[x(t_1), t_1] - S[x(t_0), t_0]. \tag{7}$$

Cum condițiile inițiale $[t_0, x(t_0)]$ sînt fixe, rezultă

$$S[x(t_0), t_0] = \text{const.} \tag{8}$$

În virtutea relației (8) este evident că extremizarea indicelui de performanță (2) este echivalentă cu extremizarea indicelui de performanță (7).

Avem

$$I_1(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(x, u, t) + \left[\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right]^T \dot{x} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \right\} \mathrm{d}t. \tag{9}$$

Considerăm funcționala (9) supusă constrîngerilor (1). Atunci, dacă funcțiile $x(t)$ minimizează I_1, există o mulțime de multiplicatori $\Lambda = \{\lambda_j(t)\}$ astfel încît funcția $x(t)$ minimizează funcționala

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(x, u, t) + \left[\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right]^T \dot{x} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \lambda^T f(x, u, t) - \lambda^T \dot{x} \right\} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L'(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Utilizînd teoria calculului variațional se scriu ecuațiile lui Euler pentru variabila de stare x și pentru variabila de comandă u. Avem

$$\frac{\partial L'(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L'(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)}{\partial \dot{x}} \right], \tag{11}$$

Relația (11) poate fi scrisă

$$\frac{\partial}{\partial x} [L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)] + \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x \partial t} -$$

$$- \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} \dot{x} - \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t \partial x} + \dot{\lambda} = 0. \tag{12}$$

Rezultă

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x}[L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)]. \tag{13}$$

Analog, pentru variabila de comandă, efectuînd calculele, se obţine

$$\frac{\partial}{\partial u}[L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)] = 0. \tag{14}$$

Numim funcţie de stare Pontreaghin expresia

$$H(x, u, \lambda, t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x, u, t) + L(x, u, t). \tag{15}$$

Se observă că

$$\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial \lambda} = f(x, u, t). \tag{16}$$

Cu notaţia (15) relaţia (14) devine

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \tag{17}$$

Rezolvarea ecuaţiei algebrice (17) permite determinarea comenzii optimale

$$u^0 = u^0(x, \lambda, t). \tag{18}$$

Utilizînd (18) funcţia de stare Pontreagin optimală poate fi scrisă

$$H^0(x, \lambda, t) = H^0[x, u^0(x, \lambda), t]. \tag{19}$$

Ţinînd seama de (19), ecuaţiile (13) şi (16) devin

$$\dot{x} = \frac{\partial H^0(x, \lambda, t)}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H^0(x, \lambda, t)}{\partial x}. \tag{20}$$

Setul de $2n$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi are soluţie unic determinată pentru condiţiile la capete (5) date. În cazul cînd unele din stările finale nu sînt specificate sînt necesare condiţii la limită suplimentare introduse prin condiţia ca pe extremală variaţia funcţionalei de extremizat să fie nulă, ceea ce revine la :

$$dI_1(x, u)|_{t=t_1} = 0. \tag{21}$$

Relaţia (21) conduce la

$$\left[\frac{\partial L'(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)}{\partial \dot{x}}\right]^T \mathrm{d}x\Big|_{t_1} + \left\{L'(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) - \left[\frac{\partial L'(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)}{\partial \dot{x}}\right]\dot{x}\right\} \mathrm{d}t\Big|_{t=t_1}. \tag{22}$$

Efectuînd calculele, (22) devine

$$\left[\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} - \lambda\right] \mathrm{d}x\Big|_{t_1} + \left[H^0(x, \lambda, t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t}\right] \mathrm{d}t\Big|_{t_1} = 0. \tag{23}$$

Se observă că pentru valori fixate ale stărilor finale, (23) este identic satisfăcută.

Presupunem că starea finală $(t_1, x(t_1))$ este liberă, ceea ce implică că $\mathrm{d}x$ şi $\mathrm{d}t$ sînt arbitrare, astfel încît satisfacerea relaţiei (23) conduce la

$$\left[\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} - \lambda\right]\Big|_{t_1} = 0, \quad \left[H^0(x, \lambda, t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t}\right]\Big|_{t_1} = 0. \tag{24}$$

Relaţiile (24) reprezintă condiţii suficiente care asigură unicitatea soluţiei pentru ecuaţiile (20) în cazul extremităţii libere.

3. FORMULAREA PROBLEMEI

3.1. ECUAŢIILE DE MIŞCARE

Vom relua pe scurt cîteva caracteristici care au fost date în [1], [2], [4] privind deducerea ecuaţiilor de mişcare a unui vehicul spaţial care evoluează pe orbite în jurul punctelor de libraţie din sistemul Pămînt-Lună. Considerăm două corpuri de mase finite şi unul de masă infinitezimală care se deplasează în cîmpul generat de masele finite. Cele două corpuri de mase finite evoluează pe orbite circulare situate în acelaşi plan.

S-a demonstrat că în planul mişcării punctului de masă infinitezimală aflat sub influenţa atracţiei corpurilor de masă finită există cinci puncte de echilibru, dintre care trei coliniare cu masele finite, celelalte două fiind situate în puncte simetrice faţă de axa comună a centrelor maselor finite şi care formează triunghiuri echilaterale cu centrele de masă finită.

Fie G centrul maselor finite şi GXY un sistem inerţial. Presupunînd un sistem Gxy a cărui axă x coincide cu linia centrelor de masă finită, noul sistem de coordonate se roteşte cu masele finite care au viteza unghiulară constantă ω. În sistemul rotitor se determină energia cinetică şi potenţială a corpului infinitezimal care sînt utilizate în ecuaţiile lui Lagrange. Dacă se asimilează corpurile de masă finită cu Pămîntul, respectiv Luna,

ecuațiile de stare ale unui vehicul spațial care este acționat de forță de propulsie de mică tracțiune pot fi scrise sub forma

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = K_1 x_1 + K_3 x_3 + 2\omega x_4 + u_1,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_4; \quad \frac{dx_4}{dt} = K_3 x_1 - 2\omega x_2 + K_2 x_3 + u_2, \tag{25}$$

unde x_{2k-1}, $x_{2k}(k = 1, 2)$ reprezintă coordonatele vehiculului spațial, respectiv vitezele acestora, iar (u_1, u_2) sînt componentele accelerației forței de propulsie în sistemul rotitor cu originea în punctele de librație.

Pentru cazul punctelor de librație echilaterale din sistemul Pămînt-Lună, în urma dezvoltării calculelor se găsește

$$K_1 = \frac{3}{4}(1 + m^*), \quad K_2 = \frac{9}{4}(1 + m^*), \quad K_3 = \mp \frac{3}{4}\sqrt{3}(1 - m^*). \tag{26}$$

Analog, se găsește pentru punctele coliniare

$$K_1 = 1 + m^* + \frac{2}{r^3} + \frac{2m^*}{\rho^3},$$
$$K_2 = 1 + m^* - \frac{1}{r^3} - \frac{m^*}{\rho^3}, \tag{27}$$
$$K_3 = 0,$$

în care r, ρ prezintă distanța de la punctul de librație la Pămînt, respectiv la Lună, iar m^* reprezintă raportul dintre masa Lunii și masa Pămîntului.

3.2. FUNCȚIONALA CARE DĂ CONSUMUL DE COMBUSTIBIL

În condițiile în care analizăm transferul vehiculelor spațiale de pe orbite ale Pămîntului sau Lunii în punctele de librație, o problemă deosebit de importantă o constituie determinarea expresiei care dă consumul de combustibil.

Puterea vehiculului este dată de

$$P = -\frac{\dot{m}}{2} c^2, \tag{28}$$

unde c este viteza de ejecție a gazelor, fiind presupusă constantă.

Accelerația datorată forței de propulsie a tracțiunii este dată de

$$u = -\frac{\dot{m}}{m} c. \tag{29}$$

Din relaţiile (28) şi (29) rezultă

$$\frac{u^2}{2P} = -\frac{\dot{m}}{m^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{m}\right). \tag{30}$$

Presupunînd puterea vehiculului constantă, se obţine

$$\frac{m_0}{m_T} = 1 + \frac{m_0}{2P}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t, \tag{31}$$

m_0 şi m_T reprezentînd masa combustibilului la valoarea iniţială $t = 0$ şi la valoarea finală $t = T$.

Din (31) rezultă

$$\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t = 2P\left(\frac{1}{m_T} - \frac{1}{m_0}\right). \tag{32}$$

Relaţia (32) dă consumul de combustibil de-a lungul traiectoriei, descrisă de vehicul. În lucrările anterioare [1], [2] s-au stabilit legile de comandă care guvernează mişcarea vehiculului astfel încît funcţionala (32) să fie minimă.

Se presupune că este dat consumul de combustibil necesar transferului vehiculului spaţial de pe orbite ale Pămîntului sau Lunii în punctele de libraţie. În aceste condiţii, o cerinţă a practicii impune aflarea traiectoriei optime care determină transferul de pe orbite în punctele de libraţie într-un timp minim.

3.3. PROBLEMA DE OPTIMUM

Considerăm familia de extremale

$$\{\gamma\} = \{\tilde{x}_i(t) = x_i(t) + \gamma_i(t) \mid \gamma_i(t_0) = \gamma_i(t_1) = 0\}. \tag{33}$$

Fie date două funcţii

$$F = 1,\ G = u_1^2 + u_2^2. \tag{34}$$

Dintre toate curbele $x_i(t) \in \{\gamma\}$, $x_i(t) \in C^1$ de-a lungul cărora integrala

$$K = \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)\,\mathrm{d}t \tag{35}$$

ia o valoare dată A, să se determine aceea pentru care integrala

$$J = \int_0^{t_1} \mathrm{d}t \tag{36}$$

ia o valoare minimă.

Luăm drept clasă a curbelor admisibile mulțimea curbelor din clasa C^1, care verifică ecuațiile diferențiale (25) reprezentate sub forma

$$\Phi(x, \dot{x}, u) = 0, \tag{37}$$

unde

$$x = (x_1, \ldots x_4), \; u = (u_1, u_2). \tag{38}$$

Vom transforma problema de extremum condiționat formulată anterior într-o problemă de extremum necondiționat. Într-adevăr, introducînd noua variabilă

$$x_5 = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2)\, dt, \tag{39}$$

rezultă

$$\Phi_5 \equiv \dot{x}_5 = u_1^2 + u_2^2. \tag{40}$$

În acest mod s-a eliminat condiționarea impusă de (35) avînd doar relații diferențiale de forma

$$\Phi(x, \dot{x}, u) = 0, \tag{41}$$

în care

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots \Phi_5), \; u = (u_1, u_2). \tag{42}$$

Problema de extremum condiționat se transformă deci într-o problemă de extremum necondiționat a cărei tratare s-a făcut în paragraful anterior.

4. ATINGEREA PUNCTELOR DE LIBRAȚIE ÎN TIMP MINIM

4.1. PUNCTELE DE LIBRAȚIE COLINIARE

Ecuațiile diferențiale care descriu mișcarea vehiculului spațial în jurul punctelor de librație coliniare sînt

$$\begin{aligned} &\Phi_1 \equiv \dot{x}_1 - x_2 = 0\,; \quad \Phi_2 \equiv \dot{x}_2 - K_1 x_1 - 2\omega x_4 - u_1 = 0, \\ &\Phi_3 \equiv \dot{x}_3 - x_4 = 0\,; \quad \Phi_4 \equiv \dot{x}_4 - K_2 x_3 + 2\omega x_2 - u_2 = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Cunoașterea funcționalei care dă consumul de combustibil implică

$$\Phi_5 \equiv \dot{x}_5 - u_1^2 - u_2^2 = 0. \tag{44}$$

Tratarea problemei de optimum se face pe baza teoriei prezentată în paragraful 2.

Funcţia de stare a lui Pontreagin se scrie

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2(K_1 x_1 + 2\omega x_4 + u_1) + \lambda_3 x_4 + \lambda_4(K_2 x_3 - 2\omega x_2 + u_2) + \\ + \lambda_5(u_1^2 + u_2^2) + 1. \tag{45}$$

Comenzile optimale se determină din relaţia (17) care devine

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \lambda_2 + 2\lambda_5 u_1 = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = \lambda_4 + 2\lambda_5 u_2 = 0. \tag{46}$$

Rezultă deci

$$u_1^0 = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_5}; \quad u_2^0 = -\frac{\lambda_4}{2\lambda_5}, \tag{47}$$

unde prin u_k^0 $(k = 1, 2)$ s-au notat comenzile optimale. Introducînd expresiile (47) în (45) se obţine hamiltonianul minim H^0 dat de

$$H^0(x, \lambda) = \lambda_1 x_2 + \lambda_2(K_1 x_1 + 2\omega x_4) + \lambda_3 x_4 + \lambda_4(K_2 x_3 - 2\omega x_2) - \frac{\lambda_2^2 + \lambda_4^2}{4\lambda_5^2} + 1. \tag{48}$$

Ţinînd seama de (48), sistemul (20) pentru problema noastră este

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H^0}{\partial \lambda_1} = x_2; \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H^0}{\partial \lambda_2} = K_1 x_1 + 2\omega x_4 - \frac{\lambda_2}{2\lambda_5^2},$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\partial H^0}{\partial \lambda_3} = x_4; \quad \dot{x}_4 = \frac{\partial H^0}{\partial \lambda_4} = K_2 x_3 - 2\omega x_2 - \frac{\lambda_4}{2\lambda_5^2}, \tag{49}$$

$$\dot{x}_5 = \frac{\partial H^0}{\partial \lambda_5} = -\frac{1}{4}\frac{\lambda_2^2 + \lambda_4^2}{\lambda_5^2},$$

respectiv

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H^0}{\partial x_1} = -K_1 \lambda_2; \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H^0}{\partial x_2} = -\lambda_1 + 2\omega\lambda_4,$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H^0}{\partial x_3} = -\lambda_4 K_2; \quad \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H^0}{\partial x_4} = -2\omega\lambda_2 - \lambda_3, \tag{50}$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial H^0}{\partial x_5} = 0.$$

Sistemul (50) poate fi scris sub forma

$$\dot{\Lambda} = L\Lambda, \tag{51}$$

unde L este matricea sistemului (50).

Un sistem fundamental de soluţii pentru (51) se obţine căutînd soluţii de forma

$$\lambda_j = A_j e^{st}, \qquad j = 1, \ldots, 4. \tag{52}$$

Înlocuind în sistemul (50), se obţine un sistem liniar şi omogen în raport cu necunoscutele A_i, iar condiţia ca acest sistem să aibă soluţii nu toate nule conduce la ecuaţia algebrică

$$\Delta = |L - sE| = 0. \tag{53}$$

Se găseşte astfel ecuaţia caracteristică ca fiind ecuaţia bipătrată

$$s^4 + (4\omega^2 - K_2 - K_1)s^2 + K_1K_2 = 0, \tag{54}$$

ale cărei soluţii sînt

$$s_1 = a, \; s_2 = -a, \; s_3 = ib, \; s_4 = -ib, \tag{55}$$

unde

$$a = \left[\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 + \sqrt{(K_1 + K_2 - 4\omega^2)^2 - 4K_1K_2}}{2}\right]^{1/2},$$
$$b = \left[\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 - \sqrt{(K_1 + K_2 - 4\omega^2)^2 - 4K_1K_2}}{2}\right]^{1/2}. \tag{56}$$

Rădăcinilor distincte ale ecuaţiei (54) le corespund patru vectori proprii coloană V_i şi patru soluţii particulare de forma (52) ce constituie un sistem fundamental de soluţii în domeniul $|t| < +\infty$, $|\lambda_i| < +\infty$ $(i = 1, \ldots 4)$ cu ajutorul cărora soluţia generală a sistemului (51) se scrie imediat. Expresiile vectorilor proprii sînt date de

$$V_i = (L_{kj})_{s=s_i}, \; i, \; k, \; j = 1, \ldots 4, \tag{57}$$

unde L_{kj} sînt complementii algebrici ai liniei k a determinantului $\Delta(s_i)$. Dacă notăm cu $\lambda_i^p (i = 1, \ldots, 4)$ soluţiile particulare obţinute din (52), un sistem fundamental de soluţii poate fi luat

$$\bar{\lambda}_1^p = \frac{\lambda_1^p + \lambda_2^p}{2}; \quad \bar{\lambda}_2^p = \frac{\lambda_1^p - \lambda_2^p}{2i},$$
$$\bar{\lambda}_3^p = \frac{\lambda_3^p + \lambda_4^p}{2}; \quad \bar{\lambda}_4^p = \frac{\lambda_3^p - \lambda_4^p}{2i}. \tag{58}$$

Soluția generală scrisă cu ajutorul sistemului fundamental de soluții (58) va fi

$$\bar{\lambda} = \sum C_i \bar{\lambda}_i^p, \tag{59}$$

unde $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}_i^p$ sînt vectorii coloană, iar C_i sînt constante arbitrare. Din relația (59), pe baza dezvoltării calculelor, se obțin soluțiile pentru sistemul (50)

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= C_1 a(4\omega^2 - K_2 + a^2)\, e^{at} - C_2 a(4\omega^2 - K_2 + a^2)\, e^{-at} - \\
&\quad - C_3 b(4\omega^2 - K_2 - b^2) \sin bt + C_4 b(4\omega^2 - K_2 - b^2) \cos bt, \\
\lambda_2(t) &= C_1(-a^2 + K_2)\, e^{at} + C_2(a^2 + K_2)\, e^{-at} + C_3(b^2 + K_2) \cos bt + \\
&\quad + C_4(b^2 + K_2) \sin bt, \\
\lambda_3(t) &= - C_1 2\omega K_2\, e^{at} - C_2 2\omega K_2\, e^{-at} - C_3 2\omega K_2 \cos bt - C_4 2\omega K_2 \sin bt, \\
\lambda_4(t) &= C_1 2\omega a\, e^{at} - C_2 2\omega a\, e^{-at} - C_3 2\omega b \sin bt + C_4 2\omega b \cos bt, \\
\lambda_5 &= C_5.
\end{aligned} \tag{60}$$

Condițiile la limită generalizate (24) devin

$$H^0(x, \lambda)|_{t=t_1} = 0, \tag{61}$$

ceea ce revine la

$$\lambda_1(t) x_2(t) + \lambda_2(t)[K_1 x_1(t) + 2\omega x_4(t)] + \lambda_3(t) x_4(t) + \lambda_4(t)(K_2 x_3(t) - 2\omega x_2(t)) - \left. - \frac{\lambda_2^2(t) + \lambda_4^2(t)}{4\lambda_5^2} + 1 \right|_{t=t_1} = 0. \tag{62}$$

Întrucît condițiile la capete (5) sînt

$$\begin{aligned}
x_i(0) &= x_i^0, \\
x_i(t_1) &= 0,
\end{aligned} \qquad i = 1, \ldots 4, \tag{63}$$

înlocuind în (62), se obține

$$\lambda_5^2 = \frac{\lambda_2^2(t_1) + \lambda_4^2(t_1)}{4}. \tag{64}$$

Rezultă că

$$x_5(t) = - \frac{1}{4\lambda_5^3} \int_0^t [\lambda_2^2(t) + \lambda_4^2(t)]\, dt. \tag{65}$$

Reprezentarea parametrică a traiectoriei optime care asigură transferul vehiculelor spaţiale în punctele coliniare de libraţie din sistemul Pămînt-Lună în timp minim se reduce la integrarea sistemului de ecuaţii

$$\dot{x}_i - \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j = \psi_i(t), \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{66}$$

unde a_{ij} sînt coeficienţii constanţi ai matricei ecuaţiilor de mişcare, iar $\psi_i(t)$ sînt funcţii de timp definite astfel

$$\begin{aligned} &\psi_{2k+1}(t) \equiv 0, && k = 0, 1, \\ &\psi_{2k}(t) = u_i^0(t), && k, i = 1, 2. \end{aligned} \tag{67}$$

Soluţia sistemului (66) se scrie sub forma

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{ij}(t)\, x_j(0) + \sum_{j=1}^{4} \int_0^t K_{ij}(t, \tau)\, \psi_j(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad i = 1, \ldots 4, \tag{68}$$

unde $R_{ij}(t)$ este matricea soluţiei fundamentale normală în $t_0 = 0$ a sistemului (66) la $\psi_i(t) = 0$, $i = 1, \ldots 4$.
Rezultă

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij}. \tag{69}$$

De asemenea, am notat

$$K_{ij}(t, \tau) = \sum_{m=1}^{4} R_{im}(t)\, R_{mj}^{-1}(\tau), \tag{70}$$

R_{mj}^{-1} fiind elementele matricei fundamentale inverse.
Fie $\bar{x}_i$ ($i = 1, \ldots 4$) soluţia sistemului (66) la $\psi_i(t) \equiv 0$.
Avem

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{4} \bar{c}_j f_j^i(t), \tag{71}$$

unde

$$\begin{aligned}
&f_1^1(t) = a(4\omega^2 - K_2 + a^2)\, \mathrm{e}^{at}; \quad f_2^1(t) = -\, a(4\omega^2 - K_2 + a^2)\, \mathrm{e}^{-at}, \\
&f_3^1(t) = -\, b(4\omega^2 - K_2 - b^2) \sin bt; \quad f_4^1(t) = b(4\omega^2 - K_2 - b^2) \cos bt, \\
&f_1^2(t) = K_1(a^2 - K_2)\, \mathrm{e}^{at}; \quad f_2^2(t) = K_1(a^2 - K_2)\, \mathrm{e}^{-at}, \\
&f_3^2(t) = -\, K_1(b^2 + K_2) \cos bt; \quad f_4^2(t) = -\, K_1(b^2 + K_2) \sin bt, \\
&f_1^3(t) = -\, 2\omega K_1\, \mathrm{e}^{at}; \quad f_2^3(t) = -\, 2\omega K_1\, \mathrm{e}^{-at}, \\
&f_3^3(t) = -\, 2\omega K_1 \cos bt; \quad f_4^3(t) = -\, 2\omega K_1 \sin bt, \\
&f_1^4(t) = -\, 2\omega K_1 a\, \mathrm{e}^{at}; \quad f_2^4(t) = 2\omega K_1 a\, \mathrm{e}^{-at}, \\
&f_3^4(t) = 2\omega K_1 b \sin bt; \quad f_4^4(t) = -\, 2\omega K_1 b \cos bt,
\end{aligned} \tag{72}$$

iar $\bar{c}_j$ ($j = 1, \ldots 4$) sînt constante oarecare.

Ţinînd seama de (71) termenii matricei soluţiei fundamentale a sistemului omogen pot fi scrişi sub forma

$$R_{1j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^1(t); \quad R_{2j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^2(t),$$
$$R_{3j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^3(t); \quad R_{4j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^4(t). \tag{73}$$

Coeficienţii c_{ij} sînt determinaţi din condiţia (69), care devine

$$\begin{aligned}
\delta_{1j} &= c_{1j} f_1^1(0) + c_{2j} f_2^1(0) + c_{3j} f_3^1(0) + c_{4j} f_4^1(0),\\
\delta_{2j} &= c_{1j} f_1^2(0) + c_{2j} f_2^2(0) + c_{3j} f_3^2(0) + c_{4j} f_4^2(0),\\
\delta_{3j} &= c_{1j} f_1^3(0) + c_{2j} f_2^3(0) + c_{3j} f_3^3(0) + c_{4j} f_4^3(0),\\
\delta_{4j} &= c_{1j} f_1^4(0) + c_{2i} f_2^4(0) + c_{3j} f_3^4(0) + c_{4j} f_4^4(0).
\end{aligned} \tag{74}$$

Rezolvînd sistemul (74) se găseşte

$$c_{11} = \frac{1}{2(4\omega^2 - K_2 + a^2)}; \quad c_{12} = \frac{1}{2K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{13} = \frac{b^2 + K_2}{4\omega K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)}; \quad c_{14} = \frac{4\omega^2 - K_2 - b^2}{4\omega K_1 a(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{21} = -\frac{1}{2ab(4\omega^2 - K_2 + a^2)}; \quad c_{22} = \frac{1}{2K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{23} = -\frac{b^2 + K_2}{4\omega K_1^2(4\omega^2 - K_2 + a^2)}; \quad c_{24} = -\frac{4\omega^2 - K_2 - b^2}{4\omega K_1 a(4\omega^2 - K_2 + a^2)}, \tag{75}$$

$$c_{31} = 0; \quad c_{32} = -\frac{1}{K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)},$$

$$c_{33} = -\frac{a^2 + K_2}{2K_1(4\omega^2 - K_2 + a^2)}; \quad c_{41} = -\frac{1}{4\omega^2 - K_2 + a^2},$$

$$c_{42} = 0; \quad c_{43} = 0; \quad c_{44} = -\frac{1}{2K_1 b}.$$

Din (68), ţinînd seama de (63), rezultă

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{1j}(t)\, x_j^0 + \int_0^t [R_{12}(t-\tau)\, u_1^0(\tau) + R_{14}(t-\tau)\, u_2^0(\tau)]\, \mathrm{d}\tau,$$

$$x_2(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{2j}(t)\, x_j^0 + \int_0^t [R_{22}(t-\tau)\, u_1^0(\tau) + R_{24}(t-\tau)\, u_2^0(\tau)]\, \mathrm{d}\tau,$$

$$x_3(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{3j}(t) x_j^0 + \int_0^t [R_{32}(t-\tau)\, u_1^0 + R_{34}(t-\tau)\, u_2^0(\tau)]\, \mathrm{d}\tau, \tag{76}$$

$$x_4(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{4j}(t) x_j^0 + \int_0^t [R_{42}(t-\tau)\, u_1^0 + R_{44}(t-\tau)\, u_2^0(\tau)]\, \mathrm{d}\tau.$$

Cu notaţiile

$$-\frac{C_i}{\lambda_5^2} = C_i^* \tag{77}$$

şi dezvoltînd calculele, se obţin pentru variabilele de stare soluţii analoage cu cele din [2]:

$$x_i(t) = F_0^i(t) + \sum_{j=1}^{4} C_j^* F_j^i(t), \quad i = 1, \ldots 4. \tag{78}$$

Utilizînd condiţiile la limită finale se determină

$$C_j^*(t_1) = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta}, \tag{79}$$

unde Δ_{ji} se obţine prin înlocuirea coloanei coeficienţilor lui C_i^* cu $-F_0^i(t_1)$, iar $\Delta = |F_j^i(t_1)|$, $i, j = 1, \ldots 4$.

Pentru determinarea timpului minim t_1 necesar transferului în punctele de libraţie coliniare se utilizează relaţia

$$\int_0^{t_1} [\lambda_2^2(t) + \lambda_4^2(t)]\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} [\lambda_2^2(t_1) + \lambda_4^2(t_1)]^{3/2}. \tag{80}$$

Efectuînd calculele, cu notaţiile din anexă se găseşte ecuaţia transcendentă

$$F_0^0(t_1) + F_0^1(t_1)\, t_1 + F_{11}(t_1)\, \mathrm{e}^{2at_1} + F_{22}(t_1)\, \mathrm{e}^{-2at_1} + F_{13}(t_1)\, \mathrm{e}^{at_1} \sin bt_1 +$$
$$+ F_{14}(t_1)\, \mathrm{e}^{at_1} \cos bt_1 + F_{23}(t_1)\, \mathrm{e}^{-at_1} \sin bt_1 + F_{24}(t_1)\, \mathrm{e}^{-at_1} \cos bt_1 +$$
$$+ F_{33}(t_1) \sin 2bt_1 + F_{44}(t_1) \cos 2bt_1 = -4\lambda_5^3(t_1)\, A. \tag{81}$$

Fie

$t_1^1, \ldots t_1^k$ soluțiile pozitive ale ecuației (81).

Luăm

$$t_1 = \min (t_1^1, \ldots t_1^k). \tag{82}$$

Expresia (82) reprezintă timpul minim pentru problema considerată. Întrucît t_1 este cunoscut, pot fi determinați C_j astfel încît legile optimale care asigură transferul vehiculelor spațiale și punctele coliniare de librație în timp minim pot fi scrise

$$\begin{aligned} x_i(t) = &\left[H_1^i + \sum_{j=1}^{4} \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} A_j^i\right] e^{at} + \left[H_2^i + \sum_{j=1}^{4} \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} B_j^i\right] e^{-at} + \\ &+ \left[H_3^i + \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\Delta_{ji}}{\Delta} L_j^i + \frac{\Delta_{j+2,i}}{\Delta} K_{j+2}^i\right)\right] \sin bt + \\ &+ \left[H_4^i + \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\Delta_{ji}}{\Delta} M_j^i + \frac{\Delta_{j+2,i}}{\Delta} L_{j+2}^i\right)\right] \cos bt + \\ &+ t\left[\sum_{j=1}^{2} \frac{\Delta_{j+2,i}}{\Delta} D_{j+2}^i \sin bt + \sum_{j=1}^{2} \frac{\Delta_{j+2,i}}{\Delta} E_{j+2}^i \cos bt\right] + \\ &+ \frac{\Delta_{1i}}{\Delta} (tD_1^i + E_1^i \cos bt + K_1^i \sin bt) e^{at} + \\ &+ \frac{\Delta_{2i}}{\Delta} (tD_2^i + E_2^i \cos bt + K_2^i \sin bt) e^{-at} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} N_j^i, \qquad (83) \\ &i, j = 1, \ldots 4. \end{aligned}$$

4.2. PUNCTELE DE LIBRAȚIE ECHIDISTANTE

Ecuațiile care guvernează mișcarea unui vehicul spațial în jurul punctelor de librație echidistante sînt date de

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \dot{x}_1 - x_2 = 0, \\ \Phi_2 &= \dot{x}_2 - K_1 x_1 - K_3 x_3 - 2\omega x_4 - u_1 = 0, \\ \Phi_3 &= \dot{x}_3 - x_4 = 0, \\ \Phi_4 &= \dot{x}_4 - K_3 x_1 + 2\omega x_2 - K_2 x_3 - u_2 = 0, \end{aligned} \tag{84}$$

la care se adaugă condiția de tip izoperimetric

$$\Phi_5 \equiv \dot{x}_5 - u_1^2 - u_2^2 = 0. \tag{85}$$

Ecuațiile lui Euler-Lagrange sînt date de

$$\dot{\lambda}_1 = -K_1\lambda_2 - K_3\lambda_4, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + 2\omega\lambda_4. \tag{86}$$

Ecuația caracteristică a sistemului diferențial (86) se scrie

$$s^4 + (4\omega^2 - K_2 - K_1)s^2 + K_1K_2 - K_3^2 = 0, \tag{87}$$

cu soluțiile

$$s_{1,2} = \pm ia\,; \quad s_{3,4} = \pm ib, \tag{88}$$

unde

$$a = \left[\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 + \sqrt{(K_1 + K_2 - 4\omega^2)^2 - 4(K_1K_2 - K_3^2)}}{2}\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$b = \left[\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 + \sqrt{(K_1 + K_2 - 4\omega^2)^2 - 4(K_1K_2 - K_3^2)}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{89}$$

Utilizînd un sistem fundamental de soluții de forma (58) soluția generală a sistemului (86) va fi o combinație liniară de soluțiile sistemului fundamental. Se găsește astfel

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= C_1[-a(4\omega^2 - K_2 + a^2)\sin at - 2\omega\cos at] + C_2[a(4\omega^2 - K_2 - a^2)\cos at - \\
&\quad - 2\omega K_3 \sin at] + C_3[-b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\sin bt - 2\omega K_3\cos bt] + \\
&\quad + C_4[b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\cos bt - 2\omega K_3 \sin bt], \\
\lambda_2(t) &= C_1(a^2 + K_2)\cos at + C_2(a^2 + K_2)\sin at + C_3(b^2 + K_2)\cos bt + \\
&\quad + C_4(b^2 + K_2)\sin bt, \\
\lambda_3(t) &= C_1(-K_3 a \sin at - 2\omega K_2 \cos at) + C_2(K_3\, a\cos at - 2\omega K_2 \sin at) + \\
&\quad + C_3(-K_3 b \sin bt - 2\omega K_2 \cos bt) + C_4(K_3 b \cos bt - 2\omega K_2 \sin bt), \\
\lambda_4(t) &= C_1(-2\omega a \sin at - K_3\cos at) + C_2(2\omega a \cos at - K_3 \sin at) + \\
&\quad + C_3(-2\omega b \sin bt - K_3 \cos bt) + C_4(2\omega b \cos bt - K_3 \sin bt).
\end{aligned} \tag{90}$$

În mod similar cu cazul tratat anterior se găsește

$$\begin{aligned}
f_1^1(t) &= -a(4\omega^2 - K_2 - a^2)\sin at + 2\omega K_3 \cos at, \\
f_2^1(t) &= a(4\omega^2 - K_2 - a^2)\cos at + 2\omega K_3 \sin at, \\
f_3^1(t) &= -b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\sin bt + 2\omega K_3 \cos bt, \\
f_4^1(t) &= b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\cos bt + 2\omega K_3 \sin bt,
\end{aligned} \tag{91}$$

$$
\begin{aligned}
f_1^2(t) &= [-K_1(a^2+K_2)+K_3^2]\cos at - 2\omega K_3 a \sin at,\\
f_2^2(t) &= [-K_1(a^2+K_2)+K_3^2]\sin at + 2\omega K_3 a \cos at,\\
f_3^2(t) &= [-K_1(b^2+K_2)+K_3^2]\cos bt - 2\omega b \sin bt,\\
f_4^2(t) &= [-K_1(b^2+K_2)+K_3^2]\sin bt + 2\omega K_3 b \cos bt,\\
f_1^3(t) &= -2\omega K_1 \cos at - aK_3 \sin at,\\
f_2^3(t) &= -2\omega K_1 \sin at - aK_3 \cos at,\\
f_3^3(t) &= -2\omega K_1 \cos bt - bK_3 \sin bt,\\
f_4^3(t) &= -2\omega K_1 \sin bt - bK_3 \cos bt,\\
f_1^4(t) &= 2\omega K_1 a \sin at - a^2 K_3 \cos at,\\
f_2^4(t) &= -2\omega K_1 a \cos at - a^2 K_3 \sin at,\\
f_3^4(t) &= 2\omega K b \sin bt - b^2 K_3 \cos bt,\\
f_4^4(t) &= -2\omega K_1 b \cos bt - b^2 K_3 \sin bt.
\end{aligned}
\tag{91}
$$

Calculînd coeficienţii matricei soluţiei fundamentale se obţine

$$
\begin{aligned}
c_{44} &= \frac{2\omega K_1[(a^2+K_2-4\omega^2)+K_3^2]}{bK_3^2(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},\\
c_{12} &= \frac{4\omega^3 K_1^2 - b^2 K_3^2}{K_3^2(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},\\
c_{13} &= \frac{-2\omega\{K_1[K_1(b^2+K_2)-K_3^2]+K_3^2 b\}}{K_3^2(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},\\
c_{14} &= \frac{4\omega^2 K_1 + [K_1(b^2+K_2)-K_3^2]}{K_3(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},\\
c_{21} &= -\frac{[4\omega^2 K_1(K_1^2+K_3^2)+K_3^2(K_1K_2-K_3^2)]}{K_3^2 a(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},\\
c_{22} &= \frac{2\omega[K_3^2 - K_1(4\omega^2-K_2-b^2)]}{aK_3(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},\\
c_{43} &= \frac{K_1[(a+K_2)(K_1K_2-K_3^2)-4\omega^2(K_1+K_2)]}{bK_3^2(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},
\end{aligned}
\tag{92}
$$

$$c_{23}=\frac{4\omega^2(K_1^2-K_3^2)-(4\omega^2-K_2-b^2)(K_3^2-K_1K_2)}{K_3a(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},$$

$$c_{24}=\frac{2\omega K_1[(4\omega^2-K_2-b^2)-K_3^2]}{K_3^2a(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2)-K_3^2-4\omega^2K_1]},$$

$$c_{32}=\frac{aK_3^2-4\omega^2K_1^2}{K_3^2(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},$$

$$c_{33}=\frac{2\omega\{a^2K_3^2-K_1[-K_1(a^2+K_2)+K_3^2]\}}{K_3(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},$$

$$c_{34}=\frac{-K_1(a^2+K_2)+K_3^2-4\omega^2K_1}{K_3^2(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]}, \tag{92}$$

$$c_{41}=\frac{[-K_1(b^2+K_2)+K_3^2]-4\omega^2K_1}{b(a^2-b^2)\{[-K_1(b^2+K_2)+K_3^2]-4\omega^2K_1\}},$$

$$c_{42}=\frac{2\omega[K_1(4\omega^2-K_2-a^2)-K_3^2]}{K_3b(a^2-b^2)[K_1(b^2+K_2-4\omega^2)-K_3^2]},$$

$$c_{11}=0,\quad c_{31}=0.$$

Impunînd satisfacerea condiției (80), se obține ecuația transcendentă care dă soluția timpului minim în problema atingerii punctelor de librație echidistante

$$\begin{aligned}G_0^0(t_1)+G_0^1(t_1)\,t_1+G_{11}(t_1)\sin 2at_1+G_{22}(t_1)\cos 2at_1+G_{33}(t_1)\sin 2bt_1+\\+G_{44}(t_1)\cos 2bt_1+G_{13}(t_1)\sin at_1\sin bt_1+G_{14}(t_1)\sin at_1\cos bt_1+\\+G_{23}(t_1)\cos at_1\sin bt_1+G_{24}(t_1)\cos at_1\cos bt_1=-4\lambda_5^3(t_1)\,A,\end{aligned} \tag{93}$$

unde expresiile lui G_0^k, G_{ij} $(k=0,1)$ $(i,j=1,\dots 4)$ sînt date în anexă.

Ca și în cazul anterior, se ia cea mai mică soluție t_1 a ecuației (93). Cu această valoare se determină $C_i^*(t_1)$ astfel încît expresiile variabilelor de stare pentru mișcarea optimală comandate devin [1]

$$\begin{aligned}x_i(t)=&\left[H_1^i+\sum_{j=1}^{4}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}A_j^i\right]\sin at+\left[H_2^i+\sum_{j=1}^{4}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}B_j^i\right]\cos at+\\&+\left[H_3^i+\sum_{j=1}^{4}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}D_j^i\right]\sin bt+\left[H_4^i+\sum_{j=1}^{4}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}E_j^i\right]\cos bt+\\&+t\left\{\sum_{j=1}^{4}\left[\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}K_j^i\sin at+\frac{\Delta_{ij+1}}{\Delta}K_{j+1}^i\sin bt\right]+\right.\\&\left.+\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}K_j^i\cos at+\frac{\Delta_{ij+1}}{\Delta}L_{j+1}^i\cos bt\right]\right.\end{aligned} \tag{94}$$

5. PROCESE DE OPTIMIZARE MULTIPLE PRIVIND TRANSFERUL DIN PUNCTELE DE LIBRAȚIE

PROBLEME DE TIP BOLZA

Uneori în cerințele practicii se impune satisfacerea simultană a două obiective. Astfel, în transferul din punctele de librație ale sistemului Pămînt-Lună este necesar a fi rezolvată problema traiectoriilor optime care induc un consum minim de combustibil pentru maximizarea variabilelor de stare reprezentînd coordonatele vehiculului respectiv componentelor vitezei acestuia la momentul final dat t_1. În acest sens vom trata cazul general incluzînd atît cazul punctelor de librație coliniare, cît și echidistante.

Fie sistemul ecuațiilor de mișcare scris sub forma generală

$$\dot{X} = AX + U, \tag{95}$$

cu starea inițială

$$X(0) = 0, \tag{96}$$

în care s-au notat cu X și U vectorii coloană ai variabilelor de stare, respectiv de comandă.

Se cere să se determine legile de comandă care asigură transferul din punctele de librație cu consum minim de combustibil maximizînd totodată valorile finale ale variabilelor de stare într-un timp dat t_1.

Acesta revine la rezolvarea problemei de tip Bolza

$$I = \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)\,\mathrm{d}t - \Gamma X_1, \tag{97}$$

în care prin X_1 s-a notat starea finală, iar Γ este o matrice care reprezintă ponderea dintre cele două obiective. Se observă că Γ poate fi luat de forma

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{98}$$

Se observă

$$S = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix}. \tag{99}$$

Astfel încît condițiile la limită generalizate (24) devin

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\Gamma E, \tag{100}$$

E fiind vectorul unitate.

Rezultă că sînt îndeplinite condiţiile

$$\lambda_i(t_1) = -1, \quad (i = 1, \ldots 4). \tag{101}$$

Condiţia (101) permite determinarea constantelor necunoscute C_i a căror valoare a fost dată în (4.1) şi (4.2).
Fie

$$C_i^k = \frac{\Delta_i^k}{\Delta^k}, \quad i = 1, \ldots 4, \; k = 1, 2, \tag{102}$$

unde Δ_i^k, Δ^k sînt determinanţii ce rezultă din rezolvarea sistemului (101) pentru punctele de libraţie coliniare, respectiv echidistante. Cu aceasta soluţia problemei considerate, ţinînd seama de (96), se scrie sub forma integrală

$$x_i(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{2} R_{i2k}(t - \tau)\, u_k^0(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{103}$$

în care u_k^0 $(k = 1, 2)$ au fost notate comenzile optimale.

6. CONCLUZII

Studiul întreprins permite obţinerea unor clase de extremale care răspund diverselor cerinţe de optimizare privind transferul în vid. Ele generalizează probleme formulate în lucrări anterioare, fiind obţinute prin introducerea unor condiţii suplimentare. Estimînd funcţiile de comandă, se observă că acestea sînt comenzi admisibile, valorile lor fiind situate într-un domeniu compatibil cu domeniul de existenţă al micilor tracţiuni.

7. ANEXĂ

7.1. PUNCTELE DE LIBRAŢIE COLINIARE

$$\frac{1}{2} c_{1,2j}\, a(4\omega^2 - K_2 + a^2) = A_{1j}^1; \qquad -c_{1,2j}\, \omega K_1 = A_{1j}^3,$$

$$-\frac{1}{2} c_{2,2j}\, a(4\omega^2 - K_2 + a^2) = B_{1j}^1; \qquad -c_{2;2j}\, \omega K_1 = B_{1j}^3,$$

$$-\frac{1}{2} c_{3,2j}\, b(4\omega^2 - K_2 - b^2) = D_{1j}^1; \qquad -c_{3;2j}\, \omega K_1 = D_{1j}^3,$$

$$\frac{1}{2} c_{4;2j}\, b(4\omega^2 - K_2 - b^2) = E_{1j}^1; \qquad -c_{4;2j}\, \omega K_1 = E_{1j}^3,$$

$$\frac{1}{2}c_{1,2j}K_1(a^2-K_2)=A^2_{1j}; \qquad -c_{1,2j}\omega K_1 a=A^4_{1j},$$

$$-\frac{1}{2}c_{2,2j}K_1(a^2-K_2)=B^2_{1j}; \qquad c_{2,2j}\omega K_1 a=B^4_{1j},$$

$$-\frac{1}{2}c_{3,2j}K_1(b^2+K_2)=E^2_{1j}; \qquad c_{3,2j}\omega K_1 b=D^4_{1j},$$

$$-c_{4,2j}\omega K_1 b=E^4_{1j},$$

$$c^1_{11}=\sum_{j=1}^{4}c_{1j}x^0_j, \quad c^1_{12}=\sum_{j=1}^{4}c_{2j}x^0_j, \quad c^1_{13}=\sum_{j=1}^{4}c_{3j}x^0_j, \quad c^1_{14}=\sum_{j=1}^{4}c_{4j}x^0_j,$$

$$\frac{1}{2a}(-a^2+K_2)B^k_{11}+\frac{(-a^2+K_2)}{ab}D^k_{11}+\frac{1}{2}B^k_{12}+\frac{ab}{a^2+b^2}D^k_{12}+$$

$$+\frac{a^2}{a^2+b^2}E^k_{12}=A^k_1,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2)}{2a}B^k_{11}-\frac{B^k_{12}}{2}=B^k_1; \quad (-a^2+K_2)A^k_{11}+aA^k_{12}=D^k_1,$$

$$-\frac{1}{ab}(-a^2+K_2)D^k_{11}=E^k_1; \quad \frac{(-a^2+K_2)}{ab}E^k_{11}=K^k_1,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2)}{ab}E^k_{11}-\frac{a^2}{a^2+b^2}D^k_{12}+\frac{ab}{a^2+b^2}E^k_{12}=L^k_1,$$

$$\frac{(-a^2+K_2)}{ab}D^k_{11}-\frac{ab}{a^2+b^2}D^k_{12}-\frac{a^2}{a^2+b^2}E^k_{12}=M^k_1,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2}{ab}D^k_{11}=N^k_1; \quad \frac{-(-a^2+K_2)}{2a}A^k_{11}-\frac{A^k_{12}}{2}=A^k_2,$$

$$\frac{(-a^2+K_2)}{2a}A^k_{11}-\frac{(-a^2+K_2)}{ab}D^k_{11}+\frac{1}{2}A^k_{12}-\frac{ab}{a^2+b^2}D^k_{12}+$$

$$+\frac{a^2}{a^2+b^2}E^k_{12}=B^k_2,$$

$$(-a^2+K_2)B^k_{11}-aB^k_{12}=D^k_2; \quad \frac{-(-a^2+K_2)}{ab}D^k_{11}=E^k_2,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2)}{ab}E_{11}^k = K_2^k,$$

$$\frac{-(-a^2+K_2)}{ab}E_{11}^k - \frac{a^2}{a^2+b^2}D_{12}^k - \frac{ab}{a^2+b^2}E_{12}^k = L_2^k,$$

$$\frac{-a^2+K_2}{ab}D_{11}^k = N_2^k; \quad \frac{a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k - \frac{b^2}{a^2+b^2}A_{12}^k = A_3^k,$$

$$\frac{-a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k - \frac{b^2}{a^2+b^2}B_{12}^k = B_3^k; \quad \frac{1}{2}(b^2+K_2)D_{11}^k - \frac{b}{2}E_{12}^k = D_3^k,$$

$$\frac{1}{2}(b^2+K_2)E_{11}^k + \frac{b}{2}D_{12}^k = E_3^k,$$

$$\frac{b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k + \frac{b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k + \frac{1}{2b}(b^2+K_2)E_{11}^k + \frac{ab}{a^2+b^2}A_{12}^k -$$

$$- \frac{ab}{a^2+b^2}B_{12}^k,$$

$$-\frac{1}{2}D_{12}^k = K_3^k,$$

$$\frac{-a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k + \frac{b^2}{a^2+b^2}A_{12}^k + \frac{b^2}{a^2+b^2}B_{12}^k - \frac{a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k = L_3^k,$$

$$\frac{b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k + \frac{ab}{a^2+b^2}A_{12}^k = A_4^k; \quad \frac{b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k - \frac{ab}{a^2+b^2}B_{12}^k = B_4^k,$$

$$\frac{1}{2}(b^2+K_2)E_{11}^k + \frac{1}{2}bD_{12}^k = D_4^k; \quad -\frac{1}{2}(b^2+K_2)D_{11}^k + \frac{1}{2}bE_{12}^k = E_4^k,$$

$$\frac{-a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k + \frac{a(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k + \frac{1}{2b}(b^2+K_2)D_{11}^k + \frac{b^2}{a^2+b^2}A_{12}^k +$$

$$+ \frac{b^2}{a^2+b^2}B_{12}^k + \frac{1}{2}E_{12}^k = K_4^k,$$

$$\frac{-b(b+K_2)}{a^2+b^2}A_{11}^k - \frac{b(b^2+K_2)}{a^2+b^2}B_{11}^k - \frac{ab}{a^2+b^2}A_{12}^k + \frac{ab}{a^2+b^2}B_{12}^k = L_4^k,$$

$$c_{11}^1 a(4\omega^2 - K_2 + a^2) = H_1^1; \quad c_{11}^1 K_1(a^2 - K_2) = H_1^2; \quad c_{11}^1(-2\omega K_1) = H_1^3,$$

$$-c_{12}^1 a(4\omega^2 - K_2 + a^2) = H_2^1; \quad c_{12}^1 K_1(a^2 - K_2) = H_2^2; \quad c_{12}^1(-2\omega K_1) = H_2^3,$$

$$-c_{13}^1 b(4\omega^2 - K_2 - b^2) = H_3^1; \quad -c_{14} K_1(b^2 + K_2) = H_3^2; \quad c_{14}^1(-2\omega K_1) = H_3^3,$$

$$c_{14}^1 b(4\omega^2 - K_2 - b^2) = H_4^1; \quad -c_{13} K_1(b^2 + K_2) = H_4^2; \quad c_{13}^1(-2\omega K_1) = H_4^3,$$

$$c_{11}^1(-2\omega a K_1) = H_1^4, \qquad c_{13}^1(2\omega K_1 b) = H_3^4,$$

$$c_{12}(2\omega a K_1) = H_2^4, \qquad c_{14}^1(-2\omega K_1 b) = H_4^4,$$

$$H_1^k e^{at} + H_2^k e^{-at} + H_3^k \sin bt + H_4^k \cos bt = F_0^k(t),$$

$$A_1^k e^{at} + B_1^k e^{-at} + D_1^k t e^{at} + E_1^k e^{at} \cos bt + K_1^k e^{at} \sin bt + L_1^k \sin bt +$$

$$+ M_1^k \cos bt + N_1^k = F_1^k(t),$$

$$A_2^k e^{at} + B_2^k e^{-at} + D_2^k t e^{-at} + E_2^k e^{-at} \cos bt + K_2^k e^{-at} \sin bt + L_2^k \sin bt +$$

$$+ M_2^k \cos bt + N_2^k = F_2^k(t),$$

$$C_1^2(-a^2+K_2)^2 + C_1^2\omega^2 a^2 = f_{11}(t_1); \quad C_1 C_2[(K_2^2 - a^4) - 4\omega^2 a^2] = f_{12}(t_1),$$

$$C_2^2(a^2+K_2^2)^2 + C_2^2\omega^2 a^2 = f_{22}(t_1); \quad C_1 C_3(-a^2+K_2)(b^2+K_2) + C_1 C_4 \omega^2 ab = f_{14}(t_1),$$

$$C_4^2(b^2+K_2) + C_3^2\omega^2 b^2 = f_{33}(t_1); \quad C_1 C_4(-a^2+K_2)(b^2+K_2) - C_1 C_3 \omega^2 ab = f_{13}(t_1),$$

$$C_3^2(b^2+K_2)^2 + C_4^2\omega^2 b^2 = f_{44}(t_1); \quad C_2 C_3(a^2+K_2)(b^2+K_2) - C_2 C_4 \omega^2 ab = f_{24}(t_1),$$

$$C_2 C_4(a^2+K_2)(b^2+K_2) + C_2 C_3 \omega^2 ab = f_{23}(t_1); \quad C_3 C_4(b^2+K_2)^2 - C_3 C_4 \omega^2 b^2 = f_{34}(t_1),$$

$$-\frac{1}{2a} f_{11} + \frac{1}{2a} f_{22} + f_{12} - \frac{a}{a^2+b^2} f_{14} + \frac{b}{a^2+b^2} f_{13} + \frac{a}{a^2+b^2} f_{24} +$$

$$+ \frac{b}{a^2+b^2} f_{23} + \frac{1}{4b} f_{34} = F_0^0(t_1),$$

$$\frac{1}{2a} f_{11} = F_{11}(t_1); \quad -\frac{1}{2a} f_{22} = F_{22}(t_1); \quad -\frac{1}{4b} f_{34} = F_{44}(t_1),$$

$$\frac{b}{a^2+b^2} f_{14} + \frac{a}{a^2+b^2} f_{13} = F_{13}(t_1); \quad \frac{a}{a^2+b^2} f_{14} - \frac{b}{a^2+b^2} f_{13} = F_{14}(t_1),$$

$$\frac{b}{a^2+b^2}f_{24}-\frac{a}{a^2+b^2}f_{23}=F_{23}(t_1);\quad -\frac{a}{a^2+b^2}f_{24}+\frac{b}{a^2+b^2}f_{23}=F_{24}(t_1),$$

$$-\frac{1}{4b}f_{33}+\frac{1}{4b}f_{44}=F_{33}(t_1);\quad \frac{1}{2}f_{33}+\frac{1}{2}f_{44}=F_0^1(t_1).$$

7.2. PUNCTELE DE LIBRAȚIE ECHIDISTANTE

$$\frac{1}{2}[-C_{1j+2}a(4\omega^2-K_2-a)+C_{2j+2}(2\omega K_3)]=A^1_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}[C_{1j+2}(2\omega K_1)+C_{2j+2}a(4\omega^2-K_2-a^2)]=B^1_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}[C_{3j+2}(2\omega K_3)+C_{4j+2}b(4\omega^2-K_2-b^2)]=E^1_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}[-C_{3j+2}b(4\omega^2-K_2-b^2)+C_{4j+2}(2\omega K_3)]=D^1_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\{-C_{1j+2}a(2\omega K_3)+C_{2j+2}[-K_1(a^2+K_2)+K_3^2]\}=A^2_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\{C_{1j+2}[-K_1(a^2+K_2)+K_3^2]+C_{2j+2}(2\omega K_3 a)\}=B^2_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\{C_{3j+2}(-2\omega b)+C_{4j+2}[-K_1(b^2+K_2)+K_3^2]\}=D^2_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\{C_{3j+2}[-K_1(b^2+K_2)+K_3^2]+C_{4j+2}(2\omega K_3 b)\}=E^2_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}[C_{1j+2}(-2\omega K_1)+C_{2j+2}(-aK_3)]=B^3_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}[C_{1j+2}(-aK_3)+C_{2j+2}(-2\omega K_1)]=A^3_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}[C_{3j+2}(-bK_3)+C_{4j+2}(-2\omega K_1)]=D^3_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}[C_{3j+2}(-2\omega K_1)+C_{4j+2}(-bK_3)]=E^3_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{1j+2}(2\omega K_1 a) + C_{2j+2}(-a^2K_3)\right] = A^4_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{1j+2}(-a^2K_3) + C_{2j+2}(-b^2K_3)\right] = B^4_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{3j+2}(2\omega K_1 b) + C_{4j+2}(-b^2K_3)\right] = D^4_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{3j+2}(-b^2K_3) + C_{4j+2}(-2\omega K_1 b)\right] = E^4_{1j+1},$$

$$C^1_{11} = \sum_{j=1}^{4} C_{1j}x^0_j\,; \quad C^1_{12} = \sum_{j=1}^{4} C_{2j}x^0_j, \quad C^1_{13} = \sum_{j=1}^{4} C_{3j}x^0_j, \quad C^1_{14} = \sum_{j=1}^{4} C_{4j}x^0_j,$$

$$C^1_{11}\left[-a(4\omega^2 - K_2 - a^2)\right] + C^1_{12}(2\omega K_3) = H^1_1,$$

$$C^1_{11}(2\omega K_3) + C^1_{12}\left[a(4\omega^2 - K_2 - a^2)\right] = H^1_2,$$

$$C^1_{13}\left[-b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\right] + C^1_{14}(2\omega K_3) = H^1_3,$$

$$C^1_{13}(2\omega K_3) + C^1_{14}\left[b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\right] = H^1_4,$$

$$C^1_{11}(-2\omega a K_3) + C^1_{12}\left[-K_1(a^2 + K_2) + K_3^2\right] = H^2_1,$$

$$C^1_{11}\left[-K_1(a^2 + K_2) + K_3^2\right] + C^1_{12}(2\omega K_3 a) = H^2_2,$$

$$C^1_{13}(-2\omega b) + C^1_{14}\left[-K_1(b^2 + K_2) + K_3^2\right] = H^2_3,$$

$$C^1_{13}\left[-K_1(b^2 + K_2) + K_3^2\right] + C^1_{14}(2\omega K_3 b) = H^2_4,$$

$$C^1_{11}(-aK_3) + C^1_{12}(-2\omega K_1) = H^3_1\,; \quad C^1_{11}(2\omega K_1 a) + C^1_{12}(-a^2K_3) = H^4_1,$$

$$C^1_{11}(-2\omega K_1) + C^1_{12}(-aK_3) = H^3_2\,; \quad C^1_{11}(-a^2K_3) + C^1_{12}(-2\omega a K_1) = H^4_2,$$

$$C^1_{13}(-bK_3) + C^1_{14}(-2\omega K_1) = H^3_3\,; \quad C^1_{13}(2\omega K_1 b) + C^1_{12}(-2\omega a K_1) = H^4_3,$$

$$C^1_{13}(-2\omega K_1) + C^1_{14}(-bK_3) = H^3_4\,; \quad C^1_{13}(-b^2K_3) + C^1_{14}(-2\omega K_1 b) = H^4_4,$$

$$\frac{a^2 + K_2}{2a}B^i_{11} + \frac{a(a^2 + K_2)}{a^2 - b^2}E^i_{11} - A^i_{13}\omega - B^i_{13}\frac{K_3}{2a} + \frac{2\omega ab}{a^2 - b^2}D^i_{13} -$$

$$- \frac{K_3 a}{a^2 - b^2}E^i_{13} = A^i_1,$$

$$\frac{a^2+K_2}{2a}A_{11}^i-\frac{b}{a^2-b^2}D_{11}^i+\frac{K_3}{2a}A_{13}^i+\omega B_{13}^i-\frac{K_3b}{a^2-b^2}D_{13}^i+$$

$$+\frac{2\omega a^2}{a^2-b^2}E_{13}^i=A_2^i,$$

$$-\frac{a(b^2+K_2)}{b^2-a^2}B_{11}^i+\frac{2\omega ab}{b^2-a^2}A_{13}^i+\frac{K_2a}{b^2-a^2}B_{13}^i=A_3^i,$$

$$\frac{b(b^2+K_2)}{b^2-a^2}A_{11}^i-\frac{bK_3}{b^2-a^2}A_{13}^i+\frac{2a}{b^2-a^2}B_{13}^i=A_4^i,$$

$$\frac{b(a^2+K_2)}{a^2-b^2}D_{11}^i+\frac{b_1K_3}{a^2-b^2}D_{13}^i+\frac{2\omega a}{a^2-b^2}E_{13}^i=B_1^i,$$

$$-\frac{a^2+K_2}{a^2-b^2}E_{11}^i-\frac{2\omega ab}{a^2-b^2}D_{13}^i+\frac{2\omega ab}{a^2-b^2}E_{13}^i=B_2^i,$$

$$-\frac{a(b^2+K_2)}{b^2-a^2}A_{11}^i-\frac{aK_2}{b^2-a^2}A_{13}^i+\frac{2\omega b^2}{b^2-a^2}B_{13}^i=B_3^i,$$

$$-\frac{b(b^2+K_2)}{a^2-b^2}E_{11}^i-\frac{2a}{a^2-b^2}A_{13}^i+\frac{K_3b_1}{b^2-a^2}B_{13}^i=B_4^i,$$

$$-\frac{b(a^2+K_2)}{a^2-b^2}E_{11}^i-\frac{2a}{a^2-b^2}D_{13}^i+\frac{K_3b}{a^2-b^2}E_{13}^i=D_1^i,$$

$$\frac{a(a^2+K_2)}{a^2-b^2}D_{11}^i+\frac{K_3a}{a^2-b^2}D_{13}^i-\frac{2\omega ab}{a^2-b^2}E_{13}^i=D_2^i,$$

$$\frac{b(b^2+K_2)}{b^2-a^2}B_{11}^i+\frac{b^2+K_2}{2b}E_{11}^i-\frac{2\omega b}{b^2-a^2}B_{13}^i-\omega D_{13}^i-\frac{K_2}{2b}E_{13}^i=D_3^i,$$

$$-\frac{a(b^2+K_2)}{b^2-a^2}A_{11}^i+\frac{b^2+K_2}{2b}D_{11}^i+\frac{aK_3}{b^2-a^2}A_{13}^i+\frac{2\omega b^2}{b^2-a^2}B_{13}^i-$$

$$-\frac{K_3}{2b}D_{13}^i+\omega E_{13}^i=D_4^i,$$

$$-\frac{b}{a^2-b^2}D_{11}^i-\frac{K_3b}{a^2-b^2}D_{13}^i-\frac{2\omega a}{a^2-b^2}E_{13}^i=E_1^i,$$

$$\frac{a^2+K_2}{a^2-b^2}E_{11}^i+\frac{2\omega\,ab}{a^2-b^2}D_{13}^i+\frac{K_3}{a^2-b^2}E_{13}^i=E_2^i,$$

$$\frac{a(b^2+K_2)}{b^2-a^2}A_{11}^i+\frac{K_2a}{b^2-a^2}A_{13}^i-\frac{2\omega b^2}{b^2-a^2}B_{13}^i=E_3^i,$$

$$-\frac{b(b^2+K_2)}{b^2-a^2}B_{11}^i-\frac{2\omega\,ab}{b^2-a^2}A_{13}^i-\frac{K_3\,b}{b^2-a^2}B_{13}^i=E_4^i,$$

$$-\frac{a^2+K_3}{2}A_{11}^i-\frac{K_3}{2}A_{13}^i-\omega aB_{13}^i=K_1^i,$$

$$\frac{a^2+K_2}{2}B_{11}^i+\omega aA_{13}^i+\frac{K_3}{2}B_{13}^i=K_2^i;$$

$$-\frac{b^2+K_2}{2}D_{11}^i+\frac{K_2}{2}D_{13}^i+\omega\,b\,E_{13}^i=K_3^i,$$

$$\frac{b^2+K_2}{2}E_{11}^i+\omega\,b\,D_{13}^i+\frac{K_3}{2}E_{13}^i=K_4^i,$$

$$\frac{a^2+K_2}{2}B_{11}^i+A_{13}^i\,\omega\,a-\frac{K_3}{2a}B_{13}^i=L_1^i,$$

$$-\frac{a^2+K_2}{2}A_{11}^i-\frac{K_3}{2}A_{13}^i+\omega\,a\,B_{13}^i=L_2^i,$$

$$\frac{b^2+K_2}{2}E_{11}^i+\omega\,b\,D_{13}^i-\frac{K_2}{2}E_{13}^i=L_3^i,$$

$$-\frac{b^2+K_2}{2}D_{11}^i+\frac{K_3}{2}D_{13}^i+\omega\,b\,E_{13}^i=L_4^i,$$

$$H_1^i\sin at+H_2^i\cos at+H_3^i\sin bt+H_4^i\cos bt=F_0^i(t),$$

$$A_j^i\sin at+B_j^i\cos at+D_j^i\sin bt+E_j^i\cos bt+t(K_j^i\sin bt+L_j^i\cos bt)=F_j^i(t),\qquad(i,\ j=1,\dots 4),$$

$$C_2^2(a^2+K_2)^2+C_2^2K_3^2+C_1^2\,4\,\omega^2a^2+4C_1C_2\,\omega\,a\,K_3=g_{11}(t_1),$$

$$C_1^2K_3^2+C_2^2\,4\omega^2a^2-4\,\omega\,a\,K_3C_1C_2+C_1^2(a^2+K_2^2)=g_{22}(t_1),$$

$$C_4^2(b^2 + K_2) + C_3^2\, 4\omega^2 b^2 + C_4^2 K_3^2 + 2\omega\, b\, K_3 C_3 C_4 = g_{33}(t_1),$$

$$C_3^2(b^2 + K_2)^2 + C_3^2 K_3^2 + C_4^2\, 4\omega^2 b^2 - 2\omega b K_3\, C_3 C_4 = g_{44}(t_1),$$

$$2C_1 C_2(a^2 + K_2) + C_1^2 4\omega a K_3 - C_2^2\, 4\omega a K_3 + 2C_1 C_2 K_3^2 = g_{12}(t_1),$$

$$2C_1 C_3(a^2 + K_2)\,(b^2 + K_2) + 2C_1 C_3 K_3^2 - 2\,\omega b K_3 C_1 C_4 - 2C_2 C_3 \omega a K_3 + \\ + 4\omega^2 ab\; C_2 C_4 = g_{24}(t_1),$$

$$C_1 C_4(a^2 + K_2)\,(b^2 + K_2) + 4C_1 C_3\, \omega b K_3 + C_1 C_4 K_3^2 - 4\omega^2\, ab\; C_2 C_3 - \\ - 2\,\omega\, a K_3\, C_2 C_4 = g_{23}(t_1),$$

$$C_3^2 4\omega\, b K_3 - C_4^2\, 4\omega b K_3 - C_3 C_4\, 4\omega^2 b^2 + C_3 C_4 K_3^2 = g_{34}(t_1)$$

$$C_1 C_3 4\omega^2\, ab + C_1 C_4\, 2\omega\, a k_3 + C_2 C_3\, 2\omega\, b K_3 + C_2 C_4 K_3^2 = g_{13}(t_1),$$

$$C_1 C_3\, 2\omega\, a K_3 - C_1 C_4\, 4\omega^2\, ab + C_2 C_3 K_3^2 - C_2 C_4\, 2\omega\, b K_3 = g_{14}(t_1),$$

$$\frac{1}{4a} g_{12} + \frac{1}{4b} g_{34} + \frac{b}{b^2 - a^2} g_{23} + \frac{a}{a^2 - b^2} g_{14} = G_0^0(t_1),$$

$$\frac{1}{2} g_{22} + \frac{1}{2} g_{11} + \frac{1}{2} g_{44} + \frac{1}{2} g_{33} = G_0^1(t_1),$$

$$-\frac{1}{4a} g_{11} = G_{11}(t_2),$$

$$\frac{b}{b^2 - a^2} g_{23} + \frac{b}{a^2 - b^2} g_{14} = G_{13}(t_1),$$

$$\frac{a}{a^2 - b^2} g_{24} + \frac{b}{a^2 - b^2} g_{13} = G_{14}(t_1),$$

$$\frac{b}{b^2 - a^2} g_{24} - \frac{a}{a^2 - b^2} g_{13} = G_{23}(t_1),$$

$$\frac{b}{a_2 - b^2} g_{23} - \frac{a}{a^2 - b^2} g_{14} = G_{24}(t_1),$$

$$-\frac{1}{4a} g_{12} = G_{22}(t_1),$$

$$\frac{1}{4a} g_{22} + \frac{1}{4b} g_{44} - \frac{1}{4b} g_{33} = G_{33}(t_1),$$

$$-\frac{1}{4b} g_{34} = G_{44}(t_1).$$

Primită la redacție la 27 martie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. M. POPESCU, *Asupra transferului optim al vehiculelor spațiale în punctele de librație echidistante din sistemul Pământ—Lună*. St. cerc. mec. apl., **39**, *1* (1980).
2. — *Transferul optimal în punctele de librație coliniare*, St. cerc. mec. apl., **40** *1* (1981).
3. — *Asupra atingerii punctelor de librație ale sistemului Pământ—Lună în timp minim*, St. cerc. mec. apl., **39**, *5* (1980).
4. — *The absolute extremum in the transfer problem of spatial vehicles from colinear libration points of the Earth—Moon System to the maximum distance*, XXX International Astronautical Congress, München 1979.
5. — *The utilization of functional analysis in the study of comanded movements regarding the optimum transference from collinear Libration Points*, XXXI International Astronautical Congress, Tokio 1980.
6. — *La determination de l'extremum absolut de la classe des extremales admissible*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **25**, *2* (1980).
7. — *Asupra condițiilor adiționale de tip Bolza utilizate în studiul transferului optimal din punctele lagrangiene*. St. cerc. mec. apl., (sub tipar)
8. — *On the optimum controlled mouvement around the Lagrangian points in the Earth—Moon System*, Rev. Roum. Sci. Techn-Méc. Appl., **26**, *2*, (1981).

LEGEA DE REZISTENȚĂ $\vec{R} = -cm\,\vec{v}/r^2$ ÎN PROBLEMA CELOR DOUĂ CORPURI [1)]

de IOSIF ȚEPOSU
Institutul național pentru creație științifică și tehnică, București

În lucrare se rezolvă problema celor două corpuri, în cazul cînd se consideră o forță de perturbație, datorită rezistenței mediului, de forma $\vec{R} = -cm\vec{v}/r^2$. În particular, sînt analizate două perturbații, avansul pericentrului și devansarea apocentrului, pentru care sînt date expresii simple.
În plus, se face o aplicație pentru calculul avansului periheliului planetei Mercur, ajungîndu-se la concluzia că legile de rezistență $\vec{R} = -\alpha m\vec{v}$ ($\alpha = const.$) și $\vec{R} = -cm\vec{v}/r^2$ ($c = const.$) produc, în mod practic, același avans al periheliului acestei planete.

1. INTRODUCERE

În [1] s-a făcut o amplă analiză a rezultatelor clasice privind mișcarea kepleriană în mediu rezistent și a fost prezentată o nouă teorie, diferită de teoria perturbațiilor a lui Euler și Lagrange (vezi [2]), pentru studiul problemei menționate. Această teorie a fost aplicată pentru studiul mișcării în mediu uniform rezistent, pentru care $\vec{R} = -\alpha m\vec{v}$ ($\alpha = \text{const.}$). Problema s-a redus la rezolvarea unei ecuații integrale neliniare și a fost posibilă obținerea unor rezultate calitative și cantitative importante. În particular, s-a demonstrat că pericentrul orbitei are un avans proporțional cu α^2 (adică o perturbație de ordinul doi) și că, în esență, orbita are alura unei rozete (vezi fig. 1) similare celei care se obține considerînd corecțiile de relativitate (vezi [3]).

Teoria dezvoltată în [1] a fost aplicată și pentru tratarea problemei creșterii de masă a punctului material P după o lege exponențială, viteza particulelor care se atașază fiind nulă în sistemul inerțial de referință. S-a demonstrat că problema este echivalentă cu aceea a mișcării într-un mediu uniform rezistent și că cele două efecte se cumulează. Cu alte cuvinte, s-a demonstrat că mai există două cauze, rezistența mediului și creșterea de masă, care pot explica avansul periheliului planetelor utilizînd conceptele mecanicii newtoniene.

Pentru legea de rezistență $\vec{R} = -cm\vec{v}/r^2$, în [1] a fost demonstrată existența avansului pericentrului. Scopul lucrării de față este acela de a da reprezentarea soluției și de a calcula efectiv avansul pericentrului și devansarea apocentrului pentru legea de rezistență menționată. De asemenea, vom face o aplicație numerică pentru cazul planetei Mercur.

[1] Comunicare prezentată la cel de-al XXVIII-lea Congres Internațional de Astronautică (I.A.F.), Praga, septembrie 1977.

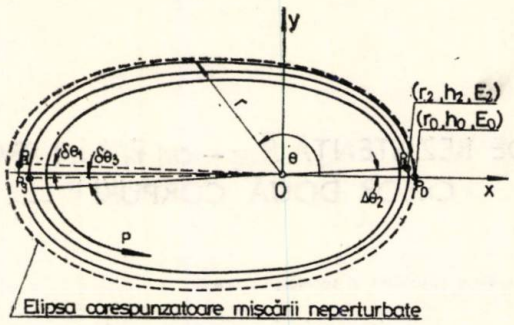


Fig. 1. — Mișcarea keplerianã în mediu rezistent.

2. FORMULAREA PROBLEMEI

Considerăm punctul material P, de masă constantă m, al cărui vector de poziție în sistemul inerțial de referință xOy este $\vec{r}$. Presupunem că asupra lui P acționează forța de atracție newtoniană

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{r}_1, \tag{1}$$

în care $K = G \cdot m \cdot M$, iar $\vec{r}_1$ este versorul în direcția razei vectoare- G este constanta gravitației, iar M masa corpului atractiv situtat în ori. ginea O a sistemului de coordonate.

În afara forței $\vec{F}$, presupunem că asupra punctului material P mai acționează și o forță, datorată mediului în care are loc mișcarea, de forma

$$\vec{R} = -\frac{c\, m\, \vec{v}}{r^2}, \tag{2}$$

unde c este o constantă pozitivă, iar $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ este viteza locală a lui P.

Ecuația de mișcare este dată de legea a doua a lui Newton

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R}, \tag{3}$$

în care $\ddot{\vec{r}}$ este accelerația la momentul t. Traiectoria fiind o curbă plană (vezi [1]), vom folosi coordonatele polare r și θ.

3. REPREZENTAREA SOLUȚIEI

Alegem momentul inițial $t_0 = 0$ și presupunem că sînt satisfăcute condițiile inițiale

$$\theta_0 = 0,\ u = u_0,\ h = h_0,\ E = E_0, \tag{4}$$

unde u este inversul razei vectoare, $u = 1/r$, h este dublul vitezei areolare, iar E este energia totală.

Să definim constantele A şi B astfel încît să scriem

$$u_0 = A \cdot \frac{K}{m h_0^2} \tag{5}$$

şi, respectiv,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0 = B \cdot \frac{K}{m h_0^2}. \tag{6}$$

Dacă ţinem seama de condiţiile iniţiale (4), între constantele A şi B există relaţia (vezi [1]).

$$B = \frac{1}{K}\sqrt{2(m E_0 h_0^2 + AK^2) - A^2K^2}. \tag{7}$$

Fie $k = c/h_0$. Utilizînd rezultatele din [1], ecuaţia de mişcare devine

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{m h_0^2} f(\theta), \tag{8}$$

unde

$$f(\theta) = (1 - k\theta)^{-2}. \tag{9}$$

Soluţia ecuaţiei (8), care satisface condiţiile iniţiale (4), este

$$u(\theta) = \frac{K}{mh_0^2}\left[A\cos\theta + B\sin\theta + \sin\theta\int_0^\theta f(x)\cos x\,dx - \cos\theta\int_0^\theta f(x)\sin x\,dx\right]. \tag{10}$$

Să presupunem că la momentul t_0 punctul material P este situat la pericentru, adică $B = 0$ şi $A = 1 + \varepsilon$, ε fiind excentricitatea orbitei corespunzătoare mişcării neperturbate. În aceste condiţii, din (9) şi (10) obţinem soluţia sub forma

$$u(\theta) = \frac{K}{mh_0^2}\left\{(1 + \varepsilon)\cos\theta + \frac{1}{k}\left[\sin\theta\, T_1(\theta) + \cos\theta\, T_2(\theta) - \sin\theta\right]\right\}, \tag{11}$$

unde

$$T_1(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin x}{1 - kx}\,dx, \quad T_2(\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos x}{1 - kx}\,dx. \tag{12}$$

Din (11) putem remarca faptul că $u'(2\pi) \neq 0$ şi $u'(2\pi) > 0$, cu alte cuvinte pentru legea de rezistenţă (2) are loc deplasarea pericentrului şi, în plus, acesta avansează în sensul de mişcare al punctului material P.

4. CALCULUL DEVANSĂRII APOCENTRULUI

În [4] s-a făcut ipoteza că constanta k este suficient de mică, astfel încît să putem neglija k^2 în raport cu k. Dacă admitem această ipoteză, funcţia $f(\theta)$ poate fi aproximată prin

$$f_1(\theta) = 1 + 2k\theta, \tag{13}$$

iar soluţia (11) devine

$$u_1(\theta) = \frac{K}{mh_0^2}[1 + \varepsilon\cos\theta + 2k(\theta - \sin\theta)]. \tag{14}$$

Se poate observa că $u_1'(\pi) > 0$ şi $u_1'(2\pi) = 0$. Prin urmare, în aproximaţia (13), devansarea apocentrului nu este nulă, în timp ce avansul pericentrului este nul.

Fie $\theta = \theta^*$ noul apocentru al orbitei. Presupunem că θ^* este astfel încît să aparţină unei vecinătăţi V^* a punctului $\theta = \pi$ (vezi Teorema 14 din [1]), astfel încît vom pune

$$\theta^* = \pi + \delta\theta. \tag{15}$$

Utilizînd aproximaţiile

$$\sin\delta\theta = \delta\theta \quad \text{şi} \quad \cos\delta\theta = 1, \tag{16}$$

din condiţia $u_1'(\theta^*) = 0$ obţinem, pentru devansarea apocentrului, expresia simplă

$$\delta\theta = -4\frac{k}{\varepsilon}. \tag{17}$$

5. CALCULUL AVANSULUI PERICENTRULUI

Aşa cum am văzut, în aproximaţia (13) deplasarea pericentrului este nulă. Prin urmare, pentru calculul corect al acestei perturbaţii trebuie să reţinem în dezvoltarea funcţiei $f(\theta)$ şi termenii în k^2, adică să aproximăm pe $f(\theta)$ prin

$$f_2(\theta) = 1 + 2k\theta + 3k^2\theta^2. \tag{18}$$

În aceste condiţii avem

$$\int_0^\theta f(x)\cos x\, dx = \sin\theta + 2k(\theta\sin\theta + \cos\theta - 1) + 3k^2(\theta^2\sin\theta + 2\theta\cos\theta - 2\sin\theta), \tag{19}$$

respectiv,

$$\int_0^\theta f(x)\sin x\,dx = 1 - \cos\theta + 2k(\sin\theta - \theta\cos\theta) + 3k^2(2\theta\sin\theta + \\ + 2\cos\theta - \theta^2\cos\theta - 2), \tag{20}$$

astfel că din (10) obţinem soluţia aproximativă

$$u_2(\theta) = \frac{K}{mh_0^2}[1 + \varepsilon\cos\theta + 2k(\theta - \sin\theta) + 3k^2(\theta^2 + 2\cos\theta - 2)]. \tag{21}$$

Din (21) se poate observa că $u_2'(2\pi) > 0$, adică în aproximaţia (18) avansul pericentrului nu mai este nul.

Fie $\theta = \theta_*$ noul pericentru al orbitei. Presupunem, ca mai sus, că θ_* este situat într-o vecinătate V_* a punctului $\theta = 2\pi$, astfel încît teorema 14 din [1] să poată fi aplicată. Vom pune, de asemenea,

$$\theta_* = 2\pi + \Delta\theta \tag{22}$$

şi vom face aproximaţiile

$$\sin\Delta\theta = \Delta\theta, \quad \cos\Delta\theta = 1. \tag{23}$$

Din condiţia $u_2'(\theta_*) = 0$, vom obţine expresia avansului pericentrului dată de

$$\Delta\theta = \frac{12\pi k^2}{\varepsilon}, \tag{24}$$

remarcînd şi faptul că este o perturbaţie de ordinul doi. De asemenea, dacă comparăm (17) cu (24) observăm că

$$\Delta\theta = -3k\pi\,\delta\theta. \tag{25}$$

În final, putem trage concluzia că şi pentru legea de rezistenţă $\vec{R} = -cm\vec{v}/r^2$ orbita are alura unei rozete, ca în figura 1 (vezi şi [1]).

6. AVANSUL PERIHELIULUI PLANETEI MERCUR

În [1] a fost calculat avansul pericentrului orbitei, în problema celor două corpuri, pentru cazul în care legea de rezistenţă are forma $\vec{R} = -\alpha m\vec{v}$, $\alpha = \text{const.}$ (mediu uniform rezistent) şi a fost obţinută expresia

$$\Delta\theta = \frac{3\alpha^2 T^2}{2\pi\varepsilon}(2 + \varepsilon)\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \tag{26}$$

unde T este perioada de revoluţie corespunzătoare mişcării neperturbate.

Pe de altă parte, în [1] a fost determinată constanta α_M care, în concordanţă cu (26), produce un avans al periheliului planetei Mercur de 43″ de arc pe secol (neglijînd alte perturbaţii). S-a obţinut valoarea

$$\alpha_M = 4{,}367 \cdot 10^{-11}\ s^{-1}. \tag{27}$$

Distanţa medie a planetei Mercur faţă de Soare este $5{,}82 \cdot 10^{12}$cm, excentricitatea orbitei este $\varepsilon = 0{,}206$, masa $m = 3{,}2 \cdot 10^{26}$ g şi perioada de revoluţie este

$$T = 7{,}6032 \cdot 10^{6}\text{s (vezi [6]).}$$

Să admitem în (2) că $c/r^2 = \text{const.} = \alpha$. Dacă alegem pentru α valoarea α_M din (27) şi considerăm $r = 5{,}82 \cdot 10^{12}$ cm, atunci vom obţine acea constantă c_M care, în concordanţă cu (26), va produce un avans al periheliului de 43″ de arc pe secol, adică $5{,}023 \cdot 10^{-7}$ rad./revoluţie. Valoarea lui c_M este

$$c_M = 1{,}479 \cdot 10^{15}\ \text{cm}^2/\text{s}. \tag{28}$$

Pe de altă parte, constanta h_0 corespunzătoare vitezei areolare medii este $h_0 = 2{,}8 \cdot 10^{19}\ \text{cm}^2/\text{s}$, astfel că raportul k este

$$k = 5{,}284 \cdot 10^{-5}. \tag{29}$$

Substituind (29) în (24) vom obţine avansul periheliului planetei Mercur dat de

$$\Delta\theta = 5{,}1096 \cdot 10^{-7}\ \text{rad./revoluţie}, \tag{30}$$

adică 43,7″ de arc pe secol.

Prin urmare, putem trage concluzia că, în cazul planetei Mercur, legea liniară de rezistenţă $\vec{R} = -\alpha m\vec{v}$ şi legea (2) produc, practic, acelaşi avans al periheliului.

Primită la redacţie la 27 martie 1981

7. BIBLIOGRAFIE

1. I. ŢEPOSU, *O teorie neliniară a mişcărilor centrale în mediu rezistent*, St. Cerc. Mat., **29**, *3*, 261—318, (1977).
2. J. L. LAGRANGE, *Mécanique analitique*. Vol. 1, 2 ed. 3, Mallet-Bachelier, Paris, 1885.
3. G. FALK, *Theoretische Physik*. I, II, Springer-Verlag, 1966.
4. Y. M. SMART, *Nebesnaia mehanica*, Moskva, 1965.
5. C. IACOB, *Mecanică teoretică*, Edit. Acad. R.S.România, Bucureşti, 1971.
6. M. R. SPIEGEL, *Theory and problems of theoretical mechanics*, Schaum, 1967.

ASUPRA CANALIZĂRII GAZELOR CĂTRE IMOBILE

de AL. D. STAN
Institutul de petrol și gaze, Ploiești,
S. POPOVICIU
Întreprinderea de rețele și instalații pentru distribuția gazelor naturale, Tîrgu Mureș

De multe ori, la conductele vechi apar, din cauza coroziunii sau a îmbinărilor incorect executate, defecte care pot genera accidente.
O parte dintre gazele scurse prin orificii ies în atmosferă și o altă parte se scurg pe traseul conductei către gurile de vizitare, cămine, imobile, generînd, în unele situații, accidente. Scurgerea gazelor are loc și pe traseul conductei deoarece aceasta în timpul exploatării suferă diverse tasări și deplasări datorită traficului rutier, vibrațiilor, lucrărilor care se fac în apropierea conductei. Orificiul format este periculos dacă deasupra acestuia solul este impermeabil, fie datorită tasării puternice a solului, fie unor lucrări existente (asfaltări, betonări etc.), deoarece gazele ieșite sînt canalizate către imobilele apropiate.
Cu relațiile obținute în lucrare, se pot norma științific o serie de activități de control din sectorul de distribuție a gazelor care au fost stabilite în mod empiric.

1. INTRODUCERE

În exploatarea unei conducte de distribuție a gazelor se poate forma, din cauza coroziunii sau a unor defecte de montaj, orificii prin care se scurg cantități însemnate de gaze. Datorită vibrațiilor conductei, traficului rutier sau a lucrărilor efectuate în apropierea conductei, aceasta se poate deplasa, formîndu-se, în acest fel, fisuri pe lîngă conductă prin care se pot canaliza gazele către imobile.

În lucrarea [3] se redau valorile deplasărilor pe care le-a avut în timp un punct situat în apropierea unui șanț (fig. 1).

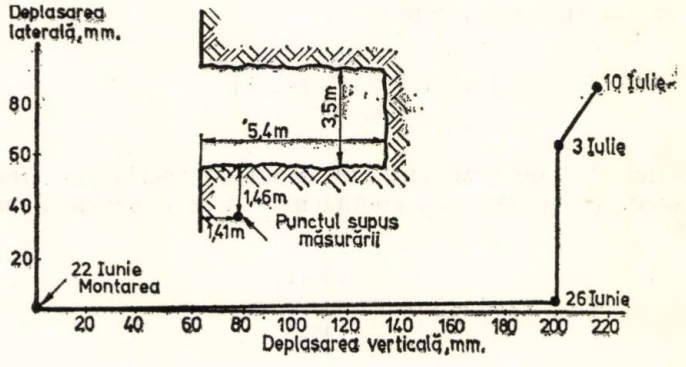


Fig. 1

Formarea fisurii în apropierea conductei de distribuție sau a altor conducte este periculoasă deoarece acestea sînt îndreptate către imobile. Prin fisura formată se scurg o parte din gazele ieșite din orificiu iar o altă parte din acestea sînt infiltrate prin sol către suprafață. Fisura formată în apropierea conductei poate fi considerată, din punct de vedere hidrodinamic, ca un tub de secțiune circulară cu diametrul d și lungimea L. Dacă pentru fisură se consideră deschiderea $2w$, pierderea de presiune are expresia [6].

$$\Delta p = \rho \frac{v_{med}^2}{2} \cdot \frac{L}{2w} \lambda_f , \tag{1}$$

ρ este masa specifică a gazului și λ_f coeficientul de rezistență, care se poate calcula cu una din relațiile obținute din corelațiile experimentale [6]

$$\lambda_f = \frac{0{,}2023}{\mathscr{R}e^{\frac{1}{3{,}5659}}} \qquad \text{pentru} \qquad 1800 \leqslant \mathscr{R}e \leqslant 3500,$$

$$\lambda_f = \frac{0{,}0826}{\mathscr{R}e^{\frac{1}{5{,}9607}}} \qquad \text{pentru} \qquad \mathscr{R}e > 3500,$$

$\mathscr{R}e$ fiind numărul lui Reynolds definit cu viteza medie v_{med} și lungimea $(2w)$. Diametrul echivalent al tubului cu secțiunea circulară se calculează prin egalarea pierderii de presiune din fisură cu aceea din tub, ultima fiind scrisă sub forma clasică,

$$\Delta p = \rho \frac{v_{med}^2}{2} \frac{L}{d} \lambda, \tag{2}$$

rezultînd diametrul echivalent

$$d = \left(\frac{\lambda}{\lambda_f} \frac{8}{\pi^2} b^2 w^3 \right)^{1/5} , \tag{3}$$

λ fiind coeficientul de rezistență în tubul cu secțiunea circulară, iar b lățimea fisurii. De obicei [4], coeficientul λ se calculează cu relația lui Weymouth

$$\lambda = \frac{0{,}009407}{\sqrt[3]{d}}, \tag{4}$$

d fiind introdus în metri. Relația (3) a fost obținută în ipoteza că prin fisură și tubul cu secțiunea cilindrică se transportă debite de gaze egale.

2. GAZELE SCURSE PRINTR-O FISURĂ APROPIATĂ ORIFICIULUI

Gazele scurse printr-un orificiu format se infiltrează prin sol către suprafaţa acestuia şi prin fisura existentă pe lîngă conductă. Pentru o mişcare staţionară se poate spune că debitul Q scurs din orificiu este format din debitul Q_0 şi Q_f. Acesta din urmă este compus din debitul care se filtrează prin pereţii fisurii Q_d şi debitul ce tranzitează fisura Q_t (fig. 2)

$$Q_f = Q_d + Q_t. \tag{5}$$

Considerînd că în conductă este presiunea p_c, iar la capătul fisurii presiunea p_0, debitul Q_t se poate scrie sub forma

$$Q_t = 3{,}825\, d^{8/3} \sqrt{\frac{p_c^2 - p_0^2}{\Delta Z T L}}, \tag{6}$$

Δ este raportul dintre greutatea specifică a gazului şi aceea a aerului, iar Z factorul de abatere de la legea gazelor perfecte, T temperatura gazului, L fiind lungimea echivalentă fisurii, asimilînd-o pe aceasta cu o conductă.

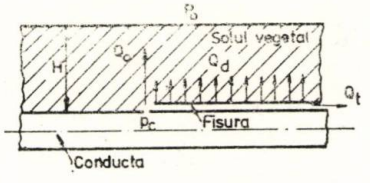


Fig. 2

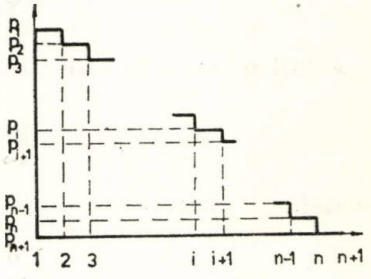


Fig. 3

Asupra debitului Q_d se pot efectua unele calcule. Astfel, dacă se împarte fisura în n tronsoane, fiecare dintre acestea avînd lungimea

$$l = L/n,$$

se poate scrie pentru tronsonul i, la capetele căruia sînt presiunile p_i şi p_{i+1}, relaţia

$$\frac{k\,b\,l}{\mu\, p_0\, H}(p_{i+1}^2 - p_0^2) \leqslant Q_{di} \leqslant \frac{k\,b\,l}{\mu\, p_0\, H_0}(p_i^2 - p_0^2), \tag{8}$$

Q_{di} este debitul ce se filtrează prin pereţii tronsonului de fisură i, k permeabilitatea solului, b lăţimea fisurii, H adîncimea de îngropare a conductei, μ viscozitatea gazelor.

Debitul filtrat prin pereții fisurii are mărimea

$$Q_d = \sum_{i=1}^{n} Q_{di}. \tag{9}$$

Pentru întreaga fisură se pot scrie inecuațiile

$$\frac{k\,b\,l}{\mu\,p_0\,H}(p_2^2 + p_3^2 + \dots p_{n+1}^2 - n\,p_0^2) \leqslant Q_d \leqslant \frac{k\,b\,l}{\mu\,p_0\,H}(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 - n\,p_0^2). \tag{10}$$

Dacă se are în vedere că $p_{n+1} = p_0$ și se introduc notațiile

$$Q_s = \frac{k\,b\,l}{\mu\,p_0\,H}(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 - np_0^2),\ Q_1 = \frac{k\,b\,l}{\mu\,p_0\,H}(p_1^2 - p_0^2),$$

inecuațiile (10) se mai scriu și sub forma

$$Q_s - Q_1 \leqslant Q_d \leqslant Q_s. \tag{11}$$

Pentru valori foarte mari ale lui n, l fiind mic în acest caz,

$$\lim_{n\to\infty} Q_1 = 0 \tag{12}$$

și în această situație

$$\lim_{n\to\infty} Q_d = Q_s, \tag{13}$$

Q_s este limita către care tinde Q_d pentru un număr mare de tronsoane ale fisurii. Tot pentru tronsonul i vitezele de filtrare la capetele acestuia v_i și v_{i+1} au mărimile

$$v_i = \frac{k}{\mu\,p_0\,H}(p_i^2 - p_0^2) \quad \text{și} \quad v_{i+1} = \frac{k}{\mu\,p_0\,H}(p_{i+1}^2 - p_0^2),$$

de unde se deduce relația dintre v_i și v_{i+1},

$$v_{i+1} = v_i - \frac{k}{\mu\,p_0\,H}(p_i^2 - p_{i+1}^2). \tag{14}$$

Relația obținută este asemănătoare cu aceea de la o fisură permeabilă pentru un fluid incompresibil [5]. Se poate scrie că pentru tronsonul i

debitul care se filtrează prin peretele fisurii Q_{di} are mărimea

$$Q_{di} = \frac{k\,b\,l}{\mu\,p_0\,H}(p_m^2 - p_0^2), \tag{15}$$

p_m fiind presiunea medie de pe acest tronson care se calculează cu relaţia

$$p_m = \frac{2}{3}\left(p_i + \frac{p_{i+1}^2}{p_i + p_{i+1}}\right). \tag{16}$$

Se pot scrie imediat inecuaţiile

$$\frac{4}{9}\left(p_i^2 + p_{i+1}^2 + \frac{p_{i+1}^4}{4\,p_i^2}\right) \leqslant p_m^2 \leqslant \frac{4}{9}\left(p_i^2 + p_i p_{i+1} + \frac{p_{i+1}^2}{4}\right). \tag{17}$$

Aceste inecuaţii au fost obţinute prin înlocuirea lui p_{i+1} cu p_i la numitorul fracţiilor din termenul care minorează pe p_m^2 şi prin înlocuirea lui p_i cu p_{i+1} de la numitorul fracţiilor la termenul ce majorează pe p_m^2.

Inecuaţiile (17) se pot scrie imediat sub forma

$$\frac{4}{9}\left(p_i + \frac{p_{i+1}^2}{2p_i}\right)^2 - p_0^2 \leqslant \frac{\mu\,p_0\,H}{k\,b\,l}\,Q_{di} \leqslant \frac{4}{9}\left(p_i + \frac{p_{i+1}^2}{2p_{i+1}}\right)^2 - p_0^2. \tag{18}$$

Debitul total care intră în fisură Q_f se scrie sub forma

$$Q_f = C\,d^{8/3}\sqrt{\frac{p_c^2 - p_0^2}{\Delta\,Z\,T\,L}}, \tag{19}$$

C fiind o constantă numerică mai mare decît 3,825 a cărei valoare se caută să fie delimitată prin acest calcul. Rezultă că Q_f se scrie în funcţie de Q_t sub forma

$$Q_f = \frac{C}{3{,}825}\,Q_t, \tag{20}$$

iar Q_{di} se poate scrie avînd în vedere şi relaţia (5),

$$Q_{di} = Q_{ti}\left(\frac{C}{3{,}825} - 1\right) = 3{,}825\;d^{8/3}\sqrt{\frac{p_i^2 - p_{i+1}^2}{\Delta\,Z\,T\,l}}\left(\frac{C}{3{,}825} - 1\right), \tag{21}$$

Q_{ti} fiind debitul tranzitat prin tronsonul i de fisură. Dacă se neglijează p_0^2 în ambii membri ai inecuaţiei (18) şi se admite că Q_{di} este proporţional doar cu p_m^2, se găseşte

$$\frac{4}{9}\left(p_i + \frac{p_{i+1}^2}{2p_i}\right)^2 \leqslant \frac{\mu\,p_0\,H}{k\,b\,l}\,Q_{di} \leqslant \frac{4}{9}\left(p_i + \frac{p_{i+1}^2}{2p_{i+1}}\right)^2. \tag{22}$$

Prin înlocuirea lui Q_{di}, dat de relația (21) și notînd cu $x = p_{i+1}^2/p_i^2$, inecuația (22) se scrie sub forma

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{4+4x+x^2}{\sqrt{1-x}} \leqslant \frac{E}{p_i} \leqslant \frac{1}{9}\cdot\frac{4+4\sqrt{x}+x}{\sqrt{1-x}} \tag{23}$$

sau, prin introducerea notațiilor F_1 și F_2, aceste ultime inecuații se scriu

$$F_1 \leqslant \frac{E}{p_i} \leqslant F_2, \tag{24}$$

unde s-a notat

$$E = 3{,}825\frac{d^{8/3}}{\sqrt{\Delta Z T l}}\frac{\mu p_0 H}{k b l}\left(\frac{C}{3{,}825}-1\right).$$

Cîteva valori ale lui F_1 și F_2 în funcție de x sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,95
F_1	0,4444	0,602	0,825	1,19	1,93	4,25
F_2	0,4444	0,730	0,990	1,37	2,07	4,42

Dacă se admite că pentru tronsonul de fisură analizat p_i este chiar p_c, iar p_{i+1}, p_0, aceasta înseamnă că pentru întreaga fisură se pot scrie relațiile

$$Q_d = 3{,}825 d^{8/3}\sqrt{\frac{p_c^2-p_0^2}{\Delta Z T L}}\left(\frac{C}{3{,}825}-1\right) \quad \text{și} \quad Q_t = 3{,}825 d^{8/3}\sqrt{\frac{p_c^2-p_0^2}{\Delta Z T L}}.$$

Rezultă că se pot scrie și inecuațiile

$$\frac{Q_d}{Q_t}F_{p_1}+1 \leqslant \frac{C}{3{,}825} \leqslant \frac{Q_d}{Q_t}F_{p_2}+1, \tag{25}$$

unde

$$F_{p_1} = F_1\sqrt{1-\frac{p_0^2}{p_c^2}}\left(1-\frac{p_0^2}{p_c^2}\right) \quad \text{și} \quad F_{p_2} = F_2\sqrt{1-\frac{p_0^2}{p_c^2}}\left(1-\frac{p_0^2}{p_c^2}\right).$$

În funcție de raportul p_0/p_c, în figura 4 se prezintă $\left(\frac{C}{3{,}825}-1\right)$ pentru $Q_d/Q_t = 0{,}75\,;\ 1\,;\ 1{,}25$, unde s-a considerat că media aritmetică între

F_{p_1} şi F_{p_2} poate înlocui coeficientul numeric care înmulţeşte pe Q_d/Q_t

$$\frac{C}{3{,}825} = 1 + \frac{Q_d}{Q_t} \cdot \frac{F_{p_1} + F_{p_2}}{2}. \tag{26}$$

Se observă că C este mai mare decît 3,825 şi această constantă creşte pe măsură ce se măreşte raportul Q_d/Q_t.

Dacă prin peretele fisurii nu se filtrează gaze, $Q_d = 0$ şi $C = 3{,}825$.

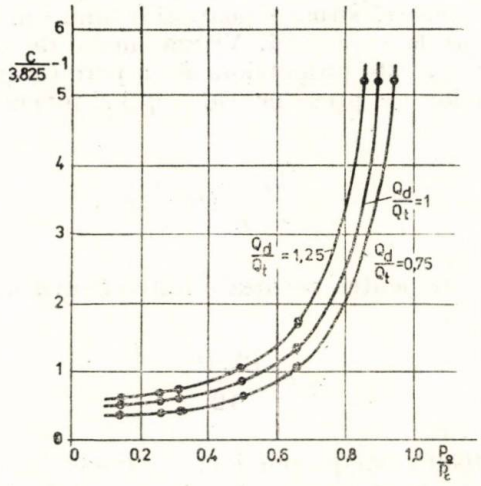


Fig. 4

Rezultatul obţinut este asemănător cu acela prezentat în lucrarea [4], unde s-a arătat că pentru un debit Q_d distribuit liniar pe o conductă şi un debit de tranzit Q_t, conducta este echivalentă din punct de vedere al egalităţii căderii de presiune cu aceea prin care se transportă debitul

$$(Q_t + 0{,}55\, Q_d).$$

Cu toate că acest rezultat a fost obţinut la o conductă pentru lichide, poate fi extins şi la o conductă de gaze cu debit distribuit continuu dacă coeficientul de rezistenţă este independent de regimul de curgere.

Relaţia obţinută (26) arată, în afara faptului că pentru raportul Q_d/Q_t = constant, mărimea lui C variază în funcţie de p_0/p_c, mai dovedeşte că debitul de gaze ce tranzitează fisura Q_t este proporţional, ca şi Q_d sau Q_f cu $(p_c^2 - p_0^2)$, ceea ce înseamnă că la creşterea acestui parametru ambele debite Q_t şi Q_d cresc. În lipsa acestui calcul este posibil de scris Q_t ca diferenţă între debitul scurs prin fisură şi acela filtrat prin pereţii acesteia sub forma

$$Q_t = A\sqrt{p_c^2 - p_0^2} - B(p_c^2 - p_0^2), \tag{27}$$

A și B fiind două constante ușor de identificat. Q_t, scris astfel, prezintă un maxim la $p_c^2 - p_0^2 = \frac{A^2}{4B^2}$ și este nul atît pentru $p_c^2 - p_0^2 = 0$, cît și la $p_c^2 - p_0^2 = A^2/B^2$, această ultimă concluzie dovedindu-se eronată în practica de șantier unde s-a constatat că la creșterea presiunii la capetele unei fisuri sau conducte debitul se mărește. Și teoretic s-a arătat că la creșterea presiunii din interiorul unui rezervor debitul de gaze se mărește sau cel mult rămîne la o valoare constantă atît timp cît viteza de scurgere a gazelor este apropiată de viteza sunetului în mediul respectiv [1]. În ipoteza în care solul este impermeabil întreaga cantitate de gaze se scurge prin fisura formată. Această situație poate fi întîlnită în cazul în care solul este complet înghețat la suprafață. Viteza medie de scurgere a gazelor prin fisura formată, v_m, este proporțională cu permeabilitatea fisurii k_f și cu diferența pătratelor de presiune $(p_c^2 - p_0^2)$ și invers proporțională cu lungimea fisurii,

$$v_m = \frac{k_f}{\mu\, p_0\, L}(p_c^2 - p_0^2). \tag{28}$$

În ipoteza că se admite pentru permeabilitatea fisurii de deschidere $(2w)$ relația [2]

$$k_f = \frac{(2w)^2}{12}, \tag{29}$$

debitul filtrat prin fisură este proporțional cu $(2w)^3$. În raport cu lungimea L a fisurii se observă că numai la valori foarte mari ale acesteia debitul de scurgere devine neglijabil. Cu cît orificiul format este mai apropiat de un imobil cu atît debitul care se canalizează prin fisură este mai mare.

3. GAZELE INFILTRATE DIRECT ÎN SOLUL VEGETAL

În ipoteza că solul vegetal de deasupra orificiului este permeabil, o parte din gazele ieșite din orificiu sînt infiltrate direct la suprafață. Dacă se consideră un element de arie $r\,dr\,d\theta$ (fig. 5), viteza medie de filtrare prin centrul elementului de suprafață ales este

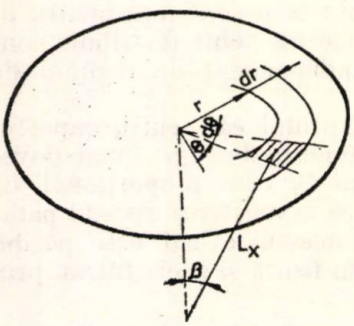


Fig. 5

$$v = \frac{k}{\mu\, p_0\, L_x}(p_c^2 - p_0^2). \tag{30}$$

Prin înlocuirea lui L_x cu $H/\cos\beta$ și avînd în vedere că suprafața solului formează tot un unghi β cu direcția de mișcare a gazelor, rezultă că debitul elementar ce traversează elementul de arie este

$$dQ_0 = v\, r \cos\beta\, dr\, d\theta. \tag{31}$$

Înlocuind pe L_x^2 din triunghiul dreptunghic format,

$$L_x^2 = H^2 + r^2,$$

rezultă debitul scurs prin coroana circulară cu razele R_1 și R_2

$$Q_0 = \pi \frac{kH}{\mu p_0} (p_c^2 - p_0^2) \int_{R_1}^{R_2} \frac{2r\mathrm{d}r}{H^2 + r^2} = \pi \frac{kH}{\mu p_0} (p_c^2 - p_0^2) \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (32)$$

Prin introducerea vitezei medii de filtrare din punctul situat pe sol deasupra orificiului,

$$v_0 = \frac{k}{\mu p_0 H} (p_c^2 - p_0^2) \quad (33)$$

rezultă că

$$\lim_{\substack{R_2 \to 0 \\ R_1 = 0}} \frac{Q_0}{\pi R_2^2} = v_0 \quad (34)$$

și din acesta se deduce

$$\lim_{\substack{R_2 \to 0 \\ R_1 = 0}} \frac{H^2}{R_2^2} \ln \frac{R_2}{R_1} = 1. \quad (35)$$

Se poate găsi modul cum variază viteza de filtrare în lungul razei scriind

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{d}Q_0}{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta} = v \cos \beta = \frac{k H}{\mu p_0 L_x^2} (p_c^2 - p_0^2). \quad (36)$$

Prin înlocuirea lui L_x și având în vedere expresia lui v_0, se obține

$$w = v_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{H}\right)^2}, \quad (37)$$

w fiind viteza de filtrare normală la suprafața solului. În funcție de raportul r/H se prezintă w/v_0 în tabelul 2.

Tabelul 2

$\frac{r}{H}$	0	0,5	1	2	5	10	20	50
$\frac{w}{v_0}$	1	0,8	0,5	0,2	0,0386	0,099	0,0024	0,000399

Se constată că pe măsură ce se măreşte raza r, viteza de filtrare scade. La conductele îngropate mai adînc împrăştierea gazelor este mai mare decît la conductele care sînt mai la suprafaţa solului.

Raza R la care raportul $w/v_0 \leqslant \varepsilon$ se poate calcula cu relaţia

$$R \geqslant H \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}, \tag{38}$$

ε fiind un număr real pozitiv suficient de mic ales. Pentru cîteva valori ale lui ε se prezintă în tabelul 3 mărimile raportului R/H care satisfac relaţia (38).

Tabelul 3

ε	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
R/H	2	3	4,3588	7	9,9498	31,6069

La distanţe mari măsurate la suprafaţa solului de la punctul situat deasupra orificiului vitezele de filtrare ale gazelor scad proporţional cu pătratul vitezei.

4. GAZELE INFILTRATE ÎNTR-UN IMOBIL CU BAZA PERMEABILĂ

Se poate considera că suprafeţele celor două baze, aceea de mărime πR^2 situată pe suprafaţa solului şi a orificiului care poate fi considerată punctiformă în raport cu prima, formează împreună cu generatoarele, care sînt liniile de curent ale mişcării, un con de scurgere al gazelor prin solul vegetal. Este posibil ca un imobil sau mai multe să intersecteze conul de scurgere al gazelor. Dacă imobilul are baza permeabilă, concentraţia gazelor pătrunse în imobil creşte în timp; cele mai apropiate imobile sînt cele mai expuse la infiltraţii mari de gaze. La un imobil cu baza permeabilă aşezat mai excentric pe conul de scurgere al gazelor concentraţia în gaze creşte mai lent în timp. Se poate alege faţă de conducta de distribuţie un sistem de referinţă cu originea în punctul unde este situat orificiul şi axa Ox în lungul conductei (fig. 6).

Faţă de acest sistem de referinţă, cele patru colţuri ale imobilului sau ale încăperii au coordonatele (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) şi (x_4, y_4). Deşi poziţia orificiului nu este cunoscută, coordonatele y_1, y_2, y_3 şi y_4 se pot stabili cu precizie. Cunoscînd concentraţia din imobil sau modul cum variază în timp, se poate determina analitic poziţia orificiului faţă de imobil. În acest scop, dacă se admite că viteza în centrul imobilului (x_m, y_m) este egală cu viteza medie de infiltrare prin imobil are mărimea

$$v_0 \frac{1}{1 + \frac{x_m^2 + y_m^2}{H^2}}, \tag{39}$$

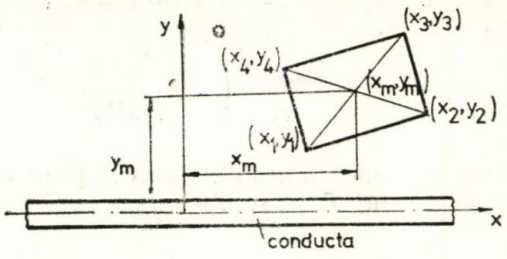


Fig. 6

x_m și y_m fiind coordonatele centrului imobilului

$$x_m = \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{4} \qquad y_m = \sum_{i=1}^{4} \frac{y_i}{4}.$$

În intervalul de timp T prin aria A a imobilului se scurge volumul de gaze

$$v_0 \frac{1}{1 + \frac{x_m^2 + y_m^2}{H^2}} \cdot A \cdot T \tag{40}$$

și dacă se egalează acesta cu volumul de gaze existent în imobil $C_m \cdot A \cdot I$ se găsește

$$x_m = \pm \sqrt{\frac{v_0 H^2 T}{C_m I} - H^2 - y_m^2}, \tag{41}$$

C_m fiind concentrația medie a gazelor din imobil, iar I înălțimea acestuia. Apar două valori pentru x_m deoarece pe conductă pot exista două puncte situate de o parte și de alta a imobilului a căror distanțe de la centrul imobilului la conductă sînt egale. Repetarea operației la un alt imobil poate da indicații sigure asupra locului unde s-a format orificiul. Dacă se constată că $C_m = 0$, se deduce că orificiul format este foarte depărtat de imobil.

5. NORMAREA ȘTIINȚIFICĂ A UNOR ACTIVITĂȚI DE CONTROL DIN DISTRIBUȚIA GAZELOR

Controlul scăpărilor de gaze care se efectuează la intervale de cel mult 72 ore și la canalizații subterane situate la distanțe de pînă la 3 m față de conducta de gaze [8] nu au un temei științific.

Cu relația obținută (41) se poate deduce și timpul maxim la care trebuie efectuat controlul scăpărilor de gaze pentru ca în căminele de gaze să se acumuleze o concentrație de gaze detectabilă de către detescop. Pentru o anumită concentrație C_{max} prin același raționament ca acela care a

condus la obținerea relației (41) se găsește timpul T_{max} necesar să se ajungă la această valoare,

$$T_{max} = \frac{C_{max} \cdot I}{v_0} \left(1 + \frac{r^2}{H^2} \right), \tag{42}$$

r fiind luat acum egal cu semidistanța dintre două puncte de control. Dacă se înlocuiește v_0 în relația lui T_{max}, se obține

$$T_{max} = \frac{C_{max} \cdot I}{k(p_c^2 - p_0^2)} \mu p_0 H \left(1 + \frac{L^2}{4H^2} \right). \tag{43}$$

Se observă că acest timp maxim necesar pentru efectuarea controlului depinde, așa cum era de așteptat, de concentrația maximă detectabilă C_{max}, de caracteristicile solului și gazului (k, μ), de distanța dintre punctele de control (L), de adîncimea de pozare a conductei (H) și de regimul de presiune din conductă ($p_c^2 - p_0^2$). În privința acestui parametru se observă că sînt necesare controale mai dese la conductele cu presiunea din conductă mai mare. Același lucru ar trebui efectuat la solurile cu permeabilități mari. Pentru o mai mare siguranță a timpului obținut cu formula (43) ar trebui introdus $L = 0$, ceea ce ar înseamna că orificiul este foarte apropiat de punctul de control.

De exemplu, pentru o concentrație maximă de 5% un sol cu permeabilitatea $k = 3{,}5$ Darcy, adîncimea de îngropare a conductei $H = 1{,}0$ m, $p_s = 4{,}5$ daN/cm² și $L = 0$, rezultă valoarea intervalului maxim de timp în care trebuie efectuat controlul

$$T_{max} = 1{,}55 \times 10^5 \text{ secunde} = 1{,}78 \text{ zile}.$$

Este bine ca în calcul, pentru a stabili timpul maxim de control, să se aleagă situația cea mai defavorabilă (presiunile cele mai mari din conductă, permeabilitatea solului cea mai mare și concentrația cea mai mică).

Toate calculele efectuate mai înainte au avut la bază faptul că mișcarea este staționară. Așa cum s-a stabilit într-o altă lucrare [7] durata cît se consideră mișcarea nestaționară față de timpul de la formarea orificiului, este nesemnificativă.

6. CONCLUZII

În lucrare se arată că prezența unei fisuri în apropierea unei conducte face ca prin aceasta să se scurgă un debit de gaze către imobil. Debitul scurs se mărește dacă presiunea din conductă crește. Debitul de gaze scurs direct în sol este proporțional tot cu diferența ($p_c^2 - p_0^2$). La nivelul solului viteza de ieșire a gazelor are cea mai mare valoare, chiar deasupra orificiului format și scade proporțional cu pătratul razei măsurate de la punctul situat pe suprafața solului, deasupra orificiului către exterior. Gazele ieșite dintr-un orificiu sînt împrăștiate mai mult la conductele mai adînci

și acolo unde solurile sînt mai puțin permeabile. Pe baza relației debitului infiltrat de gaze se poate stabili, cunoscîndu-se concentrațiile pătrunse într-o perioadă de timp în două imobile apropiate, punctul pe conductă unde s-a format orificiul. Tot din relația de calcul a debitului de gaze infiltrat se poate stabili științific normarea unor activități de control și verificare din distribuția gazelor stabilite, deocamdată, pe cale empirică.

Primită la redacție la 12 noiembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. I. CREȚU, *Hidraulica generală și subterană*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971, p. 352—353.
2. GR. IOACHIM, *Extracția petrolului și gazelor*, Edit. tehnică, București, 1965, p. 504—505.
3. D. NEEDHAM, M. HOWE, *Why pipes fails*, Comunication 1103 the45 th Autumn Meeting London, November, 1979.
4. T. OROVEANU, *Hidraulica și transportul produselor petroliere*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1966, p. 215—216, 244—249.
5. T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Mișcarea lentă a unui fluid incompresibil printr-o fisură permeabilă*, St. cerc. mec. apl., **37**, *1*, 33—44 (1978).
6. T. OROVEANU, AL. D. STAN, *Exploatarea unui zăcămînt fisurat la presiuni diferențiale mari*, St. cerc. mec., apl., **37**, *2*, 191—198 (1978).
7. AL. D. STAN, S. POPOVICIU, *Infiltrațiile gazeifere în imobile generate de defecțiunile conductelor*, St. cerc. mec. apl., **39**, *2* (1981).
8. * * * *Normativ pentru proiectarea și executarea rețelelor și instalațiilor de utilizare a gazelor naturale, I. 1976*, p. 141—142.

CALCULUL FUNDAȚIILOR PE COLOANE ÎN DOMENIUL NELINIAR ELASTIC

de G. ONU
Institutul de proiectări transporturi. auto, navale și aeriene

Se prezintă un procedeu de calcul neliniar elastic, cu trepte de încărcare neegale, pentru analiza radierelor pe coloane fundate în terenuri neomogene. Modelarea terenului de fundație se realizează cu ajutorul unor elemente finite cu cîte patru grade de libertate. Rigiditățile acestor elemente sînt determinate în funcție de răspunsul neliniar al terenului la solicitare. Doi parametri, liniar variabili pe grosimea fiecărui strat, condensează proprietățile terenului.
Pe baza procedeului prezentat, a fost întocmit un program pentru calculul radierelor fundate pe coloane, program utilizat în mod curent în cadrul IPTANA.

1. INTRODUCERE

Fundațiile pe coloane ale unor structuri cum sînt podurile, cheurile, platformele de foraj marin, turnurile de telecomunicații, sînt proiectate astfel încît să preia și să transfere terenului sarcini orizontale importante, fără ca deplasările structurii să depășească anumite limite. Pentru aceasta, de regulă, se prevăd piloți înclinați sau/și piloți cu rigiditate sporită la încovoiere, capabili să transmită încărcarea la teren prin presiune laterală. Transferul lateral al încărcării are loc în cadrul unui proces de interacțiune, proces guvernat de relații neliniare între deplasările coloanelor și reacțiunile terenului de fundație.

Metodele de calcul utilizate la analiza fundațiilor pe coloane pot fi grupate astfel:

— Metoda elementelor finite,
— Metoda factorilor de interacțiune,
— Metoda elementelor de contur,
— Metoda coeficienților de fundație.

Cele mai bune rezultate se obțin cu ajutorul metodei elementelor finite. Printr-o discretizare corespunzătoare a radierului, coloanelor și terenului de fundație, și prin utilizarea unor elemente finite adecvate, pot fi introduși în calcul factorii principali care condiționează interacțiunea. Se poate admite o variație oarecare a proprietăților solului, funcție de adîncime sau de stratificație, și, de asemenea, o dispunere arbitrară a coloanelor în cadrul fundației. În plus, pot fi luate în considerație și unele aspecte practice ale conlucrării piloților în grup, cum ar fi modificarea proprietăților pămîntului în urma punerii în operă a piloților, sau efectul de interfață [2], [7]. Pe de altă parte, metoda are inconvenientul de a fi scumpă. Dacă se efectuează o analiză neliniară, consumul de timp la calculator

ST. CERC MEC. APL., TOM 40, NR. 5, 1980, P. 697—714

crește într-o semenea măsură încît, din punctul de vedere al proiectării curente, costul soluției devine inacceptabil.

O abordare mai economică, care poate fi încadrată în metoda generală a elementelor finite, folosește un procedeu semianalitic de separare a variabilelor [6]. Adaptare a metodei prismelor finite [36] la specificul fundațiilor de adîncime, procedeul nu poate fi utilizat decît în cazul fundațiilor cu piloți verticali.

Metoda factorilor de interacțiune [23], [4], [20] se bazează pe ipoteza că piloții conlucrează în interiorul unui semispațiu elastic. Interacțiunea sol-pilot și conlucrarea între piloți prin intermediul terenului de fundație se determină cu ajutorul soluției date de Mindlin pentru o sarcină punctuală care acționează în interiorul unui semispațiu elastic și omogen. Pentru fundațiile în terenuri elastice neomogene, în (24), se propune folosirea unor moduli de deformație medii, indexați în funcție de coordonatele punctului în care acționează forța și ale punctului în care se determină efectul forței.

Metoda elementelor de contur îmbină avantajul utilizării unor ecuații integrale pentru a determina deplasările și eforturile din interiorul unui domeniu omogen dat, cu avantajul utilizării elementelor finite pentru a descrie condițiile de contur. Calculul radierelor pe coloane fundate în terenuri neomogene este tratat în [3]. Aici se consideră că stratele de teren și coloanele constitue domenii omogene distincte, interconectate prin elemente finite de interfață. În acest fel, în comparație cu metoda elementelor finite, se obține o reducere a eforturilor de calcul deoarece, nu întregul ansamblu, ci numai interfețele domeniilor trebuie discretizate.

Principala obiecție adusă metodelor care utilizează ecuații integrale vizează domeniul de aplicabilitate relativ restrîns al acestora, limitat la stadiul de comportare liniar elastică a pămînturilor. Mai mult, cu ajutorul acestor metode nu se poate evidenția reacțiunea diferențiată cu care acționează terenul asupra piloților în grup, mai puternică asupra piloților din față, în sensul mișcării, și mai redusă asupra celor din spate [9]. Faptul că pămînturile, în general, nu pot prelua eforturi de întindere, nu poate fi luat în considerație decît în mod aproximativ [23]. Or, potrivit teoriei lui Mindlin, în procesul de interacțiune, transferul de încărcare se realizează prin introducerea unor eforturi de întindere importante, în vecinătatea punctului de aplicație a sarcinei, eforturi pe care însă pămînturile nu sînt capabile să le preia. Pe de altă parte, concentrarea locală a eforturilor, în vecinătatea punctului de aplicație a sarcinei, furnizează argumente în favoarea metodei coeficienților de fundație [20].

Bazată pe ipoteza lui Winkler și avînd un caracter semiempiric, metoda coeficienților de fundație continuă să fie principalul instrument teoretic utilizat în proiectare. Faptul se datorește simplității metodei, experienței acumulate în folosirea ei și, mai cu seamă, evoluției tehnicilor experimentale de determinare a parametrilor de calcul ai terenului [11].

Metoda coeficienților de fundație este utilizată în variante de calcul diferite, variante care furnizează fie soluții analitice fie soluții numerice. Din prima categorie se amintesc soluțiile închise folosite în [30], [14], [25], [26], [29], [22], [28], [32], [31], pe baza ipotezei unei variații continue a proprietăților terenului, iar din a doua, cele utilizate în [15], [25],

[12], [17], [21], [16], [27], [11], fără a se impune vreo restricție acestei variații.

Deși în modelul lui Winkler mediul de rezemare este caracterizat printr-un singur parametru, soluția grinzii pe mediu elastic nu diferă substanțial de cea care presupune un mediu de rezemare continuu, elastic și izotrop [34]. Pe de altă parte, după [8], [5], [19], caracterizarea mediului suport cu ajutorul mai multor parametri conduce la o îmbunătățire însemnată a soluției, în sensul teoriei elasticității.

În continuare, tratînd aspectul static al problemei, se prezintă un procedeu pentru calculul fundațiilor pe coloane, solicitate, în principal, de sarcini orizontale. Terenul de fundație este considerat un mediu neomogen, neliniar elastic. Pentru o anumită treaptă de încărcare, proprietățile solului pot fi caracterizate prin doi parametri care variază liniar pe grosimea fiecărui strat de teren. Terenul de fundație este modelat cu ajutorul unor elemente finite cu patru grade de libertate, elemente care pot fi utilizate atît în calculul liniar, cît și în calculul neliniar elastic.

Procedeul prezentat se încadrează în metoda generală a coeficienților de fundație.

2. INTERACȚIUNEA SOL-COLOANĂ

În problema conlucrării piloților activi cu terenul de fundație pot exista trei surse de neliniaritate:

— neliniaritate reologică, avînd drept principală cauză comportarea neliniară a pămînturilor;

— neliniaritatea geometrică, consecință a existenței unor forțe de compresiune mari în pilot, simultan cu forțe deviatoare însemnate;

— neliniaritate de solicitare, datorită apariției unor presiuni de natura împingerii active, presiuni care se nasc și se modifică pe măsură ce se anulează presiunile de repaus din jurul pilotului.

În cele ce urmează este examinat numai primul aspect al problemei, neliniaritatea reologică, ceea ce permite scrierea ecuațiilor de echilibru static în raport cu poziția nedeformată a fundației. În plus, se admite că fundația constituie un sistem conservativ în care coloanele și, eventual, radierul se comportă liniar elastic.

Răspunsul terenului. O coloană abia introdusă în teren se găsește în echilibru sub acțiunea presiunilor din starea de repaus a pămîntului (fig. 1). Încărcarea exterioară deformează coloana, aceasta deplasîndu-se

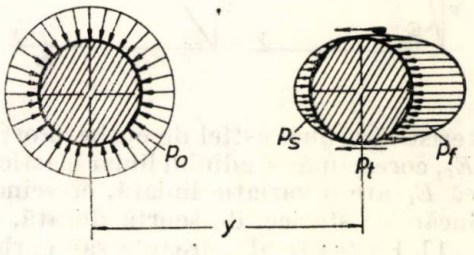


Fig. 1. — Distribuția presiunilor în jurul coloanei, înainte și după aplicarea încărcării exterioare.

într-o poziție vecină în care echilibrul este menținut printr-o redistribuire a presiunilor din jur. Presiunile capătă caracter de reacțiuni. Lateral iau naștere reacțiuni tangențiale care contribuie de asemenea la menținerea coloanei în noua poziție de echilibru. Rezultanta reacțiunilor normale și tangențiale, pe unitatea de lungime, raportată la diametru, este definită drept reacțiune globală a terenului [1].

Pe baza ipotezei lui Winkler, reacțiunea globală a terenului într-o anumită secțiune se consideră a fi independentă de mărimea deplasărilor altor secțiuni decît cea considerată :

$$p = E_s y. \tag{1}$$

Dacă pe lîngă presiuni se admite că terenul răspunde și prin momente distribuite, consecință a mobilizării capacității acestuia de a rezista la forfecare transversală, se poate introduce în calcul un al doilea parametru [5] :

$$m = G_s y'. \tag{2}$$

Relația (2) exprimă legătura existentă între momentele de răspuns ale terenului și derivata săgeții coloanei în secțiunea dată. În fapt prin ecuația (2) se introduce și interacțiunea care există între presiunile terenului din secțiunea considerată și deplasările secțiunilor imediat vecine [1].

Parametrii E_s și G_s pot fi determinați teoretic pe baza constantelor elastice ale unui mediu continuu elastic și omogen [8]. Pe de altă parte, proprietățile terenului sînt vîscoelastice [33], variază în funcție de adîncime și stratificație, modul de instalare, geometria fundației, periodicitatea și durata acțiunii sarcinei influențînd de asemenea răspunsul terenului. În aceste condiții o soluție teoretică nu poate fi obținută, practic, conlucrarea sol-coloană fiind introdusă în calcul prin intermediul curbelor de interacțiune p-y determinate experimental și desconsiderînd aportul lui G_s.

Curbele de interacțiune. Teoretic, fiecare secțiune a pilotului are proprie sa curbă de interacțiune. În figura 2 *a* este reprezentată forma caracteristică a unei astfel de curbe. Porțiunea inițială, rectilinie, avînd panta E_i, corespunde stadiului liniar elastic de comportare a terenului. Se admite că E_i are o variație liniară, crescînd proporțional cu adîncimea. Pentru încărcări statice, de scurtă durată, E_i poate fi determinat în laborator [11]. Partea finală, dreaptă sau curbilinie, marcată de atingerea presiunii

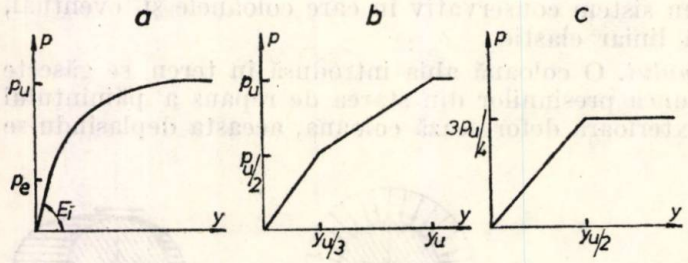


Fig. 2. — Curbe de interacțiune.

limită p_u, corespunde stadiului ultim, de cedare a terenului de fundație. Nu se dispune de o teorie riguroasă pentru determinarea presiunii limită. Soluțiile disponibile admit că în apropiere de suprafața terenului, cedarea are loc prin formarea unei pene tridimensionale, de natura împingerii pasive, iar în profunzime, sub așa-numita adîncime critică, cedarea se produce prin plastifierea locală a terenului.

Zona intermediară a curbei de interacțiune, constituită dintr-o succesiune de drepte sau arce de parabolă, caracteristică fiecărui tip de teren, corespunde stadiului neliniar elastic de comportare a terenului. Stările limită intermediare din procesul de interacțiune, adică, deslipirea terenului din spatele coloanei și învingerea frecării laterale, sînt uneori marcate prin schimbări bruște de pantă.

Recomandări referitoare la modul în care se pot determina curbele de interacțiune p-y sînt date în [15]. [25], [11]. O metodă de calcul a curbei de interacțiune corespunzătoare secțiunii de la capitolul coloanei este propusă în [12].

Utilizarea curbelor de interacțiune în proiectarea curentă prezintă anumite inconveniente din punctul de vedere al calculului, făcîndu-l mai laborios. Din acest motiv, în situațiile în care deplasările suprastructurii sînt necesar mici, se recurge la o liniarizare a curbei p-y, efectuîndu-se un calcul liniar elastic. Astfel în [26], [29], [17], [18], [27], [22] se folosește parametrul m care definește variația coeficientului de pat în funcție de adîncime. Acest parametru, determinat experimental, constitue echivalentul modulului reacțiunii laterale E_s, aferent unei deplasări unitare la suprafața terenului. Valorile minime ale parametrului m, corespunzătoare diferitelor categorii de terenuri, se găsesc întabulate [26], [29], [22], [28]. În cazul suprastructurilor static nedeterminate, încastrate elastic în fundații pe coloane, m trebuie folosit cu o anumită precauțiune, deoarece valorile minime ale acestui parametru nu conduc întotdeauna la rezultate acoperitoare [19].

Pentru cazurile în care liniarizarea curbei de interacțiune nu poate fi admisă, Menard (vezi [1]), propune utilizarea unei diagrame p-y triliniare (fig. 2 *b*). O diagramă p-y mai simplă, caracteristică pentru un mediu de rezemare ideal elasto-plastic, este cea recomandată în [9] (fig. 2*c*).

În procedeul de calcul prezentat aici, curbele de interacțiune se consideră alcătuite dintr-un număr arbitrar de segmente de dreaptă și palierul corespunzător presiunii limită.

3. ELEMENT FINIT AL TERENULUI DE FUNDAȚIE

În figura 3*a* este reprezentată o coloană încastrată în teren, discretizată în elemente finite. Pentru fiecare element, două curbe de interacțiune, p-y și m-y', vor reprezenta legea de variație a celor doi parametri E_s și G_s.

Energia de deformație înmagazinată în elementul de fundație, i-j (fig. 3*b*), luînd în considerație numai contribuția terenului, se calculează cu expresia

$$\overline{U}_f = 0{,}5 \int_0^L (W^T E_s W + W'^T G_s W') \, dx, \qquad (3)$$

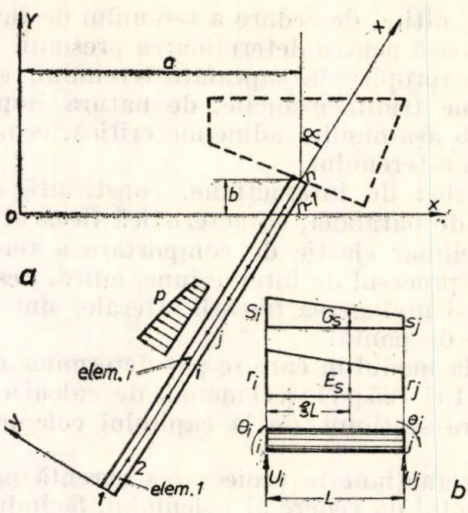


Fig. 3. — Discretizarea coloanei: *a*) numerotarea nodurilor și elementelor finite; *b*) variația parametrilor E_s și G_s în lungul unui element finit.

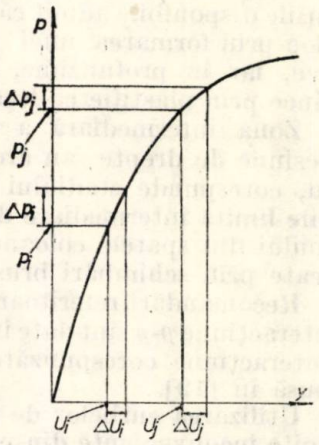


Fig. 4. — Discretizarea curbei de interacțiune.

în care $W' = \mathrm{d}W/\mathrm{d}x$, iar W, polinom complet de gradul trei, reprezintă funcția-deplasare standard a elementului de grindă încovoiată. Se admite că între noduri, modulul reacțiunii laterale și modulul forfecării transversale, variază liniar (fig. 3b):

$$E_s = r_i + (r_j - r_i)\,\xi, \tag{4}$$

$$G_s = s_i + (s_j - s_i)\,\xi. \tag{5}$$

A fost folosită notația $\xi = x/L$, iar r_i, r_j, s_i și s_j reprezintă parametrii terenului exprimați în funcție de deplasările nodurilor i și j, adiacente elementului finit.

Derivata energiei de deformație cu privire la gradele de libertate ale elementului finit furnizează matricea de rigiditate (13):

$$\frac{\partial \overline{U}_f}{\partial D} = K_f\, D. \tag{6}$$

Dacă relațiile (1) și (2) sînt liniare, K_f, din (6), este independentă de deplasările D și reprezintă matricea de rigiditate convențională. În caz contrar, K_f este funcție de deplasările nodurilor elementului și se definește drept matrice de rigiditate secantă a elementului finit de teren.

Matricea de rigiditate convențională. Dacă deplasările structurii sînt suficient de mici ca să se poată folosi forma linarizată a curbelor de interac-

țiune, elementele matricei de rigiditate, care guvernează comportarea elementului de teren, se determină astfel:

$$\frac{\partial^2 \overline{U}_f}{\partial D_i \partial D_k} = k_{ik} = k_{ki}. \tag{7}$$

Matricea de rigiditate convențională este dată de (8), în care parametrii r_i, r_j, s_i, s_j, au caracter de constante.

$$\begin{aligned}
k_{11} &= (240\, r_i + 72\, r_j)\, L^2 + (504\, s_i + 504\, s_j),\\
k_{12} &= (-30\, r_i - 14\, r_j)\, L^3 - 84\, s_j\, L,\\
k_{13} &= (54\, r_i + 54\, r_j)\, L^2 + (504\, s_i + 504\, s_j),\\
k_{14} &= (14\, r_i + 12\, r_j)\, L^3 - 84\, s_i\, L,\\
k_{22} &= (5\, r_i + 3\, r_j)\, L^4 + (84\, s_i + 28\, s_j)\, L^2,\\
k_{23} &= (-12\, r_i - 14\, r_j)\, L^3 + 84\, s_j\, L,\\
k_{24} &= (-3 r_i - 3\, r_j)\, L^4 - (14\, s_i + 14\, s_j)\, L^2,\\
k_{33} &= (72\, r_i + 240\, r_j)\, L^2 + (504\, s_i + 540\, s_j),\\
k_{34} &= (14\, r_i + 30\, r_j)\, L^3 + 84\, s_i\, L,\\
k_{44} &= (3\, r_i + 5\, r_j)\, L^4 + (28\, s_i + 84\, s_j)\, L^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

Toate elementele matricei de rigiditate trebuie împărțite la 420 L, L fiind lungimea elementului finit.

Direcțiile gradelor de libertate 1, 2, 3 și 4 din (8) reprezintă direcțiile deplasărilor u_i, θ_i, u_j și, respectiv, θ_j din figura 3*b*. Dacă momentele reacțiuni sînt ignorate, parametrii r_i și r_j reprezintă modulii reacțiunii laterale corespunzători adîncimii la care se găsesc nodurile i și j.

Matricea de rigiditate secantă. De regulă, curbele de interacțiune nu pot fi descrise printr-o singură ecuație. După cum s-a arătat, acestea se prezintă ca o succesiune de segmente de dreaptă sau arce de parabolă, racordate între ele. Din acest motiv nu se poate determina, sub formă închisă, o matrice de rigiditate secantă, valabilă pentru întregul interval de încărcare a coloanei. În această situație, în calcul, se recurge la discretizarea curbelor de interacțiune.

Se admite că, ajunși într-un anumit stadiu al calculului iterativ, se cunosc deplasările tuturor nodurilor coloanei. Cu referire la figura 4,

în care este reprezentată curba p-y a elementului i-j, modulii reacțiunii laterale secante, corespunzători nodurilor i și j, sînt :

$$r_i = p_i/u_i, \quad r_j = p_j/u_j. \tag{9}$$

Între noduri, modulul reacțiunii laterale secante variază liniar și se calculează cu ecuația (4).

În mod similar, folosind (5), se determină modulii forfecării transversale secante, utilizînd pentru aceasta curba de interacțiune m-y', presupusă a fi cunoscută :

$$s_i = m_i/\theta_i, \quad s_j = m_j/\theta_j, \tag{10}$$

Matricea de rigiditate secantă este dată de (8), în care se introduc valorile r_i, r_j, s_i și s_j calculate cu (9) și (10).

Matricea de rigiditate tangentă. Cu referire la o soluționare pas cu pas, se admite că se cunosc deplasările coloanei înainte și după ce se aplică o nouă creștere ΔQ a încărcării exterioare. Modulii reacțiunii laterale tangente pentru nodurile i și j, se calculează cu relațiile (11) (fig. 4),

$$r_i = \Delta p_i/\Delta u_i, \quad r_j = \Delta p_j/\Delta u_j. \tag{11}$$

Între noduri, modulul reacțiunii laterale tangente se determină cu (4), în care se introduc valorile calculate anterior, (11). Modulul forfecării transversale tangente se determină cu (5), în care se introduc valorile s_i și s_j date de relațiile

$$s_i = \Delta m_i/\Delta\theta_i, \quad s_j = \Delta m_j/\Delta\theta_j. \tag{12}$$

Matricea de rigiditate tangentă este dată de relațiile (8), (11) și (12).

4. RIGIDITĂȚILE FUNDAȚIEI PE COLOANE

Matricea de rigiditate a unui element finit de coloană, în interacțiune cu terenul de fundație, se calculează astfel :

$$K_e = K_g + K_f, \tag{13}$$

K_g reprezintă matricea standard a unui element de grindă încovoiată, iar K_f este matricea de rigiditate convențională, secantă sau tangentă, a elementului finit de teren (8).

Rigiditățile coloanei. Matricea de rigiditate a întregii coloane se determină prin sumare directă [13];

$$K = \Sigma K_e. \tag{14}$$

Fiind cunoscută matricea K, se pot scrie condițiile de echilibru ale forțelor care acționează la nodurile coloanei:

$$KZ = Q. \tag{15}$$

În (15), Z este vectorul gradelor de libertate, iar Q, vectorul forțelor exterioare aplicate la noduri.

Dacă asamblarea matricei de rigiditate a fundației se face folosind tehnica substructurilor, este necesar să se exprime rigiditățile coloanelor în raport cu gradele de libertate de interfață. Pentru aceasta, se rescrie (15) sub forma:

$$\begin{vmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{ss} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_i \\ Z_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_i \\ Q_s \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Cu referire la numerotarea nodurilor coloanei din figura 3*a*, Z_s reprezintă vectorul gradelor de libertate de interfață, iar Z_i, vectorul deplasărilor nodurilor 1, 2, 3, ... $n-1$. Semnificația celorlalte elemente din (16) rezultă prin particularizare.

Eliminînd în (16) vectorul Z_i, se obține forma redusă a sistemului de ecuații (15):

$$(K_{ss} - K_{si} K_{ii}^{-1} Z_{is}) Z_s = (Q_s - K_{si} K_{ii}^{-1} Q_i). \tag{17}$$

În membrul drept din (17) se află vectorul redus al încărcărilor, Q_r, iar în membrul stîng, între paranteze, matricea de rigiditate redusă a coloanei, K_r.

Determinarea matricei K_r și a vectorului Q_r pe această cale, implică inversarea submatricei K_{ii}, ceea ce constituie un impediment important în cazul calculelor repetitive. Mult mai avantajoasă este procedura de condensare statică propusă de Wilson [35], potrivit căreia sistemul de ecuații (16) se poate înlocui cu un sistem echivalent, în care ecuațiile aferente deplasărilor de interfață sînt decuplate de restul ecuațiilor:

$$\begin{vmatrix} \bar{K}_{ii} & \bar{K}_{is} \\ 0 & \bar{K}_{ss} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_i \\ Z_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{Q}_i \\ \bar{Q}_s \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Dacă numerotarea nodurilor coloanei se face după modelul din figura 3*a*, sistemul echivalent (18) se obține ca o fază intermediară în procesul de substituție directă al algoritmului Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. Această fază corespunde stadiului în care a fost încheiată

triangularizarea submatricei K_{ii}, situație în care $\bar{K}_{ss} = K_r$, $\bar{Q}_s = Q_r$ și deci a doua ecuație din (18) are forma :

$$K_r Z_s = Q_r . \tag{19}$$

Modificarea rigidităților coloanei. Dacă curbele de interacțiune au fost liniarizate, matricea K_r se determină o singură dată pentru fiecare coloană. În caz contrar se efectuează un calcul neliniar în care matricea K_r, secantă sau tangentă, trebuie refăcută la începutul fiecărei etape de calcul.

În general, într-un astfel de calcul, la începutul unei noi etape trebuie să se determine matricea de rigiditate corespunzătoare stadiului de încărcare atins sau preciziei de calcul obținute. Dacă curbele de interacțiune sînt reprezentate printr-un contur poligonal (fig. 2*b*, de exemplu), și dacă se adoptă metoda de rezolvare pas cu pas, trecerea de la o etapă la alta se face fără a se modifica în întregime matricea de rigiditate tangentă. Treptele de încărcare fiind necesar mici în vederea reducerii erorii de calcul, rigiditățile tangente se modifică numai pe anumite porțiuni ale coloanei. În această situație, inversa noii matrice de rigiditate se poate obține fără a fi necesar să se inverseze efectiv întreaga matrice modificată.

Se admite că, pentru o anumită treaptă de încărcare, se cunoaște matricea de rigiditate tangentă (14), inversa ei K^{-1}, precum și matricea tangentă modificată corespunzător treptei următoare de încărcare, K_m adică :

$$K = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}, \quad K_m = \begin{vmatrix} K_{11} + R & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

După [13], inversa matricei tangente modificate se poate calcula astfel :

$$K_m^{-1} = K^{-1} \begin{vmatrix} (I + RF_{11})^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & R & F_{12} \\ 0 & I \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Utilizarea ecuației (21) prezintă anumite inconveniente. Pe de o parte, necesitatea conservării matricelor K și K_1^{-1} de la o etapă la alta, solicită un spor de memorie la calculator, iar pe de altă parte, inversarea matricei $I + RF_{11}$ și apoi determinarea lui K_r cu ajutorul ecuației (17), conduce la o creștere importantă a timpului de lucru la calculator. Luînd în considerație și faptul că matricea K_r se obține prin condensare statică, ceea ce presupune cunoașterea submatricei K_{ii}(18), apare evidentă superioritatea unei proceduri de calcul în care corecția necesară se aplică nu asupra matricei de rigiditate ci direct asupra formei ei triangularizate.

Cu referire la modelul de numerotare a nodurilor și elementelor din figura 3*a*, această procedură constă în următoarele. Se presupune că la sfîrșitul unei anumite etape de încărcare rigiditățile tangente ale primelor m elemente finite nu s-au modificat. Aceasta înseamnă că primele $2m$ ecuații ale sistemului de ecuații 18 rămîn neschimbate, fiind necesar să se

refacă numai ultimele $2(n-m)$ ecuații. Efectuînd corecția și reluînd apoi triangularizarea submatricei K_{ii}, începînd cu ecuația $2m+1$, se obține o nouă matrice de rigiditate redusă. Matricea obținută corespunde noii etape de încărcare a fundației.

Matricea de rigiditate a fundației. Matricea K_r conține numai rigidițăile care caracterizează comportarea la încovoiere a coloanei. Pentru problema plană, forma finală a matricei de rigiditate a coloanei, în raport cu gradele de libertate de interfață, se obține asociind, la matricea K_r, rigiditatea axială a coloanei [26], [29], [22]:

$$K_p = \begin{vmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & K_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & k_{y\theta} \\ 0 & k_{\theta y} & k_{e\theta} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Trecerea matricei K_p din sistemul de referință propriu al coloanei $(1xy)$ în sistemul de coordonate globale (OXY), în cazul radierelor infinit rigide, se realizează prin transformarea

$$K_f = L^T K_p L, \tag{23}$$

în care

$$L = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & b\sin\alpha - a\cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & -b\cos\alpha - a\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Aceeași matrice L transformă încărcările aplicate la capitelul coloanei în încărcări concentrate în originea sistemului global:

$$Q_f = L^T Q_p, \tag{25}$$

Q_p reprezintă matricea forțelor aplicate la capitelul coloanei:

$$Q_p^T = |Q_x, Q_r| = |Q_x, Q_y, Q_\theta|. \tag{26}$$

Sistemul ecuațiilor de echilibru al întregii fundații și, implicit, matricea de rigiditate globală și vectorul forțelor aplicate în originea sistemului de axe OXY, se obține prin metoda directă:

$$(\Sigma L^T K_f L)\, U_f = \Sigma L^T Q_f + P, \tag{27}$$

U_f reprezintă vectorul deplasărilor punctului în care s-a fixat originea sistemului global, iar P este vectorul forțelor care acționează direct asupra radierului fundației.

Matricea de rigiditate aferentă capitelului pentru cazul tridimensional va cuprinde, în afara rigidităților incluse în matricea K_p (22), rigidițăile de încovoiere după a doua direcție și, de asemenea, rigiditatea la

torsiune a coloanei. În [17] este prezentată această matrice și modul în care se obține echivalentul ecuației (27) pentru cazul spațial al radierelor rigide. În [18] este dat calculul tridimensional al radierelor elastice fundate pe coloane, iar în [19] se descrie o metodă de calcul spațial al podurilor, cu luarea în considerație a conlucrării coloanelor cu terenul de fundație.

5. DEPLASĂRILE FUNDAȚIEI

Sub acțiunea sarcinilor exterioare, coloanele fundației se deformează, iar radierul se deplasează într-o poziție vecină. Dacă se admite că radierul este nedeformabil, noua sa poziție este unic determinată dacă i se cunosc deplasările de corp rigid (27). Deoarece, datorită caracterului neliniar al curbelor de interacțiune, matricea de rigiditate globală conține, în mod implicit, deplasările nodurilor coloanelor, soluția ecuației (27) nu se poate obține direct, într-o singură etapă, ci în urma unui calcul repetitiv. În comparație cu o analiză liniară un astfel de calcul este mult mai laborios, chiar dacă se uzează de asistența calculatorului și, cel puțin din acest punct de vedere, orice procedeu care contribuie la reducerea duratei calculului trebuie să fie menționat.

Se cunosc mai multe metode de analiză a structurilor în domeniul neliniar elastic [10]. Dintre acestea, metoda pașilor succesivi urmărește reconstituirea prin pași egali, liniarizați, a parcursului real de încărcare-deformare a structurii. Utilizînd rigiditățile tangente, această metodă conduce la deplasări mai mici decît cele reale. Așa cum rezultă și din figura 5*a*, dacă treptele de încărcare nu sînt suficient de mici, abaterea finală Δ

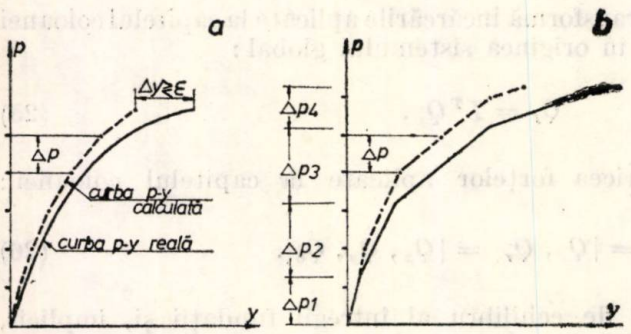


Fig. 5. — Metoda pas cu pas *a*) trepte de încărcare egale; *b*) trepte de încărcare neegale.

poate fi mai mare decît toleranța admisă. Din acest motiv, algoritmii de calcul prevăd procedee de îmbunătățire a soluției, fie prin reluarea calculelor cu trepte de încărcare mai mici, fie prin corectări efectuate pe parcurs prin introducerea forțelor neechilibrate de la noduri, fie printr-o etapă finală de ajustare cu ajutorul rigidităților secante, fie, în sfîrșit, printr-o combinare a acestor procedee. Examinînd modul în care curba p-y calculată se abate de la traseul curbei p-y reale, a unui element finit oarecare din fundație (fig. 5*b*), se constată că abaterea este generată de neconcordanța punctelor de schimbare de pantă. Dacă ecartul încărcării ΔP ar fi un submultiplu al intervalelor $\Delta P1 \ldots \Delta P4$, această neconcordanță ar fi eliminată, iar cele două contururi poligonale ar coincide. Iar dacă

treptele de încărcare s-ar lua succesiv egale cu intervalele $\Delta P1 \ldots \Delta P4$, s-ar realiza în plus și o minimizare a procesului de calcul.

Din cele arătate, rezultă posibilitatea obținerii unei soluții „exacte" printr-un procedeu în care mărimea treptelor de încărcare este determinată din condiția de nedepășire a punctelor de schimbare de pantă. Cu alte cuvinte, mărimea fiecărei trepte este stabilită în pasul de calcul aferent, fiind delimitată de atingerea celui mai apropiat punct de schimbare de pantă de pe curbele de interacțiune ale fundației. Numărul pașilor de calcul este aprioric necunoscut, algoritmul prevăzînd reluarea calculelor pînă la epuizarea întregii încărcări exterioare. Eficiența procedeului va fi mai bine evidențiată printr-un exemplu de calcul prezentat în paragraful următor.

Calculul fundațiillor prin metoda pas cu pas (metoda pașilor succesivi), presupune rezolvarea formei incrementale (a ec. 27), pentru fiecare treaptă de încărcare:

$$K_t \Delta U = \Delta Q + \Delta P. \tag{28}$$

Deplasările radierului vor fi deci,

$$\Delta U = K_t^{-1}(\Delta Q + \Delta P). \tag{29}$$

Deplasările de interfață ale coloanelor, pentru fiecare treaptă de încărcare, se determină prin intermediul matricei de transformare a deplasărilor (24):

$$\Delta Z_s = L \Delta U. \tag{30}$$

Cunoscînd deplasările capitelului, deplasările nodurilor interioare ale coloanelor se calculează efectuînd operația de substituție înapoi, în sistemul de ecuații (18).

Mai trebuie adăugat că eforturile în coloane se calculează pe baza deplasărilor finale ale nodurilor, în timp ce reacțiunile terenului trebuie reactualizate la sfîrșitul fiecărei trepte de încărcare.

6. APLICAȚII

Grinda pe mediu elastic: soluția exactă — soluții aproximative. În figura 6 este reprezentată fibra medie deformată a unei grinzi de lungime infinită, rezemată pe mediu elastic, acționată de o sarcină concentrată. Un exemplu similar este folosit în [8] pentru a arăta că soluția aproximativă obținută prin luarea în considerație a trei coeficienți de fundație este în bună concordanță cu soluția oferită de teoria elasticității. După cum se vede (curba reprezentată punctat), prin utilizarea elementului finit construit prin intermediul a doi coeficienți de fundație variabili, element descris anterior, se obține de asemenea o foarte bună aproximație.

Date de calcul: $P = 1\,000$ kN, modulii de elasticitate pentru grindă și mediul de rezemare, $E_g = 53{,}1$ kN/cmp și, respectiv, $E_m = 0{,}0215$ kN/cmp, raza secțiunii transversale a grinzii, $R = 1{,}0$ m.

Pași egali — pași variabili. Figura 7 evidențiază eficiența procedeului de calcul cu pași succesivi neegali. Pentru un radier fundat pe trei coloane, solicitat de o forță orizontală H, este figurată variația momentelor încovoietoare de la capitelul coloanelor în funcție de numărul pașilor

egali de calcul (linie continuă). Cu linie întreruptă sînt reprezentate valorile „exacte" ale momentelor încovoietoare. Aceste valori au fost obținute după 17 trepte de încărcare neegale. Cu titlu informativ se menționează că mărimea treptelor de încărcare a variat între 17,1 % și 1,1 % din valoarea încărcării totale, $H = 700$ kN. După cum se vede, momentele calculate

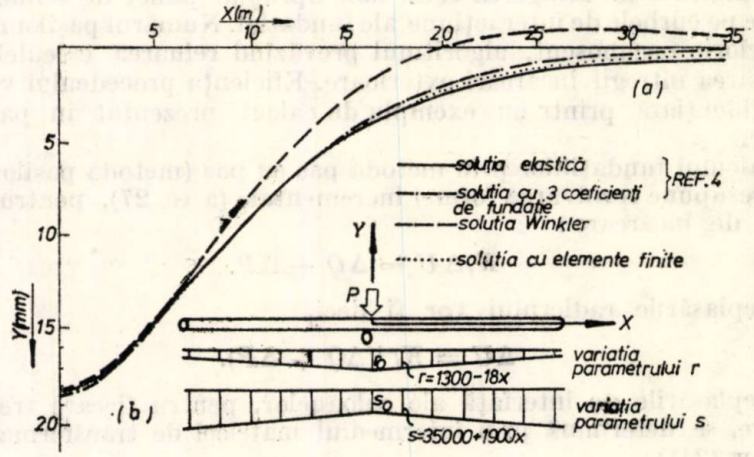


Fig. 6. — Grinda pe mediu elastic: *a*) variația săgeților; *b*) variația parametrilor *r* și *s*.

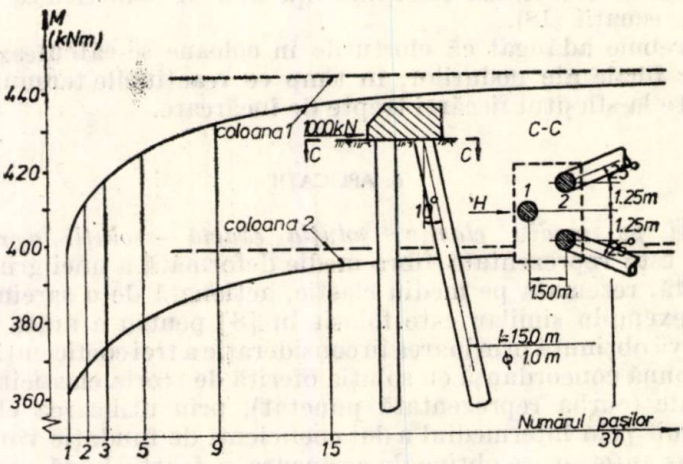


Fig. 7. — Radier fundat pe trei coloane; variația momentelor încovoietoare de la capitelul coloanelor în funcție de numărul pașilor egali de încărcare.

prin pași egali tind monoton către soluția obținută cu trepte de încărcare variabile. Superioritatea procedeului descris în paragraful precedent este evidentă.

Calculele au fost făcute luînd curbe de interacțiune triliniare (fig. 2*b*), pentru un teren format din nisipuri afînate.

Calcul liniar — calcul neliniar. În figura 8 este reprezentat un radier rigid fundat pe trei coloane de 18 m lungime. Terenul de fundație, constituit dintr-o argilă grasă, are rezistența la tăiere egală cu 0,2 daN/cmp și

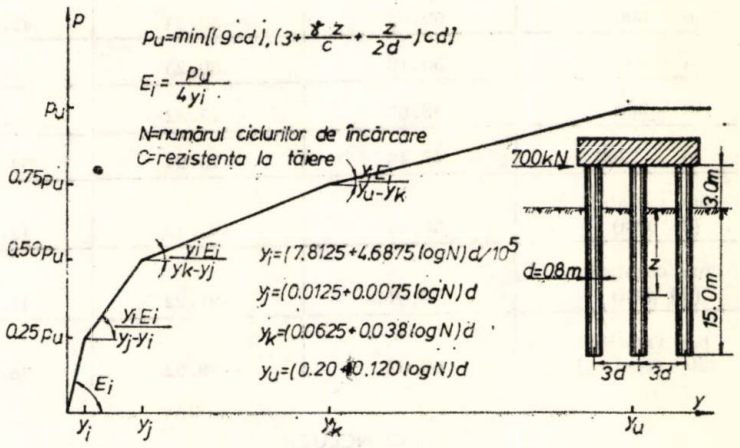


Fig. 8. — Radier fundat pe trei coloane ; curba de interacțiune $p - y$.

greutatea volumetrică egală cu 20 kN/mc. De asemenea, este reprezentată o adaptare, după Reese [25], a curbei p-y corespunzătoare pămînturilor argiloase tari situate deasupra nivelului apei subterane. Elementele de calcul necesare determinării acestei curbe sînt menționate de asemenea în figură.

Structura a fost calculată atît în domeniul liniar cît și în domeniul neliniar elastic. În primul caz, pentru parametrul m au fost luate valori cuprinse între 300 și 1200 tf/m^4. În al doilea caz, s-a aplicat metoda pașilor succesivi utilizînd curba de interacțiune de mai sus. Principalele rezultate obținute pentru coloana comprimată, adică forța axială, momentul încovoietor de la capitel și momentul încovoietor din cîmpul coloanei, sînt reproduse în tabelul 1. Între paranteze sînt trecute cotele, măsurate de la intradosul radierului, la care au fost obținute momentele maxime din cîmp.

Curba p-y din figura 8 fiind valabilă și în situațiile în care sarcinile se aplică ciclic ($N > 1$), structura a fost calculată, pentru comparație, și în ipoteza în care $N = 200$.

Rezultatele obținute arată că diferențele față de calculul neliniar elastic sînt cu atît mai importante cu cît crește valoarea parametrului m.

Tabelul 1

Eforturile coloanei comprimate din figura 8.

		Forță axială (tf)	Moment încovoietor (tfm)	
			capitel	cîmp
calculul liniar	$m = 300$	52,09	−83,34	42,31 (7,0)
	$m = 600$	50,16	−80,25	37,28 (7,0)
	$m = 900$	48,63	−77,82	35,76 (6,0)
	$m = 1200$	47,46	−75,94	34,97 (6,0)
calculul neliniar	pas variabil (23 pași)	58,43	−93,49	42,03 (8,0)
	pas constant (40 pași)	57,01	−91,22	41,88 (8,0)
	pas variabil (200 repetări)	56,02	−89,92	48,02 (8,0)

7. CONCLUZII

În încheiere, se consideră util să se sublinieze următoarele :

— Elementul finit al terenului de fundație, prezentat anterior, se obține prin utilizarea configurației deformatei unui tronson de coloană, încovoiat sub efectul deplasărilor nodale. Fiind deci compatibil cu elementul finit standard de grindă încovoiată, introducerea lui în programele existente, întocmite pe baza algoritmului general al metodei deplasărilor, poate fi lesne realizată. În acest fel problema interacțiunii suprastructură-infrastructură-teren, cel puțin în situațiile în care fundațiile sînt dezvoltate, sau ramificate liniar, poate fi rezolvată cu ușurință. În cazul unui calcul neliniar elastic, elementelor finite ale terenului trebuie să li se asocieze curbele de interacțiune aferente.

— Pentru situațiile în care curbele de interacțiune se prezintă sub formă de contur poligonal, se descrie un procedeu de calcul prin trepte de încărcare neegale, procedeu în care refacerea matricelor de rigiditate, după fiecare treaptă de calcul, se realizează prin condensare statică. În acest fel, se obține o soluție „exactă" și, în același timp, o substanțială reducere a timpului de prelucrare la calculator.

— Deoarece determinările teoretice ale parametrului G_s nu au o confirmare experimentală decît pentru fundații de suprafață, programul întocmit pe baza celor arătate aici a fost scris pornind de la relația (1). Sub această formă este utilizat în proiectare. Pe de altă parte, pentru a se dispune de un instrument de studiu privind influența parametrului G_s asupra soluției, programul a fost întocmit astfel încît să poată lucra și pe baza modelului de fundație cu doi parametri, avînd o opțiune în acest sens.

NOTAȚII

D, U, Z = vectorii deplasărilor;
E_s = modulul reacțiunii laterale;
G_s = modulul forfecării transversale;
$K, K_c, K_f, K_g, K_p, K_r$ = matrice de rigiditate;
L = matricea transformării deplasărilor;
P = vectorul încărcărilor radierului;
Q, Q_f, Q_p, Q_r = vectorii încărcărilor coloanelor;
U_f = energia de deformație a coloanei;
W = polinomul de interpolare a deplasărilor;
m, p = reacțiunile terenului;
r, s = parametrii nodali ai terenului;
y = săgeata coloanei.

Primită la redacție la 8 martie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. F. BAGUELIN, J. JEZEQUEL, *Etude expérimentale du comportement de pieux sollicités horizontalement*, Bull. Liaison Labo. P. et Ch., nov.-dec., p. 129—170 (1972).
2. N. P. BALAAM et al., *Finite Element Analysis of the Effects of Installation on Piles*, Geotechnical Engineering, *1*, p. 33—48 (1975).
3. P. K. BANARJEE, *Analysis of Pile Groups Embedded in Nonhomogeneous Soil*, Pr. 5th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Engg., Viena, 1976, vol. 1, p. 345—350,
4. P. K. BANARJEE, R. M. DRISCOLL, *Three-Dimensional Analysis of Vertical Pile Groups* Pr. 2nd Int. Conf. on Num. Meth. in Geomechanics, June, 1976, p. 438—450
5. A. BELEȘ și colab., *Calculul construcțiilor amplasate pe medii deformabile*, Edit. Academiei București, 1977.
6. C. S. DESAI, U. K. PATIL, *Finite Element Analysis of Some Soil-Structure Interaction Problems*, Pr. Int. Symp. on Soil Structure Interaction, Univ. of Roarkee, India, Jan., 1977.
7. C. S. DESAI, G. C. APPEL, *3-D Analysis of Laterally Loaded Structures*, Pr. 2nd Conf. on Num. Meth. in Geomechanics, June, 1976, p. 405—418.
8. D. Q. FLETCHER, L. R. HERMANN, *Elastic Foundation Representation of Continuum*, Journal ASCE, 1971, *EM1*, p. 95—107.
9. M. GAMBIN, *Calculation of Foundations Subjected to Horizontal Forces Using Pressuremeter Data*, Sols-Soils, *30/31*, p. 17—59 (1979).
10. AL. GHEORGHIU, *Concepții moderne în calculul structurilor*, Edit. tehnică, București, 1976.
11. M. JAMIOLKOWSKI, A. GARASSINO, *Soil Modulus for Laterally Loaded Piles*, Pr. 1X ICSMFE, Session 10, Tokyo, 1977.
12. I. MANOLIU, *Comportarea piloților supuși la solicitări transversale*, teză de doctorat, I.C.B. 1974.
13. H. C. MARTIN, *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
14. H. MATLOCK, L. C. REESE, *Generalized Solutions for Laterally Loaded Piles*, Journal ASCE, *SM5*, p. 63—91 (1960).
15. H. MATLOCK, *Correlations for Design of Laterally Loaded Piles in Soft Clays*, Offshore Technology Conference, paper no. OTC 1204, Houston, 1970.
16. F. MIYAHARA, J. G. ERGATOUDIS, *Matrix Analysis of Structural-Foundation Interaction*, Journal ASCE, *ST1*, p. 251—265 (1976,)
17. G. ONU, *Calculul radierelor rigide pe coloane*, St. cerc. mec. apl., **33**, *4*, p. 711—752 (1974).
18. G. ONU, *Calculul radierelor elastice pe coloane*, St. cerc. mec. apl., **36**, *5*, p. 701—713 (1977).
19. G. ONU, *The elastic response of the pile foundation bridges*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **25**, *6*, p. 893—912 (1980).
20. J. PENZIEN et al., *Seismic Analysis of Bridges on Long Piles*, Journal ASCE, *EM3*, p. 223—254 (1964).

21. V. POP şi colab., *Conlucrarea piloţilor cu terenul de fundare la încărcări orizontale*, A IV-a conf. geotehnică şi fundaţii, Iaşi, 3—5 sept., 1979.
22. C. POPA, T. BĂBEANU, *Fundaţii de adîncime pe coloane*, CDPT-MTTc, Bucureşti, 1973.
23. H. G. POULOS, *Laterally Loaded Piles — Pile Groups*, Journal ASCE, *SM5*, p. 733—751, (1971).
24. H. G. POULOS, *Group factors for pile deflection estimation*, Journal ASCE, *GT12*, p. 1489——1509 (1979).
25. L. C. REESE, S. C. DESAI, Laterally Loaded Piles, chp. 9 of *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, by C. S. Desai and J. T. Christian eds., McGraw-Hill Book Co., N. Y., 1977.
26. K. S. SILIN şi colab., *Fundamenti opor mostov iz sbornogo jelezobetona*, Avtotransizdat, Moskva, 1968.
27. A. STANCIU şi colab., *Structuri plane fundate pe coloane în conlucrare cu terenul de fundaţie*, Bul. I. P. Iaşi, *1—2* (1977).
28. I. STĂNCULESCU, şi colab., *Tabele, grafice şi formule pentru proiectarea fundaţiilor*, I. C. Bucureşti. 1979.
29. A. STĂNESCU, D. TEODORESCU, *Fundaţii pe coloane cu diametru mare*, Revista CFR, *6*, p. 327—346 (1972).
30. E. TITZE, *Über den seitlichen Bodenwiderstand bei Pfahlgründungen*, Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin, 1943.
31. N. UNGUREANU, *Calculul unor plăci rezemate pe piloţi*, St. cerc. mec. apl., **31**, *4* (1972).
32. A. VAICUM, *Fundaţii pentru construcţii energetice, de distribuţie şi de transport*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1975.
33. A. VAICUM, *Studiul reologic al corpurilor solide*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1978.
34. A. S. VESIC, *Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid*, Journal ASCE, *EM2*, p. 35—53 (1961).
35. E. L. WILSON, *The Static Condensation Algorithm*, Int. J. Num. Meth. Engng., *1*, p. 198—203 (1974).
36. O. C. ZIENKIEWICZ, J. J. TOO, *The Finite Prism in Analysis of Thick Simple Supported Bridge Boxes*, The Institution of Civil Engineers, Proc., part 2, Sept., **53**, p. 147——172 (1972).

DETERMINAREA DENSITĂȚILOR SPECTRALE ALE DRUMURILOR PE BAZA ANALIZEI EXPERIMENTALE A VIBRAȚIILOR AUTOMOBILELOR

de S. PĂRĂIAN, T. SIRETEANU și I. ROȘU
Institutul de fizică și tehnologia materialelor

În lucrare este prezentată o metodă indirectă pentru determinarea densităților spectrale ale drumurilor bazată pe cunoașterea caracteristicilor statistice ale răspunsului automobilului, a funcțiilor de transfer ale acestuia și a relațiilor fundamentale care există între caracteristicile statistice ale excitației și răspunsului sistemelor liniare.

Caracterizarea statistică a acțiunii diferitelor tipuri de drumuri asupra automobilelor prezintă o deosebită importanță teoretică și practică. În primul rînd, permite determinarea teoretică a mărimilor ce caracterizează vibrațiile automobilelor și a solicitărilor în diferite subansamble ale acestora pentru diverse condiții de exploatare (drumuri, viteze, încărcări), fiind un instrument indispensabil pentru optimizarea suspensiilor de automobile. În al doilea rînd, poate contribui substanțial la reducerea volumului experimentărilor, ușurînd modelarea pe standuri a condițiilor de exploatare. În sfîrșit, pe baza caracteristicilor statistice ale drumurilor se pot stabili anumiți parametri sau anumite criterii pentru clasificarea drumurilor și evaluarea gradului lor de uzură.

Metoda directă de determinare a caracteristicilor statistice ale acțiunii drumului constă în ridicarea profilului longitudinal utilizînd instalații de măsură adecvate și prelucrarea datelor pentru obținerea mediilor pătratice, funcțiilor de corelație sau densităților spectrale. Atunci cînd nu se dispune de astfel de instalații, deducerea caracteristicilor statistice ale drumurilor se poate face prin metode indirecte, de exemplu, utilizînd relațiile existente între caracteristicile statistice ale excitației și cele ale răspunsului sistemelor oscilante liniare care modelează vibrațiile automobilelor.

Primele determinări ale densităților spectrale ale drumurilor pe baza analizei experimentale a vibrațiilor automobilelor au fost efectuate de Parhilovski [1]. Metoda propusă de Parhilovschi constă în determinarea expresiilor analitice ale densităților spectrale astfel încît mediile pătratice ale deplasării relative dintre masa suspendată și cea nesuspendată, obținute prin calcul pe sistemul oscilant cu două grade de libertate, să coincidă cu cele rezultate experimental pentru diferite viteze de deplasare a automobilului. Faptul că densitatea spectrală se determină pe baza unei caracteristici statistice globale (media pătratică), fără efectuarea unei analize de frecvență, reprezintă principala sursă de erori a acestei metode.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 5, 1981, P. 715–720

În cele ce urmează se prezintă o metodă de obținere a densității spectrale a profilului longitudinal al drumului, care necesită numai determinarea experimentală a densității spectrale a accelerațiilor verticale în centrul unei roți pentru o singură viteză de deplasare a automobilului. În acest scop se utilizează un automobil ale cărui funcții de transfer sînt cunoscute sau determinate experimental pe o instalație de tip Hydropuls. La alegerea punctului de măsură pe una din masele nesuspendate ale automobilului s-a avut în vedere faptul că accelerațiile transmise de la roți la caroserie sînt filtrate substanțial de suspensie, ceea ce afectează precizia măsurării accelerațiilor masei suspendate pentru frecvențe mai mari de 10 Hz.

Dacă $G_0(n)$ este densitatea spectrală a profilului longitudinal al drumului în funcție de numărul de undă n, densitatea spectrală $G_{\ddot{x}}^{v}(f)$ a accelerațiilor verticale în centrul unei roți a automobilului ce se deplasează cu viteza constantă v se obține din formula [2]

$$G_{\ddot{x}}^{v}(f) = \frac{16\,\pi^4 f^4}{v} H(f)\, G_0(f/v), \tag{1}$$

în care f este frecvența, iar funcția $H(f)$ are expresia

$$H(f) = |H_{xx_{01}}(f)|^2 + |H_{xx_{02}}(f)|^2 + \\ + [2\,\mathrm{Re}\,\bar{H}_{xx_{01}}(f)\, H_{xx_{02}}(f) \exp(-\mathrm{i}2\pi f A/v)]. \tag{2}$$

În relația (2) $H_{xx_{01}}(f)$, $H_{xx_{02}}(f)$ sînt funcțiile de transfer ale sistemului oscilant cu patru grade de libertate, corespunzătoare intrărilor x_{01}, x_{02} (deplasările verticale impuse roților situate pe aceeași parte a automobilului), iar A este ampatamentul automobilului.

Relațiile (1) și (2) permit determinarea densității spectrale $G_0(n)$ a profilului longitudinal al drumului, dacă funcțiile $G_{\ddot{x}}^{v}(f)$, $H_{xx_{01}}(f)$, $H_{xx_{02}}(f)$ sînt cunoscute, conform formulei

$$G_0(n) = G_0(f/v) = vG_{\ddot{x}}^{v}(f) / 16\,\pi^4 f^4 H(f). \tag{3}$$

La aplicarea acestui procedeu este recomandabil ca în relația (3) să fie introduse densitățile spectrale ale accelerațiilor unei roți suspendate direct de caroserie, deoarece în cazul suspensiilor pe punte rigidă vibrațiile verticale ale roții din stînga sînt influențate de cele ale roții din dreapta [3]. Verificarea corectitudinii rezultatelor se poate face comparînd mediile pătratice ale accelerațiilor verticale ale caroseriei și roților obținute prin calcul cu cele determinate experimental.

Pentru determinarea caracteristicilor statistice ale principalelor tipuri de drumuri (drum asfaltat, drum acoperit cu piatră cubică, drum de țară) au fost utilizate semnalele de accelerație înregistrate simultan în patru puncte de măsură situate pe partea stîngă a unui autoturism Dacia 1300 [4]. La alegerea punctelor de măsură pe partea stîngă a autoturismului

s-a avut în vedere faptul că variația calității suprafeței drumului în raport cu abaterile laterale de la calea medie urmărită de roți în timpul experimentărilor este mai mică în zona de mijloc decît în zona de margine a drumurilor. În acest fel, datele obținute pot fi considerate ca fiind reprezentative pentru drumurile respective.

Densitățile spectrale $G^{v}_{x_2}(f)$ ale accelerațiilor verticale ale roții față, estimate prin analiză digitală și reprezentate grafic în figura 1, au fost

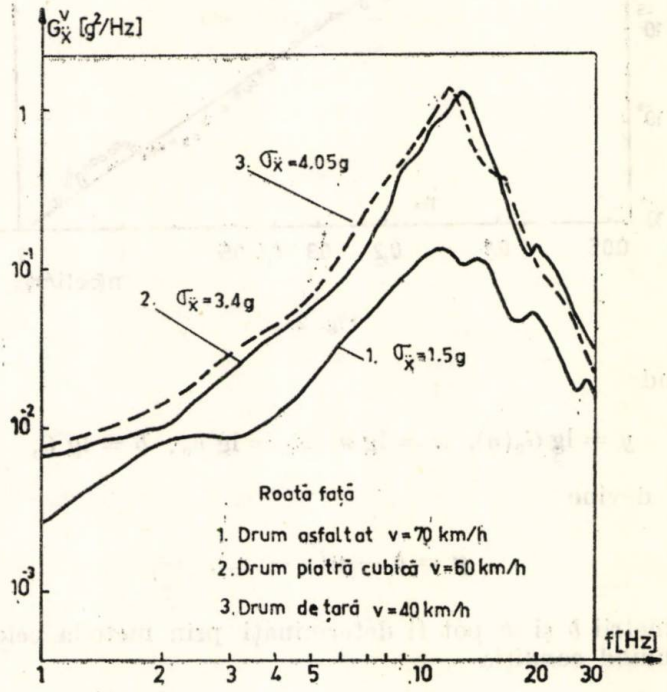


Fig. 1

introduse în relația (3) obținîndu-se valorile numerice $G_{01}, G_{02}, \ldots, G_{0N}$ pentru $n = n_1, n_2, \ldots, n_N$. Reprezentarea perechilor (n_k, G_{0k}), $k = 1, 2, \ldots, N$ în diagrame avînd scară dublu logaritmică, așa cum este exemplificat în figura 2, a arătat că pentru fiecare din drumurile considerate punctele obținute se găsesc cu o bună aproximație de-a lungul unei drepte. Acest lucru a permis aproximarea densităților spectrale ale profilelor longitudinale analizate prin expresii analitice de forma

$$G_0(n) = C(n/n_0)^{-w}, \tag{4}$$

unde $n_0 = 1/2\pi$ cicli/m, iar C și w sînt constante ce trebuie determinate.

Logaritmînd relația (4), rezultă

$$\lg G_0(n) = \lg C - w(\lg n - \lg n_0). \tag{5}$$

BIBLIOTECA MUZEULUI BUCUREȘTI 1945

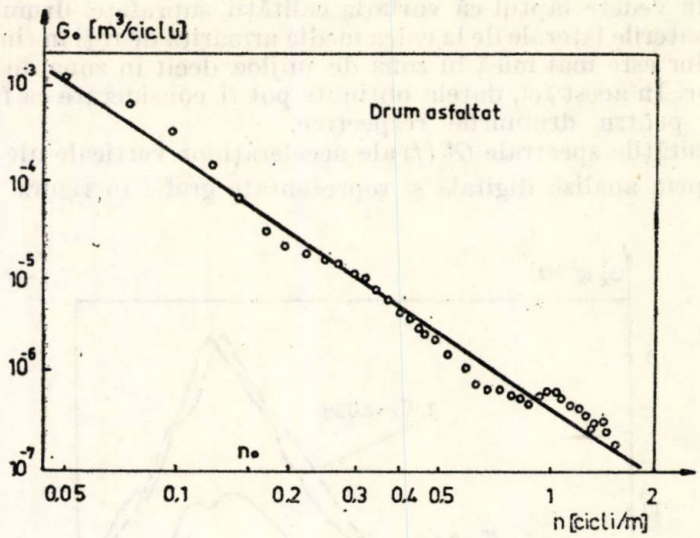


Fig. 2

Notînd

$$y = \lg G_0(n), \quad x = \lg n, \quad x_0 = \lg n_0, \quad b = \lg C,$$

relația (5) devine

$$y = b - w(x - x_0). \tag{6}$$

Parametrii b și w pot fi determinați prin metoda celor mai mici pătrate, punînd condiția

$$\delta^2(w, b) = \sum_{k=1}^{N} [y_k + w(x_k - x_0) - b]^2 = \min, \tag{7}$$

unde

$$y_k = \lg G_{0k}, \quad x_k = \lg n_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Valorile w și b care satisfac condiția (7) sînt soluțiile sistemului de ecuații

$$\partial \delta^2(w, b) / \partial w = 0, \quad \partial \delta^2(w, b) / \partial b = 0. \tag{8}$$

Valoarea coeficientului de corelație

$$\rho = w \left[\sum_{k=1}^{N} y_k^2 \right]^{1/2} \Big/ \left[\sum_{k=1}^{N} (x_k - x_0)^2 \right]^{1/2}, \tag{9}$$

este o măsură a dependenței liniare între valorile y_k și $x_k - x_0$, $k = 1, 2, \ldots, N$, deci o măsură a corectitudinii reprezentării datelor experimentale prin expresii analitice de forma (4).

Valorile parametrilor C, w și ρ determinate în acest mod pentru profilele longitudinale ale drumurillor analizate sînt date în tabelul 1.

Tabelul 1

Tipul de drum	C [10^{-6} m^3/ciclu]	w	ρ
Drum asfaltat	90	2,59	0,9903
Drum piatră cubică	370	2,47	0,9954
Drum de țară	813	2,57	0,9895

Din comparația datelor prezentate în tabelul 1 cu valorile indicate de ISO [5] pentru drumurile respective, în funcție de calitatea acestora, a rezultat că tronsoanele de drum analizate se încadrează în categoria drumurilor secundare conform clasificării ISO.

Analizînd datele prezentate în tabelul 2 se constată că există o bună concordanță între valorile calculate ale mediilor pătratice ale accelerațiilor caroseriei și roților și cele determinate experimental, excepție făcînd accelerațiile înregistrate la puntea spate care sînt sistematic mai mari decît cele calculate. Aceasta se datorește fenomenului de „galopare" a punții spate, care apare ca urmare a cuplajului existent în cazul suspensiilor pe punte rigidă între vibrațiile roților stînga-dreapta [3].

Tabelul 2

Tipul de drum	Media pătratică [g]	$\sigma_{\ddot{x}_1}$ caroserie față	$\sigma_{\ddot{x}_2}$ roată față	$\sigma_{\ddot{x}_3}$ caroserie spate	$\sigma_{\ddot{x}_4}$ roată spate
Drum asfaltat,	Prin calcul	0,092	1,52	0,127	1,47
$v = 70$ km/h	Experimental	0,094	1,46	0,115	1,97
Drum piatră cubică,	Prin calcul	0,140	3	0,196	3,43
$v = 60$ km/h	Experimental	0,131	3,39	0,168	3,73
Drum de țară	Prin calcul	0,178	4,08	0,211	4,66
$v = 40$ km/h	Experimental	0,171	4,43	0,208	5,01

În concluzie, metoda de determinare a caracteristicilor statistice ale drumurilor pe baza analizei experimentale a vibrațiilor automobilelor conduce la bune rezultate, caracterizîndu-se printr-o productivitate ridi-

cată (tronsoanele de drum sînt parcurse cu viteze relativ mari), putînd fi aplicată utilizînd aparatura de măsură și prelucrare existentă în uzinele și institutele de specialitate din țară.

Primită la redacție la 12 martie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. I. G. PARHILOVSCHI, *Spectralnaia plotnosti raspredelenia neravnostei microprofilia dorog i kolebania avtomobilia*, Avtomobilnaia promișlennosti **27**, *10*, (1961).
2. S. PĂRĂIAN, *Aplicarea teoriei proceselor aleatoare la optimizarea suspensiilor de autovehicule*, Teză de doctorat, București, IFTM, 1980.
3. M. MITSCHKE, *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Berlin, Springer Verlag, 1972.
4. T. SIRETEANU, O. GÜNDISCH, S. PĂRĂIAN, V. HORNEA, *Influența reglajului caracteristicii de amortizare la viteze mici de lucru asupra confortului și aderenței roată-sol*, St. cerc., mec. apl., **38**, *3*, p. 435 (1979).
5. C. J. DODDS, *Generalised terrain dynamic inputs to vehicles*, BSI Document 72/14562 (ISO/TC/108/WG9 (MEE/158/3/1)).

ASPECTE NOI ÎN TEORIA ANGRENAJELOR CONICO-EVOLVENTICE

de I. SZÉKELY, I. BOCIAN, V. CHIOREANU
Institutul politehnic Cluj-Napoca

Roţile dinţate conico-evolventice şi angrenajele formate din ele se aplică tot mai frecvent în cele mai diferite domenii ale construcţiilor de maşini, conducînd la soluţii constructive şi de exploatare optime. Se constată, din literatura de specialitate, că analiza şi sinteza diferitelor tipuri de angrenaje formate din roţi dinţate conico-evolventice se face pe cazul concret dat, cu particularităţile aferente, ceea ce de obicei conduce la un angrenaj evolventic plan.
În lucrarea de faţă se elaborează o teorie generală a angrenajelor conico-evolventice (pornind de la un angrenaj cu axe încrucişate), bazată pe o nouă concepţie care reflectă fidel realitatea. Se prezintă principiul de calcul geometric al roţilor conico-evolventice în funcţie de modul de prelucrare.
De asemenea, se prezintă metodele de determinare a principalelor caracteristici ale angrenajelor care se pot forma din aceste roţi.

1. INTRODUCERE

În lucrarea de faţă se tratează o metodă numerică de calcul, care modelează cu bune rezultate o clasă de angrenaje formate dintr-o roată dinţată cilindrică obişnuită şi una conico-evolventică [1], [2], [4], sau din două roţi dinţate conico-evolventice. Modelul matematic elaborat este general valabil pentru cazurile cînd axele roţilor dinţate sînt încrucişate, concurente sau paralele. Acest model ţine seamă de tipul sculei cu care se prelucrează roţile dinţate cilindrice şi conico-evolventice.

Se va utiliza următorul sistem de notaţii :

a, b — indici generali ;
S_a — suprafaţa elementului a ;
Σ_a — sistem de referinţă legat de elementul a, avînd axele de coordonate $O_a x_a y_a w_a$;
T_{ab} — matricea de transfer din sistemul b în a ;
X_a — raza vectoare, cu proiecţiile x_a, y_a, w_a, a unui punct curent de pe suprafaţa S_a, raportată la sistemul de referinţă Σ_a ;
N_a — vector normal cu proiecţiile n_{xa}, n_{ya}, n_{wa}, ataşat razei vectoare X_a.

2. ELEMENTUL DE REFERINŢĂ

În cele ce urmează se adoptă ca element de referinţă cremaliera, avînd caracteristici standardizate, indiferent de metoda de prelucrare şi de tipul sculei utilizate la danturarea roţilor dinţate care formează angrenajul conico-evolventic.

Suprafaţa cremalierei de referinţă S_0 (fig. 1) se exprimă în sistemul Σ_0, în funcţie de parametrii independenţi p şi q, cu vectorul de poziţie X_0 de forma :

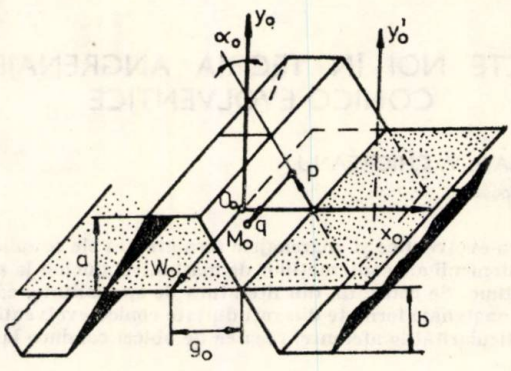


Fig. 1

$$X_0 = \begin{bmatrix} G_0[(3-2K)g_0 - p\ \sin\ \alpha_0] \\ p\ \cos\ \alpha_0 \\ q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ w_0 \\ 1 \end{bmatrix} = X_0(p,\ q), \qquad (1)$$

unde G_0 şi K sînt coeficienţi de generalizare ; G_0 ia valoarea $\pm$ 1, după cum relaţia (1) se referă la flancul drept sau stîng al cremalierei ; K ia valoarea 1 sau 2 după cum planul de referinţă $y_0O_0w_0$ coincide cu planul de simetrie a dintelui sau a golului dintre dinţi ; g_0 reprezintă semigrosimea dintelui cremalierei măsurată în planul median (π_0) ; α_0 — unghiul de presiune standardizat.

Normala N_0 ataşată vectorului (1) se exprimă cu relaţia :

$$N_0 = \begin{bmatrix} G_0 \\ \text{tg}\ \alpha_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{x0} \\ n_{y0} \\ n_{w0} \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

La prelucrarea roţii dinţate conico-evolventice avînd semiunghiul la vîrf δ (fig. 2) şi dantura înclinată cu unghiul β se au în vedere următoarele :

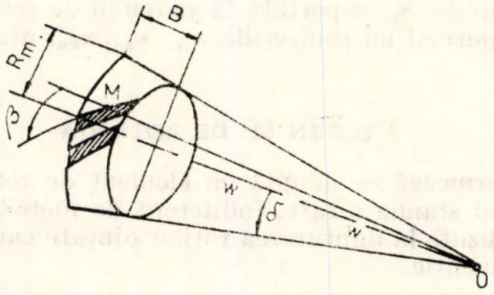


Fig. 2

— Cremaliera standardizată (fig. 1) se așază în raport cu semifabricatul astfel încît planul mediu (π_0) să fie paralel cu generatoarea OM al conului de divizare (fig. 2).

— În cazul danturii înclinate, cremaliera se rotește în raport cu semifabricatul astfel ca axa O_0w_0 (fig. 1) să închidă unghiul β cu dreapta OM (fig. 2).

— Originea O_0 a sistemului Σ_0 se consideră situat în planul median al roții. În consecință parametrii p și q ai suprafeței S_0 vor fi limitați de înălțimea dintelui și de lățimea roții ce se prelucrează.

Pentru generalizarea metodei de calcul se introduce un nou sistem de referință Σ_r solidar cu cremaliera astfel ca axa Ow_r (fig. 3) să rămînă

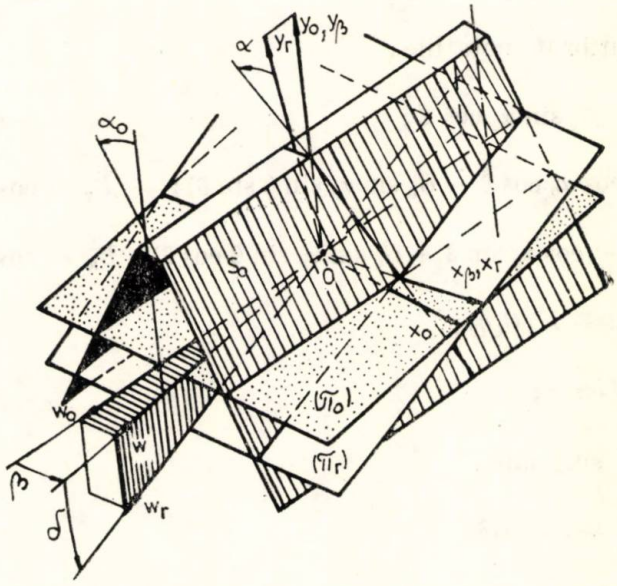


Fig. 3

paralelă cu axa w-w (fig. 2) a roții conico-evolventice, în tot timpul generării acesteia.

Pentru trecerea din sistemul Σ_0 în Σ_r, pe baza schemei din figura 3, se constituie matricea de transfer T_{r0} de forma :

$$T_{r0} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta\sin\delta & \cos\delta & \cos\beta\sin\delta & 0 \\ \sin\beta\cos\delta & -\sin\delta & \cos\beta\cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

În faza de generare a roții, cremaliera se exprimă prin vectorii $X_r = T_{r0}X_0$ și $N_r = T_{r0}N_0$ care pot fi aduse la forma:

$$X_r = \begin{bmatrix} pA_x + qB_x + C_x \\ pA_y + qB_y + C_y \\ pA_w + qB_w + C_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ w_r \\ 1 \end{bmatrix} = X_r(p, q), \tag{4}$$

$$N_r = \begin{bmatrix} G_0 \cos \beta \\ G_0 \sin \beta \sin \delta + \operatorname{tg} \alpha_0 \cos \delta \\ G_0 \sin \beta \cos \delta - \operatorname{tg} \alpha_0 \sin \delta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xr} \\ n_{yr} \\ n_{wr} \\ 0 \end{bmatrix} = \text{const.}, \tag{5}$$

unde s-au utilizat notațiile:

$$\begin{aligned} A_x &= -G_0 \sin \alpha_0 \cos \beta; & B_x &= -\sin \beta, \\ A_y &= (\cos \alpha_0 \cos \delta - G_0 \sin \alpha_0 \sin \beta \sin \delta); & B_y &= \cos \beta \sin \delta, \\ A_w &= -(\cos \alpha_0 \sin \delta + G_0 \sin \alpha_0 \sin \beta \cos \delta); & B_w &= \cos \beta \cos \delta, \\ C &= (2 - K) G_0 q_0; \\ C_x &= C \cos \beta; \\ C_y &= C \sin \beta \sin \delta; \\ C_w &= C \sin \beta \cos \delta. \end{aligned} \tag{6}$$

Vectorul (5) și notațiile (6) sînt constante pentru orice aplicație concretă, fapt ce favorizează definiția cremalierei dată sub forma relației (4). De asemenea, ele conțin toate elementele de particularizare pentru roți conico-evolventice cu dinți drepți ($\beta = 0$) sau pentru roți dințate cilindrice ($\delta = 0$).

Din proiecțiile vectorului (5) pe axele sistemului Σ_r rezultă unghiul de profil frontal al cremalierei;

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \sin \delta \pm \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\cos \delta}{\cos \beta}. \tag{7}$$

Din această relație rezultă că profilul drept, respectiv stîng, al dintelui are forme diferite, care corespunde la două cercuri de bază diferite a roții prelucrate. Cunoscînd unghiul de profil α nestandardizat al crema-

lierei, conform relației (7), se pot calcula razele cercurilor de bază cu formula cunoscută.

3. GENERAREA DANTURII ROȚII CONICO-EVOLVENTICE

În procesul de generare semifabricatul execută o mișcare de rotație, iar cremaliera S_0, o mișcare de translație în direcția axei $O_r x_r$ (fig. 4).

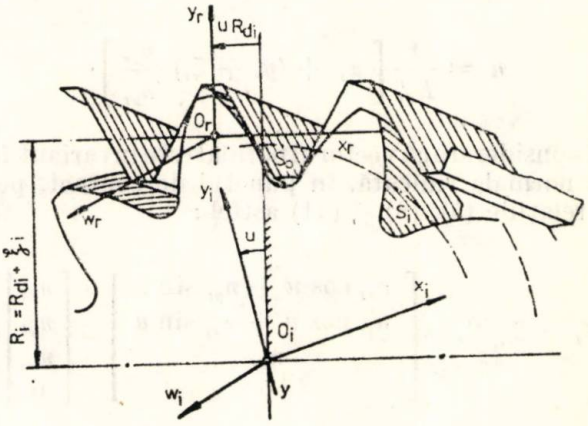


Fig. 4

Poziția relativă instantanee dintre sistemele Σ_r și Σ_i (legat de cremalieră, respectiv de roată) este definită de parametrul u prin matricea de transfer :

$$T_{ir} = \begin{bmatrix} \cos u & \sin u & 0 & (R_{di} + \xi_i) \sin u - u R_{di} \cos u \\ -\sin u & \cos u & 0 & (R_{di} + \xi_i) \cos u + u R_{di} \sin u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

în care ξ_i este deplasarea de profil a roții de ordinul i de modul unitar; R_{di} — raza cercului de divizare dată de formula cunoscută : $R_{di} = mZ_i/2 \cos \beta$; Z_i — numărul de dinți ai roții ; β — unghiul de înclinație a dinților ; m — modulul normal, considerat de valoare unitară.

Flancul S_i al dintelui roții se exprimă cu ajutorul produsului matriceal $T_{ir} X_r$, obținînd pentru S_i vectorul de poziție :

$$X_i = \begin{bmatrix} (x_r - u R_{di}) \cos u + (y_r + R_{di+i}) \sin u \\ (u R_{di} - x_r) \sin u + (y_r + R_{di+i}) \cos u \\ w_r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ w_i \\ 1 \end{bmatrix} = X_i(p, \ q, \ u) \tag{9}$$

Pentru a reduce numărul parametrilor la doi, vectorului (9) i se atașază condiția generală a angrenării : $N_r \cdot V_r = 0$, în care V_r este vectorul vitezei relative în punctele de contact dintre suprafețele S_0 și S_i.

În cazul de față condiția angrenării poate fi dezvoltată după metoda matriceală, obținîndu-se :

$$N_r V_r = N_r \left(T_{ri} \frac{\mathrm{d}T_{ir}}{\mathrm{d}u} X_r \right) = (y_r + \xi_i)\, n_{xr} + (x_r - uR_{di})\, n_{yr} = 0, \quad (10)$$

unde s-a notat cu T_{ri} inversa matricei (8). Soluția ecuației (10), care definește parametrul u pentru expresia (9), este

$$u = \frac{1}{R_{di}} \left[x_r + (y_r + \xi_i) \frac{n_{xr}}{n_{yr}} \right]. \quad (11)$$

Luînd în considerare că vectorul normal este invariant față de translație, rezultă că normala ridicată, în punctul de contact, pe flancul S_i se determină cu relațiile (5), (8) și (11) astfel :

$$N_i = T_{ir} N_r = \begin{bmatrix} n_{xr} \cos u + n_{yr} \sin u \\ n_{yr} \cos u + n_{xr} \sin u \\ n_{wr} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xi} \\ n_{yi} \\ n_{wi} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Relațiile (9) și (12), împreună cu (11) definesc în mod univoc flancul dintelui roții.

Precizări :

— Generarea se particularizează prin indicele i la toate roțile dințate ce intră în definiția angrenajului conico-evolventic, inclusiv roata generatoare în cazul danturării cu procedeul Fellow sau Skiwing.

— Semifabricatul roții dințate este limitat prin lățimea B a roții și de conul exterior ce se calculează cu relații cunoscute [1].

— Planul de referință $x_i O_i y_i$ coincide cu planul median al roții.

4. GENERAREA RECIPROCĂ ÎN ANGRENAJUL CONICO-EVOLVENTIC CU AXE ÎNCRUCIȘATE

Se presupune că una dintre roțile angrenajului, spre exemplu roata 1, s-a prelucrat cu o metodă oarecare și că flancul dintelui este definit matematic, în funcție de parametrii independenți p și q, prin raza vectoare $X_1 = X_1(p, q)$ și prin normala $N_1 = N_1(p, q)$. De asemenea, se cunoaște poziția relativă a axelor roților și raportul de transmitere. Se pune problema de a determina flancul roții conjugate S_2. În acest scop se consideră schema de generare din figura 5, în care s-au prezentat : — sistemele fixe Σ_a și Σ_b având axele $O_a w_a$ și $O_b w_b$ suprapuse cu axele roților 1 și 2 ; — sistemele Σ_1 și Σ_2 în care se definește flancul S_1 al roții 1, respectiv în care se va defini flancul S_2 al roții 2.

Pentru determinarea poziției relative a axelor încrucișate ale angrenajului se adoptă două cercuri de referință, legate de cele două roți dințate, cu razele ρ_1, respectiv ρ_2, alese după considerente oarecare. De asemenea,

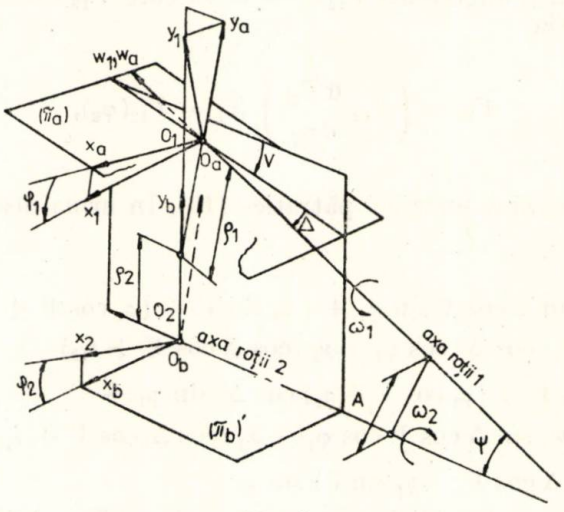


Fig. 5

se introduc unghiurile constructive, de convergență, V, format între planul (π_b) și proiecția axei roții 1 pe planul (π_a) de asemenea unghiul de deviație Δ determinate de planul (π_a) și axa O_1w_1 a roții 1.

În procesul de generare, sistemele Σ_1 și Σ_2 se rotesc după parametrii φ_1, respetiv φ_2 între care există relația de dependență $i_{12} = \varphi_1/\varphi_2 = \omega_1/\omega_2$.

Între sistemele Σ_1 și Σ_2, se stabilește matricea pătratică de transfer :

$$T_{21} = \begin{bmatrix} a_\varphi \cos\varphi_1 - \cos V \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 & a_\varphi \sin\varphi_1 + \cos V \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & -\sin\Delta\cos\varphi_2 + \cos\Delta \sin V \sin\varphi_2 & (\rho_1 \cos V + \rho_2)\sin\varphi_2 \\ -b_\varphi \cos\varphi_1 - \cos V \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & -b_\varphi \sin\varphi_1 + \cos V \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & \sin\Delta \sin\varphi_2 + \cos\Delta \sin V \cos\varphi_2 & (\rho_1 \cos V + \rho_2)\cos\varphi_2 \\ \sin\Delta\cos V \cos\varphi_1 + \sin V \sin\varphi_1 & \sin\Delta\cos V \sin\varphi_1 - \sin V \cos\varphi_1 & \cos\Delta\cos V & -\rho_1 \sin V \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

unde s-au folosit notațiile :

$$\begin{aligned} a &= \cos\Delta\cos\varphi_2 + \sin\Delta\sin V\sin\varphi_2, \\ b &= \cos\Delta\sin\varphi_2 - \sin\Delta\sin V\cos\varphi_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Angrenarea dintre suprafețele S_1 și S_2 este monoparametrică, deoarece mișcarea relativă este definită de un singur parametru, de φ_1 sau φ_2, între acestea existînd relația dată de legea de mișcare. Rezultă că contactul dintre S_1 și S_2 va fi o linie, locul geometric al punctelor ce satisfac ecuația generală a angrenării $V_{12}N_1 = 0$, în care V_{12} este viteza relativă, dată de expresia:

$$V_{12} = \left(T_{12} \frac{\mathrm{d}T_{21}}{\mathrm{d}\varphi_2} \right) X_1 = V_{12}(\varphi_2), \tag{15}$$

unde T_{12} este inversa matricei pătratice (13). În urma dezvoltării relației (15), se obține:

$$V_{12} = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -w_1 \sin\Delta\cos V \sin\varphi_1 + [w_1 \sin V + (\rho_1 \cos V + \\ \quad + \rho_2)\cos\Delta]\cos\varphi_1 + y_1(\cos\Delta\cos V + i_{12}) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} [w_1 \sin V + (\rho_1 \cos V + \rho_2)\cos\Delta]\sin\varphi_1 + \\ \quad + w_1 \sin\Delta\cos V\cos\varphi_1 - x_1(\cos\Delta\cos V + i_{12}) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} (x_1 \sin\Delta\cos V - y_1 \sin V)\sin\varphi_1 - \\ \quad - (y_1 \sin\Delta\cos V + x_1 \sin V)\cos\varphi_1 - (\rho_1 \cos V + \rho_2)\sin\Delta \end{array} \right\} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_w \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Cunoscînd vectorul N_1, dezoltarea ecuației angrenării cu ajutorul vectorului (16) conduce la soluția:

$$\varphi_1 = 2 \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_3^2}}{C_3 - C_2} \right], \tag{17}$$

unde s-a notat

$$C_1 = (n_{y1}w_1 - n_{z1}y_1)\sin V + (n_{x1}w_1 - n_{z1}x_1)\sin\Delta\cos V + n_{y1}(\rho_1 \cos V + \rho_2)\cos\Delta,$$

$$C_2 = (n_{x1}w_1 - n_{z1}x_1)\sin V - (n_{y1}w_1 - n_{z1}y_1)\sin\Delta\cos V + n_{x1}(\rho_1 \cos V + \rho_2)\cos\Delta,$$

$$C_3 = (n_{x1}y_1 - n_{y1}x_1)(\cos\Delta\cos V + i_{12}) + n_{w1}(\rho_1 \cos V + \rho_2)\sin\Delta. \tag{18}$$

Introducînd soluția (17) în (13) și înmulțind aceasta din urmă cu vectorul X_1, se obține raza vectoare a punctului de contact sub

forma :

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} (x_1\cos\varphi_1 + y_1\sin\varphi_1)\,a_\varphi - (x_1\sin\varphi_1 - y_1\cos\varphi_1)\cos V\sin\varphi_2 + \\ -(x_1\cos\varphi_1 + y_1\sin\varphi_1)\,b_\varphi - (x_1\sin\varphi_1 - y_1\cos\varphi_1)\cos V\cos\varphi_2 + \\ +(x_1\cos\varphi_1 + y_1\sin\varphi_1)\sin\Delta\cos V + (x_1\sin\varphi_1 - \\ -y_1\cos\varphi_1)\sin V + \\ + w_1(\cos\Delta\sin V\sin\varphi_2 - \sin\Delta\cos\varphi_2) + (\rho_1\cos V + \rho_2)\sin\varphi_2 \\ + w_1(\cos\Delta\sin V\cos\varphi_2 + \sin\Delta\sin\varphi_2) + (\rho_1\cos V + \rho_2)\cos\varphi_2 \\ + w_1\cos\Delta\cos V - \rho_1\sin V. \end{bmatrix} = X_2(p, q). \tag{19}$$

Vectorul (19), împreună cu relația (17), definește suprafața flancului S_2 căutat, ca loc geometric al punctelor de contact în sistemul de axe Σ_2, ce satisfac ecuația angrenării.

Precizări :

— Dacă suprafața S_1, exprimată prin vectorii X_1 și N_1, este suprafața evolventică descrisă de muchia așchietoare a cuțitului roată, atunci flancul S_2 obținut, reprezintă dintele roții hiperboloidale.

Unghiul dintre axele roților se definește cu relația

$$\cos\ \psi = \cos\Delta\cos V,$$

iar distanța axială A rezultă din formula

$$A = \sqrt{t^2 + 2t(\rho_2\sin V - U\cos V)\cos\Delta + (U + \rho_1\sin V)^2 + (\rho_1\cos V + \rho_2)^2},$$

pentru

$$t = -\frac{\rho_1\cos\Delta\cos V + \rho_2}{1 - \cos^2 V\cos^2\Delta}\sin V,$$

$$U = t\cos V\cos\Delta - \rho_1\sin V.$$

Schema de generare din figura 5 este utilizată și pentru studiul general al angrenării.

5. LIMITELE GENERĂRII

Prezintă interes două aspecte ale limitelor : subtăierea și ascuțirea dinților roții generate.

Se admite că, pe baza considerentelor constructive și a formulelor cunoscute [2], s-au determinat raza exterioară maximă R_m și lățimea B a roții (fig. 2). De asemenea, se cunoaște înălțimea dintelui definită prin

limitarea corespunzătoare a parametrului de profil p (vezi fig.1) la valoarea p_0.

În cazul general, subtăierea se evidenţiază matematic prin apariţia punctului de întoarcere pe profilul generat. Acest fenomen apare la o schemă de generare dată, ca rază minimă realizabilă pe flancul roţii. În cazul roţilor conico-evolventice subtăierea apare prima dată la $w_r = B/2$ pentru soluţia p_L a ecuaţiei $dRi/dp = 0$. Dezvoltarea acestor două ecuaţii cu ajutorul formulelor (9) şi (11) conduce la relaţia de verificare :

$$p_0 \geqslant \frac{B_y\left(\frac{B}{2} + C_w\right) - B_w C_y + (R_{di} + \xi_i)\cos^2 \alpha_0}{A_y - B_y A_w}, \tag{20}$$

în care notaţiile sînt conforme cu (6), p_0 fiind valoarea minimă a lui p, corespunzător punctului de racord de la baza dintelui.

Subtăierea roţilor hiperboloidale este un fenomen similar, dar formulele analitice conţin expresii transcendente. De aceea pentru verificarea subtăierii se recomandă o metodă numerică.

Pe baza relaţiilor (17) şi (19) se constituie ecuaţia numerică :

$$Q(q) = 2w_2(p, q) + B = 0. \tag{21}$$

Soluţia q din (21) se introduce în expresia :

$$R_2^2 = x_2^2 + y_2^2 = R_2^2(p), \tag{22}$$

care, la rîndul său, se minimizează în raport cu p. Soluţia de minim p trebuie să verifice inegalitatea $p \leqslant p_0$. Rezolvarea ecuaţiei (21) şi minimizarea expresiei (22) presupune două procese iterative suprapuse, ceea ce pentru calculatoare de putere reprezintă o problemă trivială.

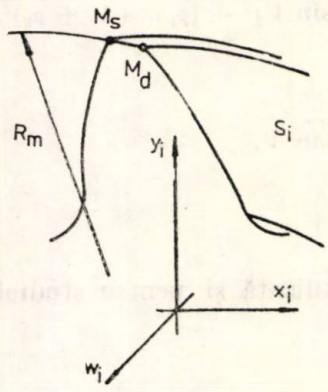


Fig. 6

În ce priveşte ascuţirea dinţilor, problema se pune de a determina punctele extreme pentru profilul drept şi stîng, situat la raza maximă R_m, apoi evaluarea distanţei $M_s M_d$ (fig. 6). Problema comportă anumite dificultăţi chiar şi la roţile evolventice cilindrice.

În cazul de faţă metoda de verificare a ascuţirii se rezumă la rezolvarea sistemului de ecuaţii :

$$F_1(q) = 2w_i - B = 0,$$
$$F_2(p) = R_m - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = 0, \tag{23}$$

care, prin constanta G_0 din relaţia (1), se particularizează odată pentru flancul drept, obţinînd punctul M_d (de coordonate x_d, y_d) date de relaţia (9) sau (19), apoi pentru flancul stîng al cremalierei, obţinînd punctul M_s (de coordonate x_s, y_s).

În urma acestor calcule se aplică relația de verificare :

$$\delta_V \leqslant x_d - x_s, \tag{24}$$

unde δ_V este grosimea minimă a dintelui, adoptată de regulă la valoarea $\delta_V \simeq 0{,}08$ m.

6. STUDIUL ANGRENĂRII

La studiul angrenării se urmăresc trei aspecte principale :
— verificarea procesului de angrenare dintre flancurile conjugate ;
— evaluarea petei de contact ;
— calculul gradului de acoperire.

Se presupun cunoscute suprafețele S_1 și S_2 ale flancurilor dinților roților 1 și 2 raportate la sistemele Σ_1 și Σ_2 (solidare cu cele două roți), definite prin razele vectoare și normale de forma :

$$X_1 = X_1(p,\ q);\ \ \boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{N}_1(p,\ q),$$

$$X_2 = X_2(P,\ Q);\ \ \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{N}_2(P,\ Q), \tag{25}$$

obținute pe o cale oarecare. Se precizează că poziția relativă a sistemelor Σ_1 și Σ_2 este definită conform schemei din fig. 5,

Studiul angrenării conform concepțiilor clasice se bazează pe analiza pozițiilor relative ale suprafețelor S_1 și S_2 corespunzătoare diferitelor unghiuri de rotație, ceea ce prezintă inconvenientul unor calcule laborioase. Calculele se simplifică prin introducerea unei suprafețe fictive, S_F, care în sistemul Σ_2 reprezintă înfășurătoarea monoparametrică a suprafeței S_1 (de fapt se generalizează ideile expuse în lucrarea [5]).

Suprafața S_F (fig. 7) se exprimă cu ajutorul algoritmului cuprins în formulele (13)...(19), particularizat prin înlocuirea formală a indicelui

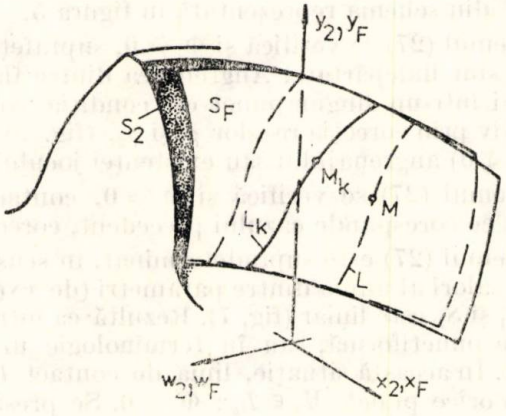


Fig. 7

2 cu F. Rezultă că suprafața S_F se definește în sistemul Σ_2, prin raza vectoare $X_F = X_F(p, q)$ de expresie identică cu (19). Astfel, analiza contactului, respectiv a procesului de angrenare, se rezumă la evaluarea poziției relative a suprafețelor S_2 și S_F. În acest scop, mai întîi se definește între S_2 și S_F funcția distanță :

$$\Phi(p, q, P, Q) = \frac{X_F - X_2}{n_{x2}}, \tag{26}$$

în care parametrii p, q, P, Q, reprezintă soluția sistemului de ecuații neliniare :

$$\begin{aligned} F_1(p, q, P, Q) &= y_2 - y_F + (X_F - X_2)\frac{n_{y2}}{n_{x2}} = 0, \\ F_2(p, q, P, Q) &= w_2 - w_F + (X_F - X_2)\frac{n_{z2}}{n_{x2}} = 0, \\ F_3(p, q, P, Q) &= n_{x2}\, n_{yF} - n_{y2}\, n_{x1} = 0, \\ F_4(p, q, P, Q) &= n_{x2} n_{wF} - n_{w2} n_{x1} = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Relația (26) împreună cu sistemul (27) exprimă distanța minimă dintre flancurile S_2 și S_F, orientată după normala N_2.

În raport cu valoarea funcției (26) și de comportarea sistemului (27) se deosebesc cinci situații distincte :

a) Dacă sistemul (27) nu admite soluție, atunci suprafețele S_2 și S_F sînt secante. În consecință, angrenarea dintre flancurile S_1 și S_2 este compromisă. Eventuala remediere a situației poate fi făcută prin corectarea unghiurilor Δ și V din schema reprezentată în figura 5.

b) Dacă sistemul (27) se verifică și $\Phi \neq 0$, suprafețele S_2 și S_F sînt intrepătrunse sau sînt îndepărtate. Angrenarea dintre flancurile S_1 și S_2 va avea loc numai într-un singur punct cu condiția corectării distanței dintre axe, respectiv prin corecția razelor ρ_1 și ρ_2, (fig. 5). Acest caz corespunde blocării ($\Phi < 0$) angrenajului sau existenței jocului ($\Phi > 0$).

c) Dacă sistemul (27) se verifică și $\Phi = 0$, contactul este într-un singur punct, ceea ce corespunde cazului precedent, corectat.

d) Dacă sistemul (27) este supradeterminat, în sensul că se verifică pentru mai multe valori al unuia dintre parametri (de exemplu P), atunci contactul dintre S_1 și S_F este liniar (fig. 7). Rezultă că între flancurile S_1 și S_2 angrenarea este punctiformă, sau în terminologie uzuală, angrenarea este biparametrică. În această situație, linia de contact L_k este funcție de parametrul P și în orice punct $M_k \in L_k$; $\Phi = 0$. Se presupune că în lungul curbei L_k, parametrul P ia valori extreme P_S și P_I care, pe baza rela-

ţiei (17) împreună cu sistemul (27), definesc două valori extreme φ_S şi φ_I corespunzătoare lui φ_1.
Angrenarea punctiformă se petrece deci în limitele φ_S şi φ_I.
De aici rezultă gradul de acoperire dat de formula:

$$G_{ra} = \frac{\varphi_S - \varphi_I}{2\pi} Z_1, \tag{28}$$

în care Z_1 reprezintă numărul de dinţi ai roţii 1.

e) Suprafeţele S_2 şi S_F sînt confundate în cazul în care sistemul (27) este insensibil la variaţia a doi parametri (dublu supradeterminat). Rezultă că angrenarea dintre S_1 şi S_2 este monoparametrică, între S_1, S_2 existînd o linie de contact instantanee. Analog cu cazul precedent se pot stabili numeric valorile limită φ_S şi φ_I a soluţiei (17), apoi pentru determinarea gradului de acoperire se foloseşte relaţia (28).

Pata de contact se formează în vecinătatea liniei de contact L_k, sau în jurul punctului de contact în cazurile b) şi c). Se admite că datorită solicitărilor exterioare, flancurile S_1 şi S_2, respectiv S_2 şi S_F, se apropie cu cantitatea ε_k. În această ipoteză locul geometric al punctelor în care distanţa dintre S_2 şi S_F este ε_k reprezintă conturul L a petei de contact.

Rezultă că conturul de egală distanţă L trasat pe suprafaţa S_2 este constituit ca loc geometric al punctelor M de rază vectoare $X_2 = X_2(P, Q)$ care satisfac sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} f_1(p, q, P, Q) &= x_2 - x_F + \varepsilon_k n_{x2} = 0, \\ f_2(p, q, P, Q) &= y_2 - y_F + \varepsilon_k n_{y2} = 0, \\ f_3(p, q, P, Q) &= w_2 - z_F + \varepsilon_k n_{w2} = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Soluţia sistemului (29) defineşte trei dintre parametri p, q, P, Q şi unul rămîne ca variabilă în lungul curbei de egală distanţă L.

Adoptînd o serie de valori discrete pentru ε_k prin sistemul (29) se obţine o variaţie a conturului L ceea ce reprezintă imaginea evoluţiei petei de contact, în funcţie de deformaţia elasto-plastică a flancurilor dinţilor sau în funcţie de uzura acestora.

Primită la redacţie la 6 februarie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. I. SZÉKELY, *Studiu asupra blocului conic dinţat compus din roţi dinţate conico-evolventice.* St. cerc. mec. apl., *5*, 1057—1073 (1961).
2. I. SZÉKELY, *Studii asupra unui angrenaj cilindro-conic.* St. cerc. mec. apl., *1*, 145—155 (1963).
3. I. BOCIAN, *Studiul geometric al angrenajelor globoidale în vederea măririi capacităţii portante a acestora.* Teza de doctorat, Intitutul politehnic Cluj-Napoca, 1976.
4. V. CHIOREANU, *Eficienţa utilizării variatoarelor discrete de turaţii, cu roţi dinţate conico-evolventice la acţionarea unor maşini unelte.* Lucrările primului simpozion ştiinţific al Uzinei UNIO Satu Mare, 3—5 septembrie 1979.
5. I. SZÉKELY *Zylindrisch conisches Getriebe mit Linear Kontakt,* Rev. Roum. Sci. Techn.—Mec. Appl., *1*, 217—228 (1965).

CALCULUL REGIMURILOR DE AȘCHIERE CARE ASIGURĂ UN CONSUM ENERGETIC MINIM

de IULIAN POPESCU
Universitatea din Craiova

În scopul calculării regimurilor de așchiere ce asigură un consum energetic minim, se stabilește o relație a puterii instantanee consumate la așchiere, funcție de parametrii regimului și de geometria sculei.

1. GENERALITĂȚI

În alte lucrări [2—4], s-a pus problema economisirii energiei la prelucrarea prin așchiere, indicîndu-se și unele direcții de cercetare ulterioare.

Cercetările ulterioare au constat în stabilirea relației puterii necesare la așchierea oțelului OL37 (0,25 %C ; 0,10 % Si ; 0,50 % Mn), cu duritatea de 129 HB 2,5/187,5. Încercările s-au făcut pe un strung paralel tip SNB 400 × 750 folosindu-se cuțite cu plăcuță dură. Cuțitele au fost fixate succesiv în portcuțit, cu o lungime în consolă de 65 mm. S-au strunjit bare cu diametrul de 39 mm, prinse între vîrfuri, cu lungimea de 350 mm. Puterea instantanee consumată, a fost măsurată cu o punte tip QN 10 (RSSC).

2. PLANIFICAREA EXPERIENȚELOR

S-a căutat obținerea unei relații cît mai exactă, care să cuprindă și dependențele neliniare și care să țină seama de un număr cît mai mare de variabile.

S-a adoptat o relație de forma :

$$y = b_0 + b_1x_1 + \ldots + b_5x_5 + b_{11}x_1^2 + \ldots + b_{55}x_5^2 + b_{12}x_1x_2 + \ldots + b_{45}x_4x_5,$$

cuprinzînd 21 coficienți necunoscuți. Relația ia în considerare atît pătratele variabilelor, cît și interdependențele dintre toate variabilele, deci are un caracter de generalitate.

Calculul celor 21 de coeficienți se face prin folosirea metodei celor mai mici pătrate, adică :

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1x_{1i} - b_2x_{2i} - \ldots - b_{45}x_{4i}x_{5i})^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \text{minim},$$

ceea ce înseamnă că suma pătratelor abaterilor dintre valorile măsurate ale răspunsului și valorile date ale polinomului de aproximare, să fie minimă.

Se poate scrie sistemul:

$$\frac{\partial S}{\partial b_i} = 0,$$

care, detaliat, devine:

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = \sum_{i=1}^{n} - 2a = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^{n} - 2\,ax_{1i} = 0; \ldots \frac{\partial S}{\partial b_{45}} = \sum_{i=1}^{n} - 2ax_{4i}x_{5i} = 0.$$

Sistemul obținut este:

$$\sum_{i=1}^{n} b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + \ldots + b_{45} \sum_{i=1}^{n} x_{4i}x_{5i} = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + \ldots + b_{45} \sum_{i=1}^{n} x_{4i}x_{5i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i},$$

$$\vdots$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{4i}x_{5i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{4i}x_{5i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{4i}x_{5i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{4i}x_{5i}.$$

Sistemul este de tip liniar, avînd 21 ecuații și 21 necunoscute (b_0, b_1, ... b_{45}).

Pentru a obține relația polinomială de tipul propus, s-a folosit o planificare a experiențelor pe baza unui program compus, central, rotabil, ce cuprinde 32 de experiențe, format din jumătatea programului factorial 2^5 (pentru nivelele -1 și $+1$), și 10 experiențe în centru, pentru calcularea erorilor experimentale.

Codificarea variabilelor și nivelelor este dată în tabelul 1.

Tabelul 1

Codificarea variabilelor și nivelelor

Parametrii		Nivelele				
reali	codificați	−2	−1	0	+1	+2
v, m/min	x_1	48,984	77,149	122,46	153,75	195,936
s, mm/rot	x_2	0,106	0,146	0,25	0,302	0,416
t, mm	x_3	0,5	1,5	3	4,5	6
$\varkappa°$	x_4	30	45	60	75	90
r_ε, mm	x_5	0,3478	0,554	0,7499	0,7934	1,35869
$\gamma°$	—	32°15′	32°15′	25°29′	44°51′	38°25′
ρ_β, mm	—	0,038	0,038	0,026	0,021	0,041
$\alpha°$	—	9°5′	9°5′	8°31′	7°11′	7°58′
$\lambda°$	—	0	0	+ 3°04′	0	+1°53′
f_γ, mm	—	0,25	0,25	0,30	0,28	0,14

3. REZOLVAREA SISTEMULUI

Rezolvarea sistemului liniar de 21 ecuații cu 21 necunoscute se face prin adaptarea subrutinei standard, întocmită pe baza procedeului Gauss-Jordan.

Această subrutină necesită formarea unei matrice cu 21 linii și 23 coloane, din care 21 linii și 21 coloane corespund matricei coeficienților sistemului; coloana 22 cuprinde valorile funcției răspuns y, iar coloana 23 este inițial zero, devenind în final coloana soluției sistemului.

Problema cea mai complicată a apărut la formarea matricei 21×23, notată cu A. Astfel, linia 1 (primii 21 termeni) și coloana 1, cuprind următoarele elemente:

$$32;\ \Sigma x_{1i};\ \Sigma x_{2i};\ \Sigma x_{3i};\ \Sigma x_{4i};\ \Sigma x_{5i};\ \Sigma x_{1i}^2;\ \Sigma x_{2i}^2;\ \Sigma x_{3i}^2;\ \Sigma x_{4i}^2;\ \Sigma x_{5i}^2;\ \Sigma x_{1i}x_{2i};$$

$$\Sigma x_{1i}x_{3i};\ \Sigma x_{1i}x_{4i};\ \Sigma x_{1i}x_{5i};\ \Sigma x_{2i}x_{3i};\ \Sigma x_{2i}x_{4i};\ \Sigma x_{2i}x_{5i};\ \Sigma x_{3i}x_{4i};\ \Sigma x_{3i}x_{5i};\ \Sigma x_{4i}x_{5i}.$$

Matricea A are în total 483 elemente; în mod practic ar fi fost imposibil ca fiecare să fie introdus printr-o instrucțiune.

S-a căutat deci o soluție de simplificare a formării acestei matrice.

S-a constatat că în formarea matricei A există o simetrie: coloana a doua se formează prin înmulțirea coloanei 1 cu x_{1i}, sub Σ; coloana a treia prin înmulțirea coloanei 1 cu x_{2i} și așa mai departe, unde x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, x_{5i} reprezintă tocmai elementele de sub Σ din coloana 1.

Constatarea aceasta nu simplifică procedeul, cum ar părea la prima vedere, deoarece factorii care apar sînt sub Σ, deci nu se poate opera cu metode algebrice directe.

S-a căutat atunci un procedeu de generare a fiecărui element și după multe variante s-a găsit o soluție bazată pe constatarea că termenul cel mai general ce apare în A este:

$$\sum_{i=1}^{32} x_{1i}^3 x_{2i}^3 x_{3i}^3 x_{4i}^3 x_{5i}^3.$$

Sub formă generală se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^{\alpha} x_{2i}^{\beta} x_{3i}^{\gamma} x_{4i}^{\delta} x_{5i}^{\lambda},$$

unde α, β, γ, δ, λ sînt exponenți ce pot lua valorile: 0; 1; 2; 3. Astfel dacă se cere să se scrie $\sum_{i=1}^{32} x_1^2 x_3 x_5$, atunci se va lua: $\alpha = 2$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$; $\delta = 0$; $\lambda = 1$; soluția este interesantă mai ales prin aceea că pentru exponenții nuli, factorii respectivi nu mai apar în produs decît cu valoarea 1.

În continuare, la întocmirea programului s-a pus problema de a se genera valorile exponenților conform cerințelor, căutîndu-se regulile de variație a acestora.

S-a pornit de la ideea de a se forma o matrice a exponenților $U(21, 5)$, cuprinzînd cele 21 linii și 5 coloane, corespunzînd la cei 5 exponenți, fiind luată ca bază doar coloana 1 din matricea A.

S-a format de asemenea o altă matrice U_1 (21,5), variabilă cu fiecare coloană, cuprinzînd exponenții pentru fiecare nouă coloană. Matricea U_1 se formează de fiecare dată, în ciclu, pornindu-se de la matricea de bază U; astfel, pentru generarea coloanei 2, se înmulțește, sub Σ, fiecare element al coloanei 1 cu x_{1i}, deci la coloana 1 din U, se adună $+1$ (la valoarea exponentului).

Similar se procedează de fiecare dată, pentru coloanele următoare. Deoarece pentru primele 5 coloane din U_1, se modifică succesiv coloanele din U, se lucrează în ciclu normal; pentru următoarele 5 coloane din A, se modifică cîte două coloane din U pentru a se forma U_1 și așa mai departe. În program, pentru a se respecta aceste reguli, s-au folosit instrucțiunile IF, de salt condiționat.

Pentru formarea fiecărui element din A, avîndu-se în vedere că există semnul Σ, se execută un ciclu de la 1 la 32, pornindu-se inițial de la zero și adăugîndu-se succesiv valoarea nouă. De exemplu, pentru elementul din linia 6 și coloana 7, $\sum_{i=1}^{32} x_1(i)^2\, x_5(i)^2$, se scrie:

$$A(6,7) = A(6,7) + x_1(i)^{U_1(j,\,1)}\; x_2(i)^{U_1(j,\,2)}\; x_3(i)^{U_1(j,\,3)} \times x_4(i)^{U_1(j,\,4)}\; x_5(i)^{U_1(j,\,5)},$$

avînd, conform celor de mai sus, valorile: $\alpha = U_1(j, 1) = 2$; $\beta = U_1(j, 2) = 0$; $\gamma = U_1(j, 3) = 0$; $\delta = U_1(j, 4) = 0$; $\lambda = U_1(j, 5) = 1$.

După 32 cicluri se obține valoarea reală a lui A (6, 7).

Pentru a se cunoaște valorile lui x_{ii}, se formează inițial niște vectori: $x_1(32)$; $x_2(32) \ldots x_5(32)$, $y(32)$, ce cuprind datele inițiale aranjate conform programului factorial de experimentare.

Coloana 22 din matricea A, este formată din elementele următoare (scrise sub formă transpusă);

$$\sum_{i=1}^{32} y_i;\ \Sigma x_{1i}y_i;\ \Sigma x_{2i}y_i;\ \Sigma x_{3i}y_i;\ \Sigma x_{4i}y_i;\ \Sigma x_{5i}y_i;\ \Sigma x_{1i}^2y_i;\ \Sigma x_{2i}^2y_i;\ \Sigma x_{3i}^2y_i;$$

$$\Sigma x_{4i}^2y_i;\ \Sigma x_{5i}^2y_i;\ \Sigma x_{1i}x_{2i}y_i;\ \Sigma x_{1i}x_{3i}y_i;\ \Sigma x_{1i}x_{4i}y_i;\ \Sigma x_{1i}x_{5i}y_i;\ \Sigma x_{2i}x_{3i}y_i;$$

$$\Sigma x_{2i}x_{4i}y_i;\ \Sigma x_{2i}x_{5i}y_i;\ \Sigma x_{3i}x_{4i}y_i;\ \Sigma x_{3i}x_{5i}y_i;\ \Sigma x_{4i}x_{5i}y_i.$$

Calculul acestor elemente s-a făcut separat de calculul celorlalte elemente ale matricei A, prin formarea unui ciclu de la $i = 1$ la $i = 32$ și calcularea succesivă a sumei corespunzătoare fiecărui element.

Astfel, s-a format un vector D (21), deci cu 21 linii, cuprinzînd elementele indicate mai sus, scriindu-se:

$$D(1) = D(1) + x_1(i)y(i);$$
$$D(2) = D(2) + x_2(i)y(i);$$
$$\vdots$$
$$D(17) = D(17) + x_2(i)x_5(i)y(i);$$
$$\vdots$$
$$D(20) = D(20) + x_4(i)x_5(i)y(i);$$
$$D(21) = D(21) + y(i).$$

4. VALOAREA MINIMĂ A PUTERII

Matematic, se poate ca după găsirea relației propuse, să se calculeze valoarea minimă a lui y, egalîndu-se cu zero derivatele parțiale ale lui y în raport cu parametrii x_i:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = b_1 + 2b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 + b_{15}x_5 = 0;$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_5} = b_5 + 2b_{55}x_5 + b_{15}x_1 + b_{25}x_2 + b_{35}x_3 + b_{45}x_4 = 0.$$

Sistemul obținut se scrie matriceal:

$$\begin{pmatrix} 2b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{12} & & & & \\ \vdots & & & & \\ b_{15} & . & . & . & 2b_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}.$$

5. REZULTATE EXPERIMENTALE

În urma experimentărilor efectuate, s-au obținut valorile puterii instantanee y_i.

Pe baza acestor rezultate, s-a obținut relația:

$$y = -1{,}023 + 3{,}08 \cdot 10^{-2}x_1 + 0{,}649x_2 - 0{,}371x_3 + 3{,}5 \cdot 10^{-2}x_4 - 2{,}1x_5 +$$
$$+ 2{,}96 \cdot 10^{-5}x_1^2 + 10{,}96\,x_2^2 + 7{,}49 \cdot 10^{-3}x_3^2 + 1{,}74 \cdot 10^{-4}x_4^2 + 0{,}327\,x_5^2 -$$
$$- 3{,}63 \cdot 10^{-2}\,x_1x_2 + 2{,}77 \cdot 10^{-3}\,x_1x_3 - 3{,}66 \cdot 10^{-4}\,x_1x_4 - 1{,}477 \cdot 10^{-3}\,x_1x_5 +$$
$$+ 0{,}532\,x_2x_3 - 1{,}14 \cdot 10^{-2}\,x_2x_4 + 0{,}568\,x_2x_5 - 4{,}425 \cdot 10^{-3}\,x_3x_4 + 0{,}558\,x_3x_5 -$$
$$- 1{,}34 \cdot 10^{-3}\,x_4x_5.$$

Relația găsită a fost verificată de datele experimentale, constatîndu-se o precizie suficientă. Se constată că toți factorii aleși au influență majoră asupra puterii instantanee, cea mai mică fiind influența unghiului de atac. De asemenea, se poate preciza că numai o relație de acest tip poate aproxima suficient de precis fenomenele complexe ce apar la așchiere.

Calcularea valorilor parametrilor care asigură valoarea minimă a puterii, nu este concludentă prin anularea derivatelor parțiale, cum s-a arătat mai sus. Această situație apare deoarece parametrii ce intervin la așchiere sînt condiționați de o serie de restricții.

Problema se pune deci astfel : cunoscîndu-se funcția de eficiență :

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_{45} x_4 x_5,$$

să se găsească valoarea sa minimă, respectîndu-se următoarele restricții :

— rugozitatea impusă : $f_1(x_i) < R_a$:
— precizia impusă : $f_2(x_i) < P$;
— productivitatea minimă : $f_3(x_i) > Q$;
— costul prelucrării : $f_4(x_i) < C$;
— caracteristicile mașinii-unelte : $f_5(x_i) < D$ etc.

Se constată că funcția de eficiență este neliniară, iar funcțiile restricții pot fi neliniare sau liniare, deci s-a ajuns la o problemă de programare neliniară.

Funcția de eficiență fiind pătratică, se poate folosi, pentru unele cazuri particulare, metoda minimului cu legături, prin utilizarea multiplicatorilor lui Lagrange. Se pot folosi și alte metode, indicate în [1] și în alte lucrări despre optimizări.

Relația stabilită, care corespunde condițiilor medii de lucru, se poate aplica, luîndu-se în considerare condițiile specifice piesei, mașinii-unelte și ale atelierului în care se lucrează.

Metoda utilizată are caracter de generalitate, fiind aplicabilă și pentru alte materiale și alte operații de prelucrare prin așchiere.

Prin utilizarea acestei metode, se pot stabili regimurile de așchiere optime din punct de vedere energetic, asigurîndu-se mari economii de energie la așchiere.

Primită la redacție la 24 februarie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. I. DUMITRESCU ș. a. *Aplicații inginerești ale calculatoarelor. Optimizări.* Edit. did. și ped., București, 1977.
2. IULIAN POPESCU, *Bazele așchierii și generării suprafețelor*, Reprografia Univ. Craiova, 1981.
3. IULIAN POPESCU. *Economii de energie la așchiere*, Raport către CNST și MICM, 18. XII. 1978.
4. IULIAN POPESCU, *Optimizarea regimurilor de așchiere după criteriul energetic.* Comunicare la sesiunea de comunicări științifice. Inst. de înv. superior, Sibiu, 26.X.1979.

ASPECTE TEORETICE PRIVIND INFLUENȚA VITEZEI DE ANTRENARE ȘI A AMORTIZĂRII ASUPRA PARAMETRILOR MIȘCĂRII SACADATE (Stick-slip)

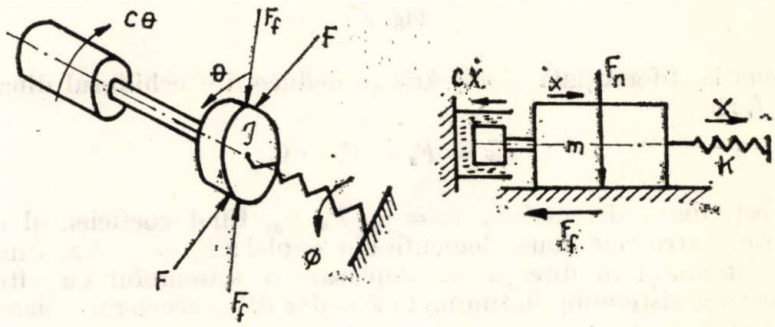
de A. TUDOR, LI CHUN BO
Institutul politehnic București

Lucrarea analizează mișcarea de stick-slip în condițiile amortizării create în zona de contact ca urmare a frecării limită, în cele două perioade (lipire și alunecare relativă). Corelația dintre coeficientul de frecare static și cel cinetic se consideră că este influențată de procesul de difuzie ce are loc între cele două elemente ale cuplei de frecare în timpul perioadei de lipire.
Cu aceste considerente se pune în evidență caracterul mișcării, optimul vitezei de antrenare din punctul de vedere al amplitudinii mișcării și stabilitatea mișcării.

1. INTRODUCERE

Funcționarea cuplelor de frecare cu viteze de alunecare mici în regim de ungere tehnic uscat sau limită este însoțită de cele mai multe ori de sacadări ale mișcării, fenomen cunoscut sub numele de „stick-slip".

Acest fenomen poate apare în cazul mișcării de rotație sau de translație (fig. 1 *a*, *b*) și a fost studiat de numeroși cercetători. Blok și Deria-



a. b.

Fig. 1

guin presupun un model de frecare la care forța de frecare statică este constantă și urmată instantaneu de forța de frecare cinetică care se menține constantă pe toată perioada de slip [1], [3], iar Cockerham și Cole [3], Antoniou și alții [4] iau în considerație o amortizare liniară [3], respectiv neliniară a mișcării [4].

Lucrarea de față își propune să prezinte caracteristicile mișcării de stick-slip și condițiile de apariție ale acesteia luînd în considerație corelația coeficientului de frecare static și cinetic prin intermediul procesului de difuzie ce are loc între cele două elemente ale cuplei de frecare în timpul perioadei de stick.

2. ECUAȚIILE MIȘCĂRII

Se va analiza influența forței de frecare asupra caracteristicilor mișcării în cele două faze ale sale; faza în care cele două elemente ale cuplei sînt lipite (stick) și se deplasează sub sarcină împreună și faza de alunecare relativă a celor două elemente (slip).

a. PERIOADA DE STICK

În această perioadă, asupra elementelor cuplei acționează forța normală F_n, forța sistemului elastic F_r și forța de frecare statică F_s, așa cum se observă în figura 2.

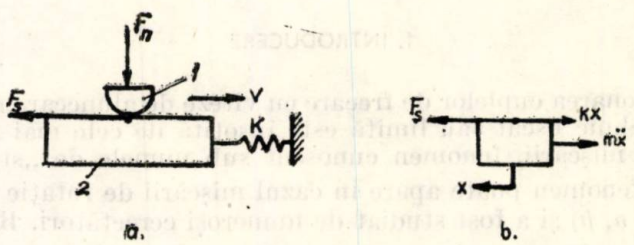


Fig. 2

Ecuația diferențială a mișcării se deduce din echilibrul dinamic al acestor forțe;

$$m\ddot{x} = F_s + F_r = 0, \tag{1}$$

unde m este masa sistemului; $F_s = \mu_{as} F_n$, μ_{as} fiind coeficientul de frecare static dintre cele două elemente ale cuplei; $F_r = -Kx$, fiind rigiditatea sistemului în direcția de deplasare a sistemului cu viteza v; x — deplasarea sistemului în timpul t; $\ddot{x} = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ — accelerația sistemului.

Condițiile inițiale necesare rezolvării ecuației (1) sînt:

$$\text{la momentul } t = 0 \quad \begin{cases} \dot{x} = v, \\ x = 0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \end{cases} \tag{2}$$

unde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ sînt constante ce se vor determina din ecuația mișcării din perioada de alunecare.

Cu aceste condiții inițiale, soluțiile ecuației (1) indică o variație liniară a deplasării așa cum se observă în figura 3.

Durata perioadelor de „stick" și implicit valorile deplasărilor x_0, x_1, $x_2, \ldots x_n$ sînt determinate de echilibrul forțelor F_r și F_s și deci :

$$x_0 = \frac{\mu_{as0} F_n}{K}, \quad x_1 = \frac{\mu_{as1} F_n}{K}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\mu_{asn} F_n}{K}. \tag{3}$$

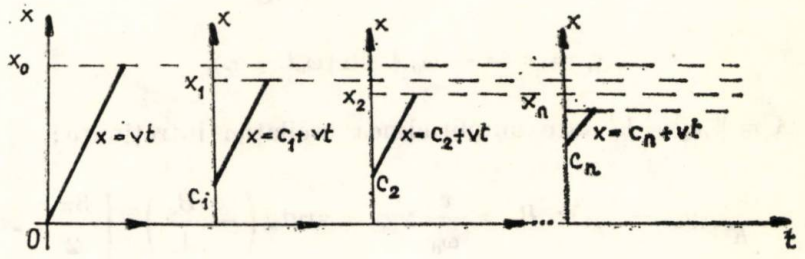


Fig. 3

Folosind ipoteza că procesul de difuzie are influență asupra coeficientului de frecare static, se deduce [6] :

$$\mu_{as} = \mu_{ak} + \frac{h_d}{h_m} = \mu_{ak} + \frac{\sqrt{Dt}}{h_m} \tag{4}$$

în care μ_{ak} reprezintă coeficientul de frecare cinetic caracteristic perioadei de „slip" și este constant pentru o aceiași geometrie a cuplei și a aceluiași regim de frecare ; h_d — adîncimea de difuzie $h_d = \sqrt{Dt}$, D fiind parametrul de difuzie dependent de energia de activare și de temperatura locală de difuzie [7] ; h_m — adîncimea de interacțiune mecanică ca urmare a sarcinii normale și a ariei reale de contact și este independentă de timp.

b. PERIOADA DE SLIP

Atunci cînd forța sistemului elastic F_r depășește valoarea forței de frecare statice F_s elementul 2 al cuplei de frecare se desprinde de elementul 1 și are o viteză relativă, $v_r = \dot{x}$, ce se determină din ecuația mișcării și din condițiile inițiale, în ipoteza unui regim de frecare tehnic uscat (amortizarea vîscoasă nulă) ;

$$m\ddot{x} + Kx = \mu_{ak} F_n,$$

$$t = 0, \quad x = \frac{\mu_{as} F_n}{K}, \tag{5}$$

$$t = 0, \quad v_r = \dot{x} = v.$$

Notînd $\frac{K}{m} = \omega_0^2$ (ω_0 — pulsația proprie a sistemului de masă m și rigiditate K), din (5) se deduc expresiile deplasării și vitezei în timpul perioadei de „slip"

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_n}{K} \cdot \mu_{ak}, \tag{6}$$

$$v_r = \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{6'}$$

unde $A = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$ este amplitudinea oscilației întreținute;

$$A_0 = \frac{F_n}{K}(\mu_{as} - \mu_{ak}); \; B_0 = \frac{v}{\omega_0}; \; \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{B_0}{A_0}\right) \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

Ținînd seama de (4) și (5), se deduce : $A_0 = \frac{F_n \sqrt{Dt}}{K h_m} = \left(\frac{F_n}{K h_m}\right)^2 \frac{D}{v}$.

Din analiza ecuației (6) se observă că dacă viteza de acționare v este mică în comparație cu viteza relativă v_r de „slip" ($B_0 \approx 0$, $\varphi \approx 0$), trecerea de la perioada de „stick" la cea de „slip" este bruscă așa cum se observă din figura 4, caracterul mișcării fiind rectiliniu.

Cînd viteza v crește, defazajul φ se apropie de valoarea $-\pi/2$, trecerea de la perioada de „stick" la perioada „slip" se face lent, caracterul mișcării fiind sinusoidal, luînd aspectul unor vibrații autoîntreținute.

Funcționarea cuplei de frecare într-un mediu de ungere (de obicei ulei mineral) conduce la existența unei amortizări vîscoase (γ) dependentă de viteza de alunecare relativă din perioada de „slip". În această ipoteză acceptată de diverși cercetători, ecuația diferențială a mișcării se deduce din condiția de echilibru dinamic al forțelor ce acționează asupra masei m (fig. 5) :

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx = \mu_{ak} F_n \tag{7}$$

sau

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{\mu_{ak} F_n}{m}, \tag{7'}$$

notînd $K/m = \omega_0^2$ (pulsația proprie sistemului elastic) și $\gamma/m = 2\delta$ (amortizarea specifică), ecuația (7') devine :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu_{ak} \frac{F_n}{m}. \tag{8}$$

Felul mișcării depinde de natura rădăcinilor ecuației caracteristice asociate ecuației diferențiale (8).

Cele trei situaţii posibile (amortizare subcritică, critică şi supracritică) conduc la următoarele soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (8):

Cazul I — amortizare subcritică:

$$x = A\,e^{-\delta t}\cos(\omega t + \rho) + \mu_{ak}\cdot\frac{F_n}{K}, \tag{9}$$

$$\dot{x} = -A\,e^{-\delta t}\sqrt{\delta^2 - \omega^2}\cos(\omega t + \varphi - \alpha), \tag{9'}$$

unde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ şi $\alpha = \operatorname{arctg}\,\omega/\delta$.

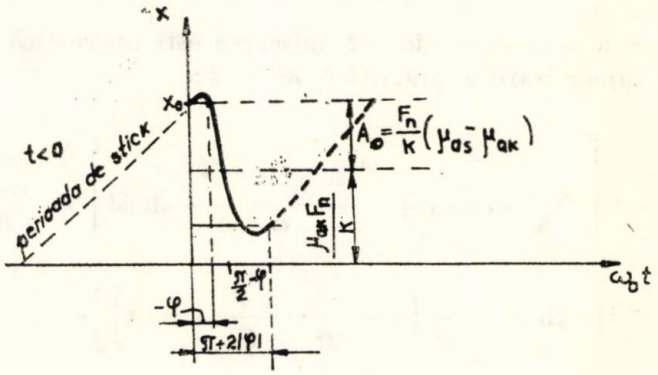


Fig. 4

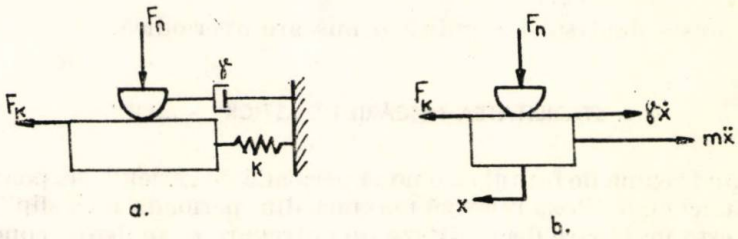


Fig. 5

Utilizînd condiţiile iniţiale:

$$\text{pentru } t = 0;\ x = \frac{\mu_{as}F_n}{K} \text{ şi } \dot{x} = v_r = v, \tag{10}$$

se pot determina valorile amplitudinii A şi defazajului ρ:

$$A = \sqrt{\left[\frac{F_n}{K}(\mu_{as} - \mu_{ak})\right]^2 + \left[\frac{\delta}{\omega}\frac{F_n}{K}(\mu_{as} - \mu_{ak}) + \frac{v}{\omega}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{A_0^2 + \left(\frac{\delta}{\omega}A_0 + B\right)^2}, \tag{11}$$

unde $B = v/\omega$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{-\left(\frac{\delta}{\omega}A_0 + B\right)}{A_0}$.

Cazul *II* — amortizare critică $\delta^2 = \omega_0^2$:

$$x = e^{-\delta t}\left[\left(v + \frac{\delta}{K}\mu_{as}F_n\right)t + \frac{\mu_{as}F_n}{K}\right] + \mu_{ak}\frac{F_n}{K}, \tag{12}$$

$$\dot{x} = e^{-\delta t}\left[v - \delta t\left(v - \frac{\delta}{K}\mu_{as}F_n\right)\right]. \tag{12'}$$

După cum se observă din (12) mișcarea este aperiodică.
Cazul III — amortizare supracritică $\delta^2 > \omega_0^2$:

$$x = e^{-\delta t}\left[\frac{\mu_{as}F_n}{K}\operatorname{ch}\omega t + \frac{v + \frac{\delta}{K}\mu_{as}F_n}{\omega}\operatorname{sh}\omega t\right] + \frac{\mu_{ak}F_n}{K}, \tag{13}$$

$$\dot{x} = e^{-\delta t}\left[v\operatorname{ch}\omega t - \frac{\delta}{\omega}\left(v - \frac{\omega_0^2}{\delta^2}\cdot\frac{\mu_{as}F_n}{K}\cdot\operatorname{sh}\omega t\right)\right], \tag{13'}$$

în care $\omega^2 = \delta^2 - \omega_0^2$.

Expresia deplasării x indică o mișcare aperiodică.

3. STABILITATEA MIȘCĂRII DE „STICK" — „SLIP"

Ținînd seama de faptul că o nouă perioadă de „stick" se poate forma, numai atunci cînd viteza relativă maximă din perioada de „slip" ($\dot{x}_{max} = v_{r\,max}$) este mai mare decît viteza de antrenare v, se deduc condițiile de stabilitate ale mișcării și implicit modalitățile practice de reducere a amplitudinii fenomenului.

Din analiza mișcării în cazul frecării uscate (caz rar întîlnit în tehnică datorită formării în zona de contact a unor straturi de oxizi) se observă că întotdeauna se formează o nouă perioadă de „stick-slip" indiferent de viteza de antrenare, însă, mărimea acestei viteze conduce la autovibrații.

Pentru cazul cel mai des întîlnit în funcționarea cuplelor de frecare (amortizare vîscoasă subcritică) interesează valoarea maximă a vitezei relative, care se obține din (9') punînd condiția $\ddot{x} = 0$.

$$\dot{x}_{max} = A\omega_0 e^{-\frac{\delta}{\omega}\left(\frac{3}{2}\pi + 2\alpha - \varphi\right)}\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) =$$

$$= A\omega_0 e^{-\frac{\delta}{\omega}\left(\frac{3}{2}\pi + 2\alpha - \varphi\right)}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}}. \tag{14}$$

Pentru formarea unei noi perioade de „stick" este necesar ca $\dot{x}_{max} > v$. Respectînd această restricție, se deduce:

$$0 < v < \sqrt{\frac{-a_2}{a_1}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{a_1 \cdot a_3}{a_2^2}}} = v_{max}, \tag{15}$$

unde

$$a_1 = \frac{1}{\omega^2}\left[1 - e^{\frac{\delta}{\omega}(3\pi + 4\alpha - 2\varphi)}\right] \tag{16}$$

și este totdeauna negativ;

$$a_2 = \frac{\delta}{\omega}\left(\frac{F_n}{Kh_m}\right)^2 \frac{D}{\omega}, \tag{17}$$

$$a_3 = D^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{F_n}{Kh_m}\right)^4. \tag{18}$$

Din analiza restricției (15) de apariție a unei perioade noi de „stick" se observă dependența vitezei atît de rigiditatea și masa sistemului, cît și de condițiile locale ale contactului (componenta fluidă a frecării caracterizată de amortizare, încărcarea normală, deformația microgeometriei sub sarcină, intensitatea difuziei locale).

4. AMPLITUDINEA MIȘCĂRII

Mărimea amplitudinii depinde de durata perioadei de lipire și implicit de mărimea coeficientului de frecare static și de viteza de alunecare.

În cazul frecării uscate (amortizarea vîscoasă nulă) mărimea „stick-ului" (A_0) are o dependență liniară de mărimea coeficientului de frecare static, care la rîndul lui depinde de condițiile locale ale contactului.

Astfel se deduce:

$$A = \sqrt{\left(\frac{F_n}{Kh_m}\right)^4 \left(\frac{D}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2}. \tag{19}$$

Valoarea minimă a amplitudinii mișcării se deduce din expresia (19), punînd condițiile $\partial A/\partial v = 0$ și $\partial^2 A/\partial v^2 > 0$ și are forma:

$$A_{min} = \sqrt{2}\,\frac{F_n}{Kh_m}\sqrt{\frac{D}{\omega_0}}, \tag{20}$$

iar viteza optimă corespunzătoare acestui minim este

$$v_0 = \frac{F_n}{Kh_m}\sqrt{D\omega_0}. \tag{21}$$

Ordonînd (19) și ținînd seama de (20) și (21) se deduce variația amplitudinii în funcție de viteza care este reprezentată în figura 6.

Din această figură se constată corespondența calitativă a acestor rezultate teoretice cu rezultatele experimentale obținute de numeroși cercetători, indicînd existența unei viteze optime din punctul de vedere al amplitudinii „stickului" [2], [4], [5], [8]. Pentru aceiași sarcină normală și microgeometrie, valoarea amplitudinii mișcării în cazul absenței amortizării vîscoase depinde de pulsația proprie a sistemului (ω_0) așa cum se observă din familia de curbe ($\omega_{01} > \omega_{02} > \omega_{03} > \ldots > \omega_{0n}$) ilustrată în figura 6 (curba punctată unește minimile amplitudinilor).

În figura 7 se indică variația parametrului adimensional A/A_{min} în funcție de raportul v/v_0, din care se observă existența unui minim, creșterea amplitudinii fiind mult mai pronunțată pentru rapoarte v/v_0 subunitare, decît pentru rapoarte supraunitare.

În cazul *regimului de ungere limită sau mixt*, cînd sarcina normală se transmite atît prin intermediul fluidului, cît și prin contactul direct al asperităților, amplitudinea mișcării sacadate este dependentă atît de amortizare, cît și de parametrii specifici frecării uscate așa cum se indică în relația (11).

Notînd $\bar{A} = e^{-\delta t} A$ și ținînd seama că timpul t necesar formării unei noi perioade de „slip" este $t = \left(\frac{F_n}{Kh_m}\right)^2 \frac{D}{v^2}$, se deduce :

$$\bar{A} = e^{-\delta \left(\frac{F_n}{Kh_m}\right)^2 \frac{D}{v^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}} \sqrt{\left(\frac{F_n}{Kh_m}\right)^4 \frac{D^2}{v^2} + \frac{v^2}{\omega_0^2} + \frac{2\delta D}{\omega_0^2} \left(\frac{F_n}{Kh_m}\right)^2}. \tag{22}$$

Analizînd ecuația (22), se deduce că valoarea optimă a vitezei din punctul de vedere al amplitudinii $\bar{A}$, nu depinde de amortizare și se determină cu relația (21).

Amortizarea are influență mare asupra mărimii amplitudinii totale $\bar{A}$; astfel, corespunzător vitezei optime, amplitudinea totală are expresia :

$$\bar{A}|_{v_0} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{D}{\omega_0}} \frac{F_n}{Kh_m} \frac{e^{-\delta/\omega_0}}{\sqrt{1 - \delta/\omega_0}} \tag{23}$$

și este reprezentată grafic în figura 8 pentru diferite sarcini specifice (F_n/Kh_m și același cuplu de material (oțel-oțel).

Se observă că amplitudinea totală este minimă (0,8559 A) pentru o amortizare specifică (δ/ω_0) egală cu 0,5 și că această amplitudine este mai mică decît în cazul frecării uscate numai pentru amortizări specifice mai mici de 0,7975.

Prin această dependență se pune în evidență necesitatea ca amortizarea specifică realizată de lubrifiant să corespundă zonei de minim, altfel nu este utilă din punctul de vedere al amplitudinii mișcării sacadate. Pentru amortizări specifice mai mari de 0,7975 (uleiuri foarte vîscoase) amplitudinea crește față de cazul frecării uscate foarte rapid în funcție de mărimea încărcării specifice. Pentru valori ridicate ale acestei încărcări

((12....14) . 10^4) creșterea amplitudinii este foarte bruscă, astfel încît la o amortizare specifică de 0,9 amplitudinea crește de 4...5 ori față de amplitudinea mișcării sacadate în domeniul frecării tehnic uscate și în aceleași condiții de sarcină, microgeometrie și material.

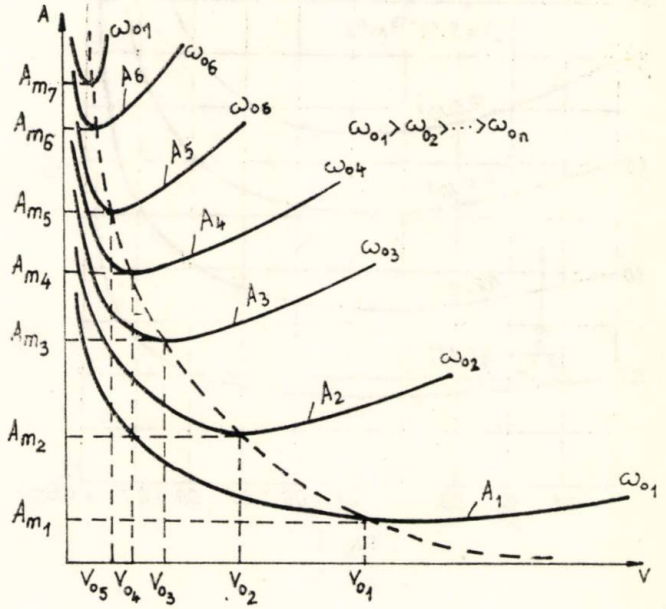


Fig. 6

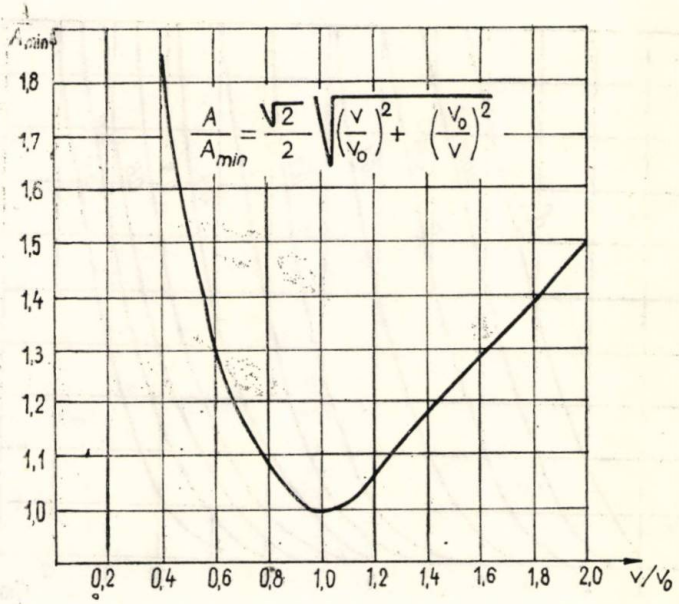


Fig. 7

Amortizarea are influență diferită asupra amplitudinii mișcării în funcție de viteza de antrenare, așa cum se observă din figura 9. Curbele

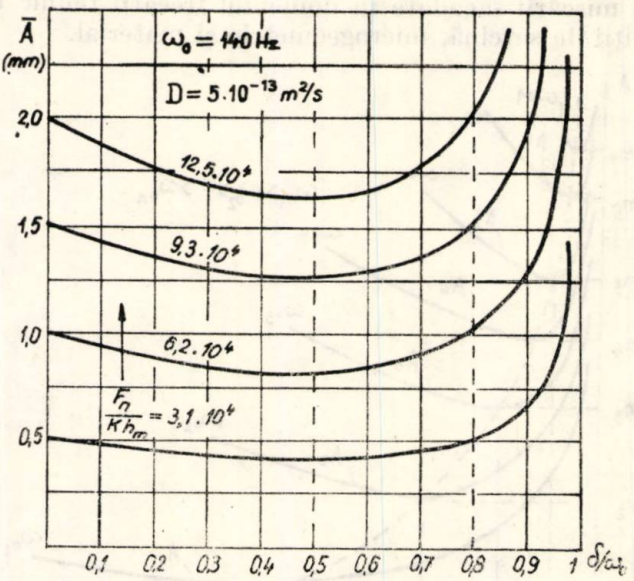


Fig. 8

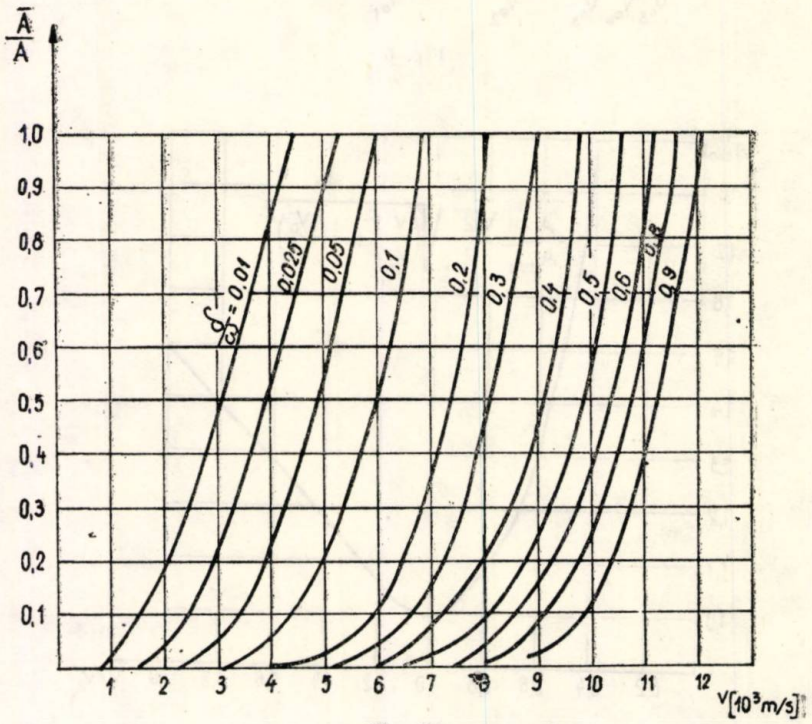


Fig. 9

s-au determinat pentru condițiile specifice standului din dotarea laboratorului catedrei Organe de mașini din Institutul politehnic București ($K = 1{,}24 \cdot 10^4$ N/m, $\omega_0 = 140$ Hz), cuplele fiind executate din oțel aliat 21 M_0MC 12 cu rugozitate medie $R_z = 0{,}8$ μm și duritatea superficială 58 HRC. Încărcarea specifică $F_n/Kh_m = 3{,}1 \cdot 10^3$, a condus la o temperatură medie de 45°C pentru care $D \approx 5 \cdot 10^{-13}$ m²/s [7].

Pentru aceste condiții, la o amortizare specifică $\delta/\omega_0 = 0{,}5$, viteza maximă pînă la care fenomenul apare este de $8{,}2 \cdot 10^{-3}$ m/s, iar amplitudinea $\bar{A} = 0{,}142 \cdot 10^{-3}$ m.

În lipsa amortizării ($\delta/\omega_0 = 0$), viteza optimă v_0 în aceleași condiții are valoarea 0,025 m/s, iar amplitudinea A, la viteza de $0{,}2 \cdot 10^{-3}$ m este de 100 de ori mai mare decît $\bar{A}$.

5. CONCLUZII

Din cele prezentate se remarcă multitudinea parametrilor ce se intercondiționează în procesul de frecare la viteze mici. Amplitudinea mișcării sacadate și condițiile de apariție ale acesteia constituie parametrii cei mai importanți din punctul de vedere al efectelor lor asupra funcționării cuplelor de frecare.

În cazul frecării tehnic uscate există un minim al amplitudinii cu variația vitezei de antrenare; viteza optimă este dependentă de încărcarea cuplei de frecare și efectele acesteia asupra microgeometriei, F_n, h_m, de rigiditatea K și masa sistemului m, ω_0.

De remarcat, că în domeniul vitezelor mici ($v < v_0$) caracterul mișcării indică un salt brusc de la perioada de „stick" la perioada de „slip", iar la viteze mai mari mișcarea are un caracter sinusoidal. Condițiile formării unei perioade de „stick" în cazul frecării uscate, sînt îndeplinite pentru orice viteză de antrenare, însă amplitudinea mișcării devine nesemnificativă, mișcarea luînd aspectul autovibrațiilor.

Funcționarea cuplelor de frecare la viteze mici și într-un regim tehnic uscat este rar întîlnită în tehnică (procese de ambreiere, frecare în vid), mai ales că formarea oxizilor modifică regimul de ungere într-un regim limită.

De aceia se consideră că majoritatea cuplelor de frecare cu viteze de alunecare mici funcționează într-un regim de ungere limită sau mixt. Valoarea vitezei de alunecare nu poate contribui esențial la formarea unei pelicule continue de lubrefiant (regim fluid de ungere), deși geometria cuplei de frecare ar permite formarea unei portanțe fluide.

În condițiile apariției unei componente fluide a forței de frecare în zona de contact, amortizarea nu mai poate fi neglijată, efectele acesteia asupra mărimii amplitudinii indică, pentru valori reduse (pînă la amortizări specifice $\delta/\omega_0 < 0{,}7975$), că amplitudinea este mai mică decît amplitudinea în cazul frecării uscate.

Ponderea influenței amortizării specifice asupra amplitudinii mișcării sacadate este dependentă de viteza de antrenare și are valoarea minimă corespunzător vitezei optime.

Un aspect important al mișcării sacadate îl constituie faptul că amortizarea limitează apariția fenomenului cu variația vitezei de antrenare. Pentru valori ale acestei viteze mai mari decît v_{max} (15) fenomenul este complet amortizat, iar pentru amortizări specifice (δ/ω_0) apropiate de 0,5 valoarea amplitudinii este minimă pentru orice viteză de antrenare inferioară celei maxime.

Primită la redacție la 4 februarie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. B. V. DERIAGUIN, V. E. PUSH, D. M. TOLSTOI *A theory of „stick-slip" silding of solids*, Proc. Conf. on Lubric. and Wear, London, Inst. Mech. Eng. London, 1957, p. 255—268.
2. R. BELL, M. BURDEKIN, *study of „stick-slip" motion of machine tool feed drives*, Proc. Inst. Mech. Eng. London, **184**, Pt. 1 (3) 543—557 (1969—70).
3. G. COCKERHAM, M. COLE, *Stick-Slip stability by analogue simulation*, Wear, **36**, 189—198. (1976).
4. S. S. ANTONIU, A. CAMERON and C. R. GENTLE, *The friction-speed relation from stick-slip data*, Wear, **36**, 235—254 (1976).
5. D. PAVELESCU, B. DIMITROV, *Wear under stick-slip conditions*, Univ. Mancester Pergamonn Press, Oxford, 1970, p. 633—640.
6. A. TUDOR, LI CHUN BO, *Influența difuziei asupra coeficienților de frecare statici și cinetici*, St. Cercet. Mec. Apl. (în curs de publicare).
7. B. S. BOKSTEIN, *Difuzia v metallah*, Moskva, „Metallurghia", 1978.
8. L. CIGAN, *Influența principalilor factori ai frecării asupra alunecării intermitente la ghidajele mașinilor unelte*, St. cerc. mec. apl., **27**, 5, p. 1079—1089 (1968).

CERCETĂRI TRIBOLOGICE ŞI TEORETICO-EXPERIMENTALE ÎN VEDEREA ELABORĂRII TEHNOLOGIEI OPTIME DE METALIZARE ÎN JET DE PLASMĂ A FUSURILOR DE ARBORI COTIŢI

de TRAIAN CANŢĂ
Institutul politehnic Bucureşti

Metalizarea prin pulverizare în jet de plasmă — procedeu tehnologic relativ nou — s-a dezvoltat continuu în ultimii ani datorită cercetărilor teoretico-experimentale şi a încercărilor de laborator (uzură, metalografie, tribologie etc.) combinate cu probe de anduranţă. Acest lucru a permis valorificarea cercetărilor prin extinderea unui număr tot mai mare de aplicaţii.
Cercetările teoretice s-au îndreptat asupra jetului de plasmă, a fenomenelor complexe care au loc la formarea jetului de plasmă şi a pulverizării materialelor de adaos.
În lucrare se analizează posibilităţile de folosire a două gaze de lucru la formarea jetului de plasmă, punîndu-se în evidenţă relaţiile analitice şi metodologice de calcul ; acest lucru a permis ulterior, optimizarea pe calculator, a parametrilor tehnologiei de încărcare a arborilor, evidenţierea corectă a uzurii duzelor de pulverizare şi elaborarea optimă a proceselor tehnologice de acoperire a fusurilor de arbori.
Cercetările teoretico-experimentale au fost efectuate în cadrul Institutului de cercetări şi proiectări tehnologice în transporturi — M.T.Tc., şi aplicate curent în atelierele de metalizare din cadrul Centralei industriale de reparaţii auto — MTTc şi în atelierul de metalizare al Intreprinderii de transporturi Bucureşti.

0. INTRODUCERE

Metalizarea prin pulverizare inventată de elveţianul Max Ulrich Schoop în anul 1910, s-a extins continuu în timp, ajungîndu-se astăzi la un număr de peste 15 procedee oxiacetilenice, în arc electric şi în jet de plasmă, procedee care folosesc instalaţii din ce în ce mai perfecţionate şi materiale de adaos tot mai complexe.

Un aport deosebit în dezvoltarea procedeelor de metalizare l-au avut şi cercetările tribologice, care au permis studierea caracterului discret al contactului suprafeţelor, multitudinii parametrilor şi complexităţii fenomenului frecare-uzare-ungere, ş. a. S-au pus în evidenţă astfel, natura forţelor de frecare, caracterul suprafeţelor de contact, formarea şi ruperea structurilor de suprafaţă (oxizi limită, de reacţie etc.), caracterul uzării, influenţa şi acţiunea mediului, transformările suferite de straturile de suprafaţă. [1].

Condiţiile energetico-dinamice ale metalizării prin pulverizare, folosind flacăra oxiacetilenică sau arcul electric, nu permit realizarea unor viteze mari ale jetului, în timp ce utilizarea plasmei asigură atît viteze mari

ale jetului (1—3 Mach), cît și un domeniu de temperaturi extrem de ridicat ($20-30 \cdot 10^3$ °F).

Jetul de plasmă și-a găsit cea mai largă utilizare în depunerea pe suprafața pieselor noi sau uzate a unor straturi cu proprietăți fizico-mecanice de excepție, utilizînd o varietate mare de materiale de adaos noi (carburi, oxizi, fluoruri, ceramice etc.).

În ultimii ani, datorită cercetărilor complexe de laborator și experimentale, îndreptate atît asupra instalațiilor și materialelor de adaos, cît și asupra tehnologiei de aplicare, s-a ajuns la modernizarea și automatizarea procedeului, factori care au permis introducerea lui pe scară industrială în domenii cu totul noi ; tehnică spațială, electronică, aeronautică, chimie etc. [21, 22, 24].

Studiile și cercetările fundamentale privind metalizarea în jet de plasmă, au fost orientate în următoarele direcții principale : comportamentul fizic al jetului de plasmă privind caracteristicile fundamentale ale fluxului de plasmă, din punctul de vedere al gradului de ionizare, al temperaturii, al vitezei, al densității și al entalpiei lui ; optimizarea distanței de pulverizare în funcție de temperatura jetului ; fenomenele fizico-chimice care apar la trecerea materialelor de adaos prin jetul de plasmă ; pulverizarea materialelor ceramice ; optimizarea parametrilor tehnologici de încărcare în jet de plasmă etc.

Folosirea plasmei la încărcarea fusurilor de arbori, a impus efectuarea de cercetări teoretico-experimentale atît asupra jetului de plasmă, cît și în ceea ce privesc condițiile de funcționare ale arborilor [1, 9, 11—13].

1. ELEMENTE ALE JETULUI DE PLASMĂ

Cunoașterea parametrilor jetului de plasmă este de o reală importanță pentru stabilirea unor date accesibile și utile pentru studiul procesului de metalizare prin pulverizare. În acest domeniu, un număr mare de cercetători cunoscuți pe plan mondial, printre care Zaat, Ingham, Steffens, Houben, Milewski, Hrach, Marantz, Okada, Koch, Bobrov și alții au publicat o serie de lucrări, unele analizînd cu precădere jetul de plasmă, altele aducînd contribuții importante la lămurirea fenomenelor ce apar în utilizarea jetului de plasmă ca mijloc de efectuare a operațiilor de metalizare.

Plasma caracterizează o stare excepțională a materiei obținută prin ionizarea unui gaz sub acțiunea energiei termice, fiind considerată a patra stare a materiei, deoarece nu respectă legile fizicii și termodinamicii, legi verificate de gaze prin ridicarea temperaturii lor ; este, totodată, neutră din punct de vedere electric, avînd un număr egal de particule pozitive și negative, care respectă distanța spațială Debye [14] ;

$$d = \left(\frac{kT}{4\pi n_e \cdot e_0^2} \right)^2 . \tag{1.1}$$

Considerînd, schematic, o secțiune printr-un pistolet în zona duzei de pulverizare (fig. 1) se poate pune în evidență relația dintre forma geometrică a arcului și factorii care îi determină echilibrul termodinamic, forțele Lorentz care iau naștere, presiunea jetului de plasmă.

Zaat [16] și Maecker [14] au studiat fenomenul complex al deplasării jetului de plasmă, arătînd că forța F sub acțiunea căreia are loc deplasarea jetului prin duză, se determină cu relația

$$F = \frac{I^2}{C^2} \ln \frac{d_2}{d_1}. \tag{1.2}$$

Studiul analitic al procedeelor de metalizare cu ajutorul jetului de plasmă impune cunoașterea proprietăților legate de transportul masei și căldurii prin plasmă. În literatura de specialitate, unii parametrii principali, cum ar fi vîscozitatea, conductibilitatea electrică și termică a gazului, sînt cunoscuți ca funcții de temperatura plasmei. Se impune deci, cunoașterea în primul rînd a acestui principal parametru. Totodată, gradul de ionizare al gazului care generează plasma are influență directă asupra parametrilor esențiali ai jetului de plasmă.

Din aceste motive, s-a căutat ca pe baza ecuațiilor care guvernează scurgerea materiei în stare de plasmă (ecuația de stare a gradului de ioni-

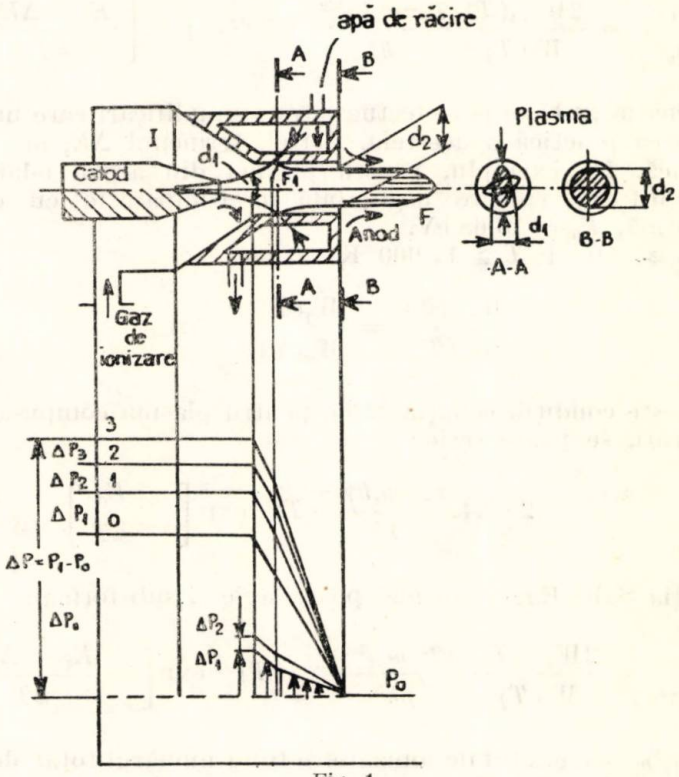


Fig. 1

zare, a entalpiei, ecuația energiei, precum și ecuația de continuitate), să se deducă o metodă de calcul, astfel încît, cunoscînd o serie de parametri, determinați prin măsurători directe pe o instalație experimentală, să se poată calcula cu ușurință valorile caracteristicilor de bază ale plasmei, care influențează cu precădere procesul de metalizare.

Studiul teoretic s-a efectuat plecîndu-se de la analiza jetului de plasmă al unui gaz monoatomic, extinzîndu-se apoi astfel încît să fie folosit la aplicațiile practice curente, în care se utilizează un amestec de gaz, unul monoatomic, iar celălalt biatomic, de exemplu, argon cu hidrogen.

Legat de modificarea gradientului de temperatură, a contracției arcului și a cîmpurilor electromagnetice, se consideră ca fenomene principale: difuzia ambipolară și efectul Pinch de autoconstrîngere sub acțiunea forțelor Lorentz și a cîmpurilor electromagnetice [18].

2. STABILIREA ECUAȚIILOR CARE GUVERNEAZĂ SCURGEREA ÎN JETUL DE PLASMĂ

Plasma, la presiunea atmosferică și în absența unui cîmp electric puternic, satisface, cu aproximații acceptabile, condițiile echilibrului termodinamic. Aceste condiții se pot scrie sub forma ecuației cunoscute Saha-Eggert [14, 16], care, la rîndul ei, se bazează pe distribuția Bolzmann:

$$\frac{n_{z-1}n_e}{n_0} = \frac{2W_{z+1}(T)}{W_z(T)} \frac{(2\pi m_e k)^{3/2}}{h^3} \times T^{3/2} \exp - \left[\frac{E_z - \Delta E_z}{kT}\right]. \quad (2.1)$$

În ecuația (2.1) se pot efectua cîteva simplificări care nu afectează aplicabilitatea practică a acesteia. Astfel, termenul ΔE_z are în general valoare mică. De exemplu, pentru plasma din argon odată ionizat, $(\Delta E_0)_{max} = 0{,}1$ eV, valoare neglijabilă în comparație cu energia de ionizare totală, $E_0 = 15{,}68$ eV.

Dacă $z = 0$ și $T \cong 17\,000$ °K, atunci

$$\frac{W_{z+1}(T)}{W_z(T)} = \frac{W_1(T)}{W_0(T)} = 5{,}4. \quad (2.2)$$

În aceste condiții, ecuația (2.1), pentru plasma compusă din atomi odată ionizați, se poate scrie:

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = 2 \cdot 5{,}4 \frac{(2\pi m_e k)^{3/2}}{h^3} T^{3/2} \exp\left[-\frac{E_0}{kT}\right]. \quad (2.3)$$

Ecuația Saha-Eggert se mai poate scrie și sub forma:

$$\frac{\tau^2}{1-\tau^2} = \frac{2W_{z+1}(T)}{W_z(T)} \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{ph^3} \times (kT)^{5/2} \exp\left[-\frac{E_z - \Delta E_z}{kT}\right] \quad (2.4)$$

unde $\tau = n_z/n$ este gradul de ionizare, n fiind numărul total de particule „grele" (particule cu nucleu) pe unitatea de volum, iar $n = n_0 + n_1$, pentru plasma odată ionizată.

Ecuațiile echivalente (2.1) și (2.4) dacă se împart între ele, rezultă

$$\frac{n_{z+1}n_e}{n_z} \frac{1-\tau^2}{\tau^2} = \frac{p}{kT}. \quad (2.5)$$

Pentru prima treaptă de ionizare ($z = 0$, $z+1 = 1$), se obține:

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = \frac{p}{kT}\frac{\tau^2}{1-\tau^2}. \tag{2.6}$$

Ținînd sema că

$$\begin{aligned} n_1 &= \tau n, \\ n_e &= n_1 = \tau n, \\ n_0 &= n - n_1 = n(1-\tau) \end{aligned} \tag{2.7}$$

și luînd în considerare ecuația de stare, pentru un gaz ionizat, sub forma

$$n = \frac{p}{(1+\tau)kT},$$

rezultă

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau}{1+\tau}\frac{p}{kT} = n_e, \\ n_0 &= \frac{1-\tau}{1+\tau}\frac{p}{kT}. \end{aligned} \tag{2.7'}$$

De unde

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = \frac{\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^2 \left(\frac{p}{kT}\right)^2}{\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)\frac{p}{kT}} = \frac{\tau^2}{1-\tau^2}\frac{p}{kT}. \tag{2.8}$$

Revenind la situația plasmei ionizate odată și ținînd seama de simplificările introduse mai sus, ecuația (2.4) se poate scrie:

$$\frac{\tau^2}{1-\tau^2} = k_3 \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{ph^3}(kT)^{5/2}\exp\left[-\frac{E_0}{kT}\right], \tag{2.9}$$

unde $k_3 = 2 \cdot 5{,}4$.

Notînd

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3}k^{5/2} \\ k_2 &= \frac{E_0}{k} = \frac{eU_0}{k} \end{aligned} \tag{2.10}$$

ecuația (2.10) devine :

$$\frac{\tau^2}{1-\tau^2} = k_3 \frac{k_1}{p} T^{5/2} \exp\left[\frac{-k_2}{T}\right]. \tag{2.11}$$

Explicitînd gradul de ionizare, ecuația (2.11) devine :

$$\tau = \sqrt{\frac{T^{5/2} \exp\left(\frac{-k_2}{T}\right)}{\frac{p}{k_1 k_3} + T^{5/2} \exp\left(\frac{-k_2}{T}\right)}}. \tag{2.12}$$

Pentru plasma formată avînd drept gaz de lucru numai argon, valorile celor trei constante sînt :

$$k_1 = 3{,}35 \cdot 10^{-2}\,; \quad k_2 = 18{,}2 \cdot 10^4\,; \quad k_3 = 10{,}8.$$

În cazul unui amestec de gaze, de exemplu argon și hidrogen (în proporție de maximum 15—20%), k_1 și k_3 rămîn aceleași, modificîndu-se numai k_2, funcție de aportul fiecărui gaz în amestec.

Pe baza celor arătate mai sus, s-au stabilit cinci ecuații care guvernează scurgerea în jetul de plasmă, și anume :

— gradul de ionizare : $\tau \Rightarrow$ vezi (2.12)

— ecuația de stare : $p = (1+\tau)\rho R_{kg} T$,

— entalpia : $H = \frac{5}{2}(1+\tau) R_{kg} T + \tau R_{kg} k_2$, (2.13)

— ecuația energiei : $W - q_{kw} = \Phi_m H + \frac{1}{2}\Phi_m V^2$,

— ecuația de continuitate : $\Phi_m = \rho V A$.

În acest sistem de ecuații intervin următoarele două grupe de zece parametri principali, care caracterizează fenomenul generării plasmei : grupa I (p, w, q_{kw}, Φ_m și A), grupa a II-a (T, p, V, H și ρ). Parametrii din grupa I s-au măsurat direct sau indirect pe instalația de metalizare, iar cei din grupa a II-a s-au calculat pe baza sistemului de ecuații (2.13).

3. INSTALAȚIA DE METALIZARE ÎN JET DE PLASMĂ ȘI MATERIALELE DE ADAOS FOLOSITE LA EXPERIMENTĂRI

Pentru efectuarea programului de cercetări tribologice și de laborator, de încărcare a fusurilor manetoane și paliere ale arborilor cotiți, s-a utilizat o instalație de metalizare prin pulverizare în jet de plasmă, tip

„Metco-Inc."-S.U.A., prevăzută cu pistoletul „3MB", existentă în dotarea I.C.P.T.T., I.N.C.R.E.S.T. și a Centrului de terotehnică I.T.B. (fig. 2).

Părțile principale ale instalației de metalizare sînt prezentate în figura 2 : *1* — conductă de alimentare cu apă distilată ; *2* — conductă retur apă

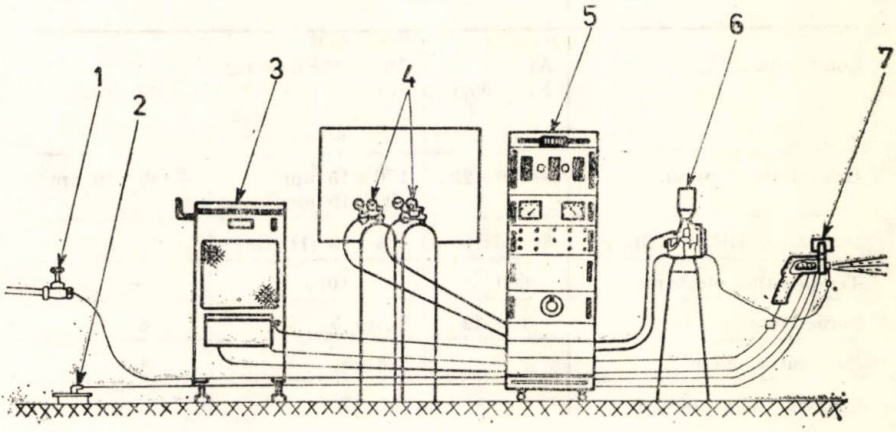


Fig. 2

distilată ; *3* — instalație de putere pentru alimentarea pistoletului, tablolui de comandă și a dozatorului de pulberi (tip 2MR) ; *4* — instalație de alimentare cu gaze, argon și hidrogen (tip 3GN și 3 GH) ; *5* — tablou de comandă și control al funcționării instalației ; *6* — dozator de alimentare cu pulberi (tip 3MP) *7* — pistolet de metalizare.

Sistemul de injecție al pulberii în jetul de plasmă asigură posibilitatea pulverizării controlate a oricărui tip de material, indiferent de temperatura lui de topire.

Instalația oferă de asemenea posibilitatea unui control atît al parametrilor instalației și ai pistoletului, cît și ai unor parametri tehnologici principali ai piesei.

Unul din marile avantaje ale pulverizării în jet de plasmă îl reprezintă diversitatea materialelor de adaos noi care pot fi folosite la încărcarea suprafețelor metalice. Grupele de pulberi metalice aliate care pot fi pulverizate se împart în cîteva categorii principale : toate metalele (unele combinații deosebite, wolframul, molibdenul, carburile etc.) oxizii metalici (de aluminiu, de zirconiu, de crom, de titan etc.), sărurile metalice (carburile de crom, titan și wolfram ; carburile speciale combinate, de titan cu nichel și wolfram cu cobalt ; ceramicele metalice (granule de oxizi acoperite cu straturi metalice), combinații metalice auto-fondante.

În tabelul 1, se prezintă caracteristicile principale ale pulberilor folosite la încărcarea fusurilor de arbori cotiți.

Tabelul 1

Materiale de adaos pentru metalizarea arborilor cotiți

Caracteristicile pulberilor metalice	Tipul pulberii		
	Ni—Al (exotermă)	Aliaj Mo	Oxizi crom (strat funcțional)
Compoziția, %	Al = 4,5 ; Ni = 95,5	Mo = 75 ; Cr = 4,25 B = 0,8 ; Si = 1 ; Al = 1 ; C = 0,2 ; Ni = restul	99 Cr_2O_3
Granulația, u.mesh.	−170+235	170+15 um 90+15 um	−140+10 um
Duritatea, HRB, HRC	80 (HRB)	45—50 (HRC)	60 (HRC)
Temperatura de topire, °C	660	1025	2330
Porozitatea, %	10—12	8	8
Densitatea, g/cm³	—	8,25	4,8
Coeficientul de frecare	—	0,12	—

4. SOLUȚIONAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII, PRELUCRAREA ȘI ANALIZA DATELOR CU AJUTORUL CALCULATORULUI

Rezolvarea sistemului neliniar de cinci ecuații (2.13) s-a efectuat prin metoda numerică iterativă de calcul numeric Newton-Raphson, folosind un calculator electronic, metodă care a permis optimizarea parametrilor tehnologici utilizați la încărcarea în jet de plasmă a suprafețelor metalice [23, 25].

Considerînd necunoscutele : $x_1 = T$; $x_2 = \rho$; $x_3 = V$; $x_4 = H$; $x_5 = \tau$, sistemul (2.13) devine :

$$x_5^2 \left[\frac{p}{k_3 k_1} + x_1^{5/2} \exp\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \right] = x_1^{5/2} \exp\left(-\frac{k_2}{x_1}\right),$$

$$p = (1 + x_5)\, x_2\, R_{kg}\, x_1,$$

$$x_4 = \frac{5}{2}(1 + x_5)\, R_{kg}\, x_1 + x_5\, R_{kg}\, k_2, \qquad (4.1)$$

$$W - q_{kw} = \Phi_m x_4 + \frac{1}{2} \varnothing_m x_3^2,$$

$$\varnothing_m = x_2 x_3 A.$$

După calcularea derivatelor corespunzătoare, pe baza metodei Newton-Raphson, după un număr de iteraţii $m+1$, sistemul se poate exprima sub formă matriceală, prin relaţia:

$$[D]_m \cdot \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ -f_3 \\ -f_4 \\ -f_5 \end{Bmatrix}_m \qquad (4.2)$$

sau

$$[D]_m \{\Delta x\}_m = \{F\}_m. \qquad (4.3)$$

Creşterile Δx rezultă imediat, rezolvînd sistemul (4.2):

$$\{\Delta x\}_m = [D]_m^{-1} \{F\}_m.$$

Cunoscînd datele iniţiale prezentate anterior şi avînd valorile parametrilor şi constantelor ce intervin în ecuaţii — definite prin calcule preliminare — s-a trecut la soluţionarea sistemului de ecuaţii neliniare, prin conceperea unui program de calcul, avînd schema logică din figura 3.

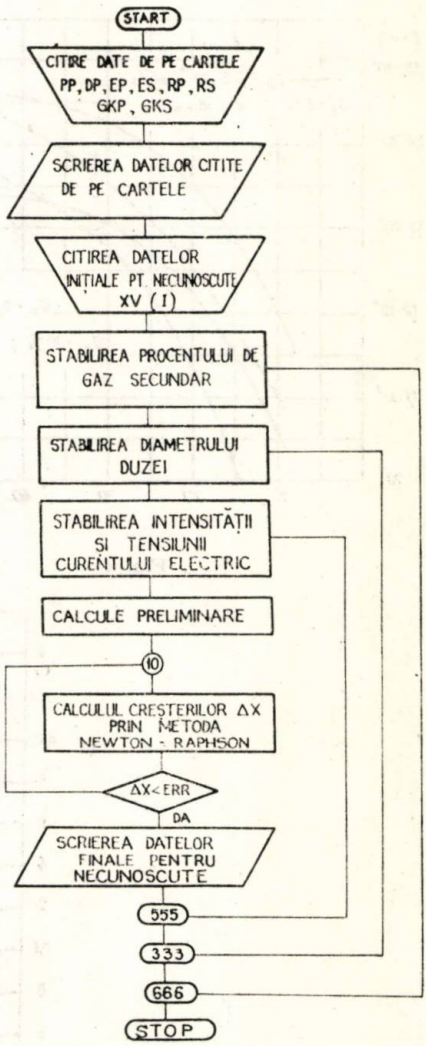


Fig. 3

Desfăşurarea activităţii de rezolvare a sistemului de ecuaţii (4.1) cu ajutorul calculatorului IBM 360/40 Fortran 4, a fost dirijată în domeniile care au putut fi reproduse experimental ($Q_p = 3{,}5-10 \cdot 10^{-4}$ m^3/s; $Q_s=(5-20)\%Q_p$; $d = 5-10$ mm; $W = 10-50$ kw; $I = 300-700$ A; $U = 30-70$ V), punîndu-se în evidenţă toate combinaţiile posibile între parametrii principali: T, V, τ, $E = f(W, I, d)$. Pentru exemplificare se prezintă cîteva diagrame optimizate cu ajutorul calculatorului. Astfel, în figura 4 se arată variaţia temperaturii jetului de plasmă în funcţie de puterea instalaţiei, la diferite viteze de pulverizare a jetului, avînd drept parametri constanţi, în primă variantă, $Q_p = 3{,}5 \cdot 10^{-4}\, m^3/0$; $Q = 5\%$; $d=8$ mm, iar în cea de-a doua variantă, $Q_p = 6{,}87 \cdot 10^{-4}$ m^3/s; $Q_s=10\%Q_p$; $d = 8$ mm.

În lucrările [16] şi [28], Zaat şi Hantzsche au prezentat variaţii similare $V = f(W)$.

Considerîndu-se un debit variabil al gazului primar de la 3,5 la 6,87 $\cdot 10^{-4}$ m^3/s și puteri ale instalației cuprinse între 20—30 kw, s-au trasat curbele de variație ale gradului de ionizare funcție de diametrul duzei de pulverizare (fig. 5).

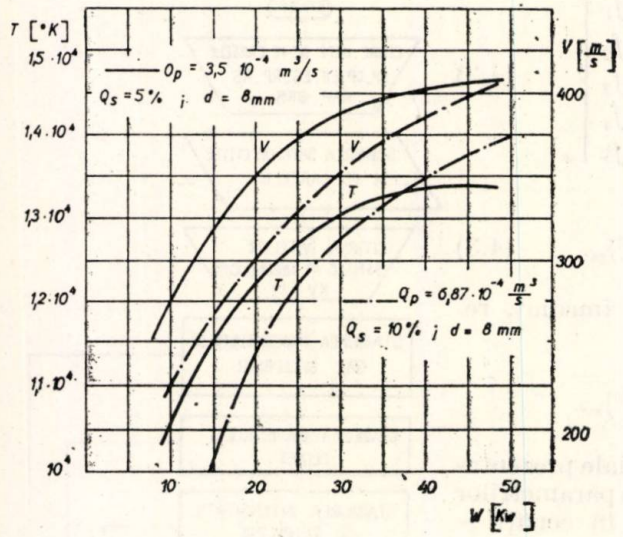


Fig. 4

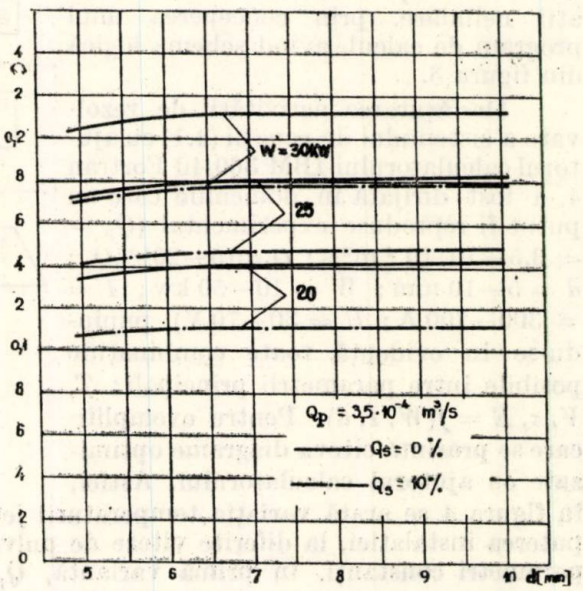


Fig. 5

În figura 6 se prezintă variația entalpiei cu debitele gazelor primar și secundar în diferite condiții de lucru.

Cercetările de laborator efectuate cu ajutorul instalației de metalizare, corelate cu rezultatele obținute cu ajutorul calculatorului, au permis optimizarea următorilor parametri principali $P = 25$ kw; $d = 7{,}5$ mm; $Q_p = 6{,}5 - 7$ m^3/s (argon); $Q_s = (10-15)\%\ Q_p$ (hidrogen); $I = 400-500$ A; $U = 80V$; $d_p = 150$ mm.

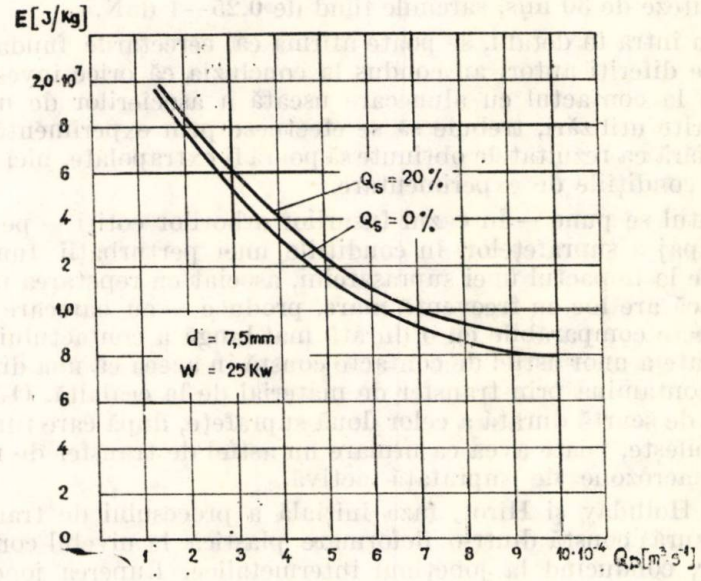


Fig. 6

5. CONSIDERAȚII ASUPRA PROCESULUI DE FRECARE ÎN LAGĂRELE DE ALUNECARE CIRCULARE

Deși în lagărele de alunecare ale arborilor cotiți, procesul de frecare se produce în regim hidraulic, este necesar să se scoată în evidență fenomenul de frecare uscată — condiții de funcționare limită în cazuri accidentale — pentru a găsi materiale rezistente la contactul uscat, spre a evita fenomenul de gripare, care conduce la distrugerea atît a cuzineților, cît și a fusurilor manetoane și paliere ale arborelui cotit.

La definirea materialelor de adaos necesare la experimentările de laborator și de anduranță s-a ținut seama de regulile de compatibilitate stabilitate de R. Davies: a) metalele solicitate să nu fie solubile unul în altul, să nu formeze compuși diferiți și nici aliaje; b) unul din metale să facă parte din subgrupa elementelor aflate la dreapta coloanei Ni-Pd-Pt din tabela periodică a elementelor, metalele din aceeași categorie dînd uzuri mai mari.

Totodată, trebuie respectată condiția ca metalele să nu sufere în procesul de frecare o modificare fizică de stare, adică în zona contactului, căldura generată prin frecare să nu modifice esențial proprietățile mecanice ale acestora. Condițiile complexe care apar în situațiile limită (forță de

frecare, viteză, presiune de contact, durată contact) impun calități antigripante pentru materialele suprafețelor în frecare.

Cercetările fundamentale efectuate de F. P. Bowden, Johnson, Swickert și Brisson au avut contribuții importante și au condus la concluzii importante. Astfel, s-a constatat că în cazul cuplului oțel-oțel, coeficienții de frecare trebuie să fie peste 0,55 — la viteze pînă la 12 m/s și de 0,25 — la viteze de 30 m/s, sarcinile fiind de 0,25—1 daN.

Fără a intra în detalii, se poate afirma că, cercetările fundamentale efectuate de diferiți autori au condus la concluzia că orice investigare a comportării la contactul cu alunecare uscată a asocierilor de materiale pentru diferite utilizări, trebuie să se efectueze prin experimentări de la caz la caz, fără ca rezultatele obținute să poată fi extrapolate, nici în ceea ce privește condițiile de experimentare.

Accentul se pune — în cazul fusurilor arborilor cotiți — pe o rezistență la gripaj a suprafețelor, în condițiile unei perturbații funcționale provenite de la impactul unei suprasarcini, asociat cu repetarea impactului care, dacă are loc cu frecvență mare, produce — cu oarecare aproximație — efecte comparabile cu o durată mai lungă a contactului. O altă particularitate a unor astfel de contacte constă în aceea că una din suprafețe se va contamina prin transfer de material de la cealaltă. O atingere accidentală de scurtă durată a celor două suprafețe, după care filmul portant se stabilește, poate avea ca urmare un astfel de transfer de material chiar pe macrozone de suprafață activă.

După Holliday și Hirot, faza inițială a procesului de transfer de material (uzură) constă dintr-o deformare plastică la nivelul contactelor suprafețelor, conducînd la joncțiuni intermetalice. Ruperea joncțiunilor adezive conduce la formarea unor produse de uzură libere și la zgîrîierea suprafeței conjugate, de frecare. Produsele de uzură oxidate rezultă atît în stratul superficial inițial al suprafețelor, cît și din oxidarea particulelor de metal curat. Din aceste cercetări s-a reținut concluzia importantă că — pentru rezistență la gripaj și la uzură — îndepărtarea mai mare sau mai mică, de particule dintr-un metal, respectiv cantitatea de particule libere ce participă la contactul între cele două suprafețe este esențială pentru cuplul respectiv [2, 3, 4, 10].

6. CERCETĂRI TRIBOLOGICE ȘI FIZICO-CHIMICE DE LABORATOR PRIVIND CUPLURILE DE MATERIALE DE ADAOS

Pentru optimizarea tehnologiei de încărcare a fusurilor de arbori cotiți prin metalizare în jet de plasmă, s-a efectuat un program complex de experimentări (fig. 7).

Pentru definirea cuplurilor de materiale s-a urmărit:

a) comportarea la frecare uscată a diverselor cupluri de materiale, la viteze periferice mari, pentru a scoate în evidență proprietățile antigripante, de rezistență la uzură, de contact uscat; b) urmărirea la frecare uscată a diverselor cupluri de materiale, în regim fluid, la viteze periferice mici, pentru a se scoate în evidență rezistența la uzură în condiții de ungere

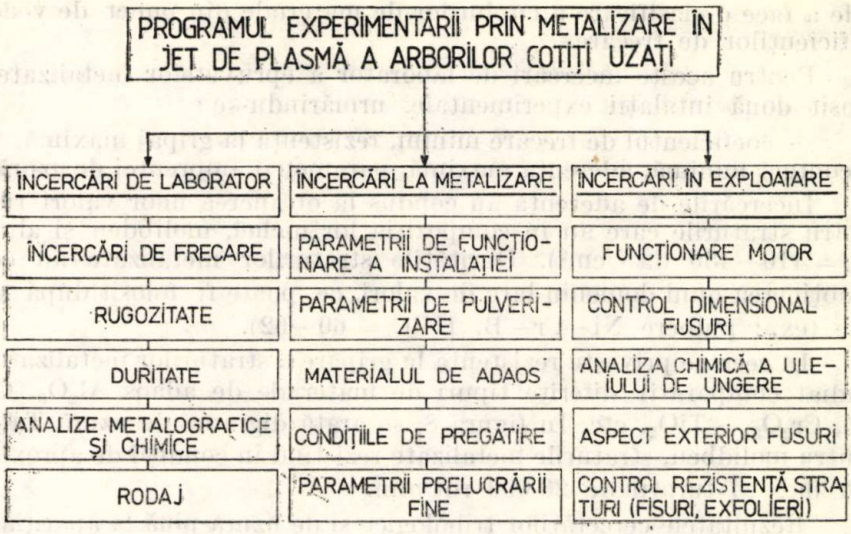

PROGRAMUL EXPERIMENTĂRII PRIN METALIZARE ÎN JET DE PLASMĂ A ARBORILOR COTIȚI UZAȚI
ÎNCERCĂRI DE LABORATOR
ÎNCERCĂRI DE FRECARE
RUGOZITATE
DURITATE
ANALIZE METALOGRAFICE ȘI CHIMICE
RODAJ
ÎNCERCĂRI LA METALIZARE
PARAMETRII DE FUNCȚIONARE A INSTALAȚIEI
PARAMETRII DE PULVERIZARE
MATERIALUL DE ADAOS
CONDIȚIILE DE PREGĂTIRE
PARAMETRII PRELUCRĂRII FINE
ÎNCERCĂRI ÎN EXPLOATARE
FUNCȚIONARE MOTOR
CONTROL DIMENSIONAL FUSURI
ANALIZA CHIMICĂ A ULEIULUI DE UNGERE
ASPECT EXTERIOR FUSURI
CONTROL REZISTENȚĂ STRATURI (FISURI, EXFOLIERI)

Fig. 7

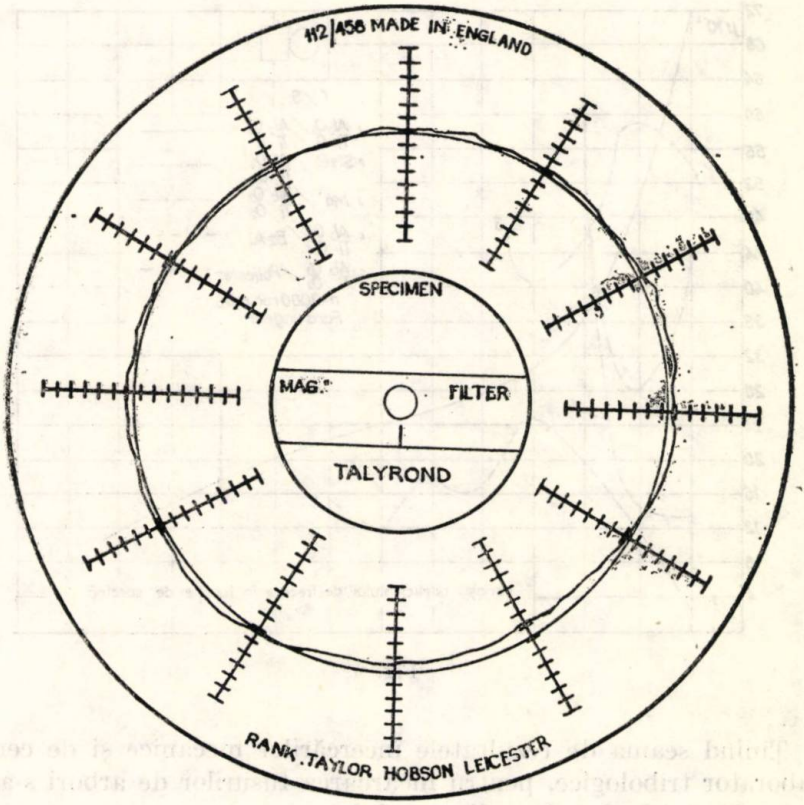

112/458 MADE IN ENGLAND
SPECIMEN
MAG.
FILTER
TALYROND
RANK.TAYLOR HOBSON LEICESTER

Fig. 8

și de a face o clasificare a cuplurilor de materiale din punct de vedere al coeficienților de frecare.

Pentru aceste încercări de laborator a epruvetelor metalizate s-au folosit două intalații experimentale, urmărindu-se :

— coeficientul de frecare minim, rezistența la gripaj maximă, uzura de contact minimă, aderența maximă, parametrii amprentei de uzură etc.

Încercările de aderență au condus la obținerea unor valori ridicate pentru straturile care au în compoziția lor nichel, molibden și aluminiu ($\sigma_c = 410-430$ daN/cm^2). Durităților straturilor metalizate au condus la obținerea unui domeniu larg de valori, ce poate fi folosit după necesitate (ex. : pulbere Ni—Cr—B, HRC = 60—62).

În ceea ce privește rezistența la gripare a straturilor metalizate, s-au studiat comparativ diferite tipuri de materiale de adaos Al_2O_3, Cr_2O_3, Mo, $Cr_2O_3 + TiO_2$, etc. În figura 8, se arată digrama de uzură Talyrond pentru molidben, straturile metalizate rezistînd în condiții de aproximativ 100 daN și turații de 26 000 rot/min.

Rezultatele cercetărilor tribologice și de uzură pînă la apariția fenomenului de gripare sînt prezentate în figura 9 și 10.

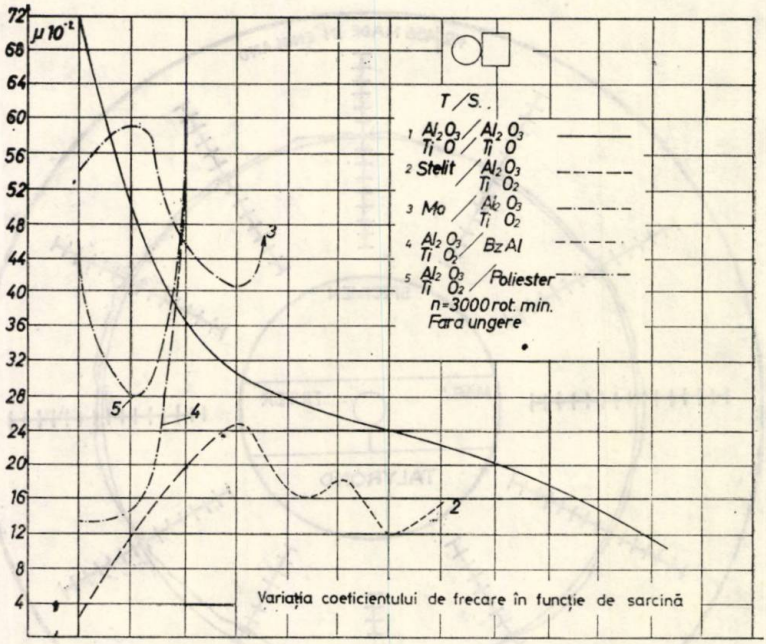


Fig. 9

Ținînd seama de rezultatele încercărilor mecanice și de cercetările de laborator tribologice, pentru încărcarea fusurilor de arbori s-au selecționat materialele de adaos din tabelul 1.

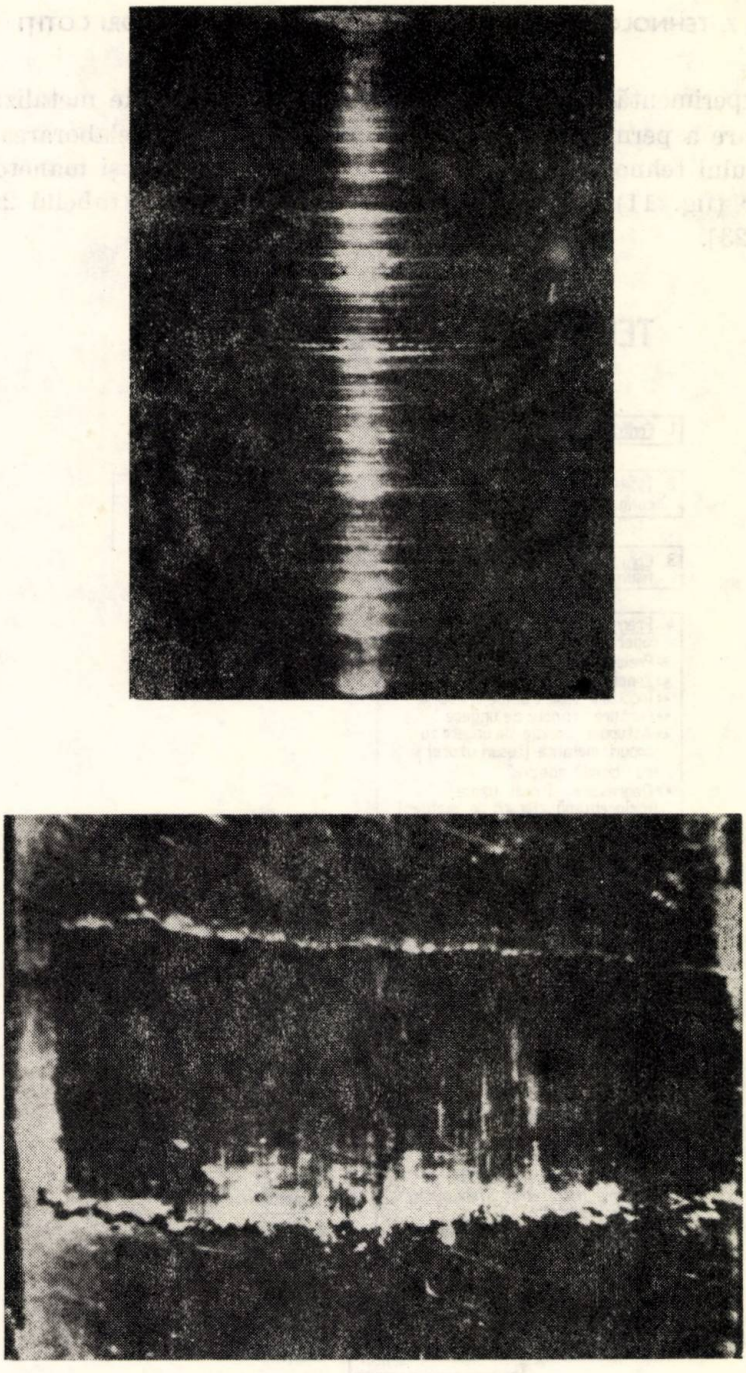


Fig. 10

7. TEHNOLOGIA DE ÎNCĂRCARE A FUSURILOR DE ARBORI COTIȚI

Experimentările efectuate cu celelalte procedee de metalizare prin pulverizare a permis utilizarea cu succes a plasmei la elaborarea optimă a procesului tehnologic de încărcare a fusurilor paliere și manetoane ale arborilor (fig. 11), ținînd seama de parametrii din tabelul 2. [5—8; 26, 27, 23].

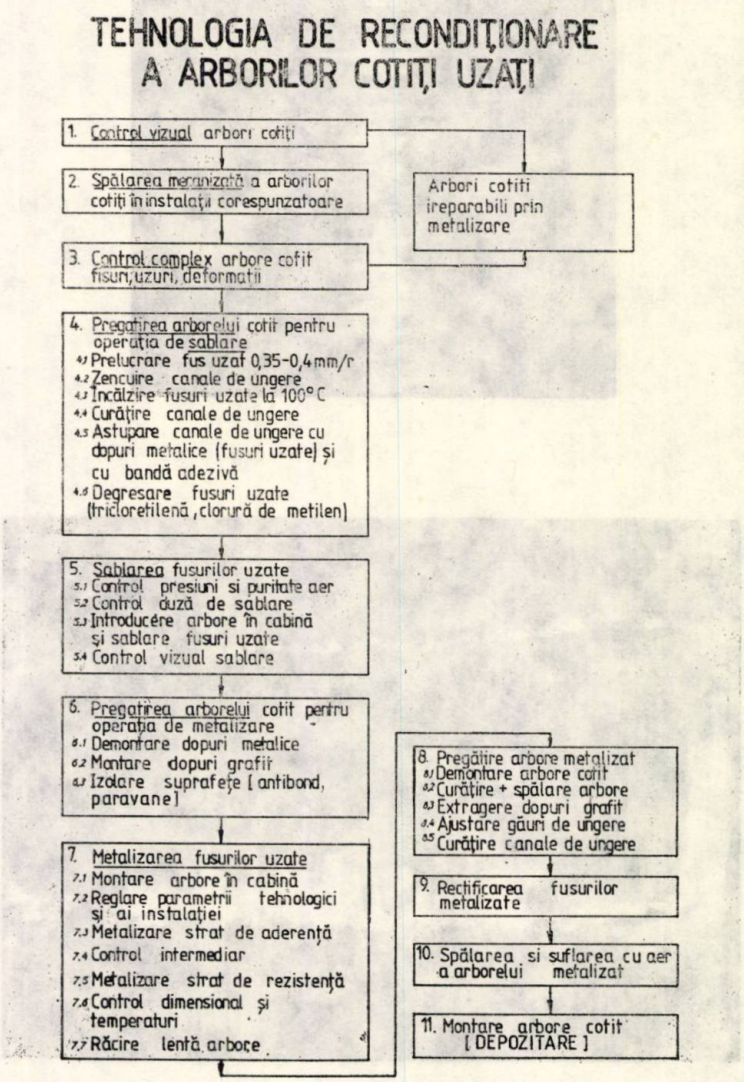


Fig. 11

Tabelul 2

Parametrii tehnologici și de utilizare a jetului de plasmă la încărcarea fusurilor de arbori.

Denumirea parametrului	Materialul de adaos		
	Pentru aderență (aliaj Ni—Al)	Pentru stratul de rezistență	
		(aliaj Mo)	(Cr_2O_3)
A. *Parametri instalației*			
Intensitatea curentului de alimentare, I (A)	500	400	450
Tensiunea curentului U (V)	50—60	60—80	60
Presiune primară	100	100	100
Presiune secundară	50	50	50
Debit aer primar	80	100	95
Debit aer secundar	15	20	20
Turația dozator alimentare (rot/min)	13	18	16,5
Tipul duzei de încărcare	GH	GP	GH
Dozaj recipient pulbere	68	72	74
Debit pulbere (g/min)	26	34	36
B. Parametri tehnologici			
Temperatura de preîncălzire a fusului arborelui °C	60—70	—	—
Distanța de pulverizare (duză-fus arbore), (mm)	150	150—180	150—180
Turația arborelui cotit (rot/min)	120	100	100
Depunere maximă la o trecere, (mm)	0,05—0,1	0,1—0,2	0,1—0,2
Viteza de deplasare a pisoletului, (mm/min)	500—1000	500—100	500—1000

8. CONCLUZII PRIVIND UTILIZAREA PLASMEI LA ÎNCĂRCAREA FUSURILOR DE ARBORI COTIȚI

Procedeul de metalizare prin pulverizare în jet de plasmă, superior altor procedee de metalizare poate fi aplicat cu succes la încărcarea arborilor cotiți, indiferent de tipul și mărimea lor.

Experimentări efectuate pe sute de arbori au permis elaborarea unei tehnologii care se încadrează pe linia preocupărilor științifice actuale de reducere a consumurilor de materiale, piese de schimb și metal aliat.

Prin metodica de cercetare teoretică și tribologică folosită și prin rezultatele tehnico-experimentale expuse în lucrare, s-a adus o contribuție importantă în ceea ce privește utilizarea tehnicii moderne de calcul la studiul parametrilor tehnologici de acoperire a suprafețelor metalic prin încărcare în jet de plasmă, folosind două gaze de lucru și o varietate mare de materiale de adaos.

Folosirea metalizării în jet de plasmă la încărcarea fusurilor de arbori are o influență pozitivă asupra durabilității și fiabilității arborilor cotiți, calității încărcării, condițiilor de lucru prin folosirea unei tehnologii moderne de acoperire.

NOTAȚIILE PRINCIPALE FOLOSITE ÎN LUCRAE

τ — conductibilitatea termică, kcal/m.oră °C;
τ — gradul de ionizare al gazului;
ΔE_z — reducerea energiei de ionizare datorită interacțiunilor Coulomb a particulelor încărcate, din plasmă;
F' — secțiunea jetului de plasmă;
p_1 — creșterea presiunii jetului de plasmă datorită compresiei magnetice;
p_2 — creșterea presiunii jetului de plasmă datorită contracției lui;
p_3 — creșterea presiunii jetului de plasmă datorită răcirii în zona anodului;
E_0 — 15,68 eV, energie de ionizare;
p — presiunea gazului;
ρ — densitatea gazului, kgm^{-3};
R_{kg} — constanta gazelor pentru un kg (de ex.: pentru argon, $R_{kg} = 208$ J/kg°K);
H — entalpia;
W — energia totală consumată de pistol;
q_{kw} — căldura evacuată de pistol și cablurile de alimentare prin apa de răcire;
$\emptyset_m$ — debitul de gaz prin arc, kg, s^{-1};
V — viteza medie de scurgere a plasmei în planul de ieșire;
T — temperatura absolută, °K;
k — constanta lui Bolzman ($1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J·kg^{-1});
m_e — masa electronului ($9{,}106 \cdot 10^{-28}$ g);
m — masa particulei;
n_z — densitatea particulelor pentru toți atomii ionizați de z ori (de exemplu, $z = 0$, pentru particule neutre, $z = 1$, pentru particule ionizate odată);
n_{z+1} — densitatea particulelor pentru toți atomii ionizați de $z+1$ ori;
n_e — densitatea electronilor;
$W_z(T)$ — funcția de partiție a atomului ionizat de z ori;
$W_{z+1}(T)$ — funcția de partiție a atomului ionizat de $z + 1$ ori;
h — $6{,}62 \cdot 10^{-34}$J·s, constanta lui Plank;
E_z — energia de ionizare a procesului de ionizare de la nivelul z la $z + 1$;
e_0 — sarcina electronului;
$d_1 \cdot d_2$ — diametrele secțiunilor plasmei în zona strangulată și liberă;
C — viteza luminii;
F — forța de deplasare a jetului de plasmă;
I — intensitatea curentului electric.

Primită la redacție la 16 februarie, 1981

BIBLIOGRAFIE

1. A. VAS ș. a., *Aplicațiile industriale ale plasmei termice*, Editura FLACĂRA, Timișoara, 1979.
1. D. PAVELESCU, *Concepții noi, calculul și aplicații în frecarea și uzarea solidelor deformabile*. Edit. Academiei R.S.România, București, 1971, p. 329.

3. GH. VASILCA ş.a., *Cercetări privind asocierea de materiale pentru lagăre cu aer*, Memoriu INCREST, Bucureşti, 1973.
4. V. GHEORGHIU, ş. a. *Cercetări în vederea elaborării tehnologiei optime de realizare a unor acoperiri prin metalizare cu jet de plasmă, utilizînd materialele ceramice, în vederea obţinerii unor cupluri de materiale rezistente la uzură şi gripare în condiţiile impuse de lagărele aerostatice, de broşele de rectificat*, Memoriu INCREST, Bucureşt, 1975, p. 22.
5. N. BADER, *The role of metallography in the flame spraying industry*, Metco-Inc., Westburry, New York, S. U. A., 1973.
6. G. J. SOLOMIR, *Wear resistant and self lubricating plasma coatings*. Nova-Werke AG, Effretiko, Switzerland, 1973.
7. L. T. BONIN, *Caractéristiques des principaux oxydes céramiques et des céramiques fines* $Al_2O_3 - Z_nO_2 - ThO_2 - BeO - MgO$, Desmarquest, C. E. C. — S.A. Franţa, 1978.
8. G. PERUGINI, ş. a., *High Reliability protective coatings for high temperature technology*. High Temperature Department, Montedison Company, Novara, Italy, 1973.
9. F. EICHORN, *Beitrag zur thermischen Belastung der Düsen von Plasmaspritzgeräten für die oberflächen — beschichtung*, Metalloberflächen, **24** (*10*), 1970, p. 386—395.
10. FL. DIMOFTE, ş. a., *Comportarea unor oxizi metalici în straturi subţiri la frecare uscată şi viteze mari şi tehnologii de depunere ai acestora*, A IV-a Conferinţă de mecanică a Academiei R. S. România, Bucureşti, 18—20 dec., 1975.
11. K. KIRNER, *Plasma spraying less common materials*, R. Bosch GmbH, Stuttgart, R.F.G., 1973.
12. H. WILSON, *Metal Spraying in Maintenance and Repair Welding Technology*, Eutectic Company Ltd., Welding and Metal Fabrication, nr. 10, oct. 1970, p. 336—393.
13. TH. MOZART ş. a., *The resistance of sprayed* Z_rO_2 *coatings against static exposure at 900°C*, Metal Research Institute, Apeldoorn, Olanda, 1977.
14. TR. SALAGEAN, ş. a., *Plasma termică pentru tăierea şi acoperirea metalelor*, Bucureşti, Editura Academiei R. S. România, 1969, p. 187.
15. H. S. INGHAM, şi A. P. SHEPARD, *Plasma Flame Process*, Flame Spray Handbook, vol. III, Metco Inc., Westburry. U. S. A., 1972.
16. J. H. ZAAT şi J. M. HOUBEN, *Analysis of the Plasma Torch*, Technische Hochschule — Eindhoven, 1973.
17. J. ROBBIANI, *Le procédé Xuperlife Eutronic GAP-Robotec.*, International Institute „Castolin + Eutectic", Lausanne, Suisse, 1979.
18. V. VESELY, ş. a., *Ceramic coatings sprayed by water-stabilised plasma torch*, Research Institute for the protection of materials, Praga, R. S. Cehoslovacia 1978.
19. A. KNOTEK, a. ş. *Reactive Kinetic Observations for spraying with Ni-Al Powder*, Technische Hochschule-Eindhoven, 1973.
20. E. MUEHLBERGER, *A High Energy Plasma Coating Process*, Plasmadyne-Goethel Inc., Santa Ana. California, 1975.
21. M. P. MALIK ş. a. *Plasma Sprayed Coatings on Aircraft and Engine Components*, Hamburg, Deutsche Lufthansa A. G., 1973.
22. J. E. HAVE, ş. a. *Ceramic for Advanced Technologies*, Aerospace Corporation, California, S. U. A., 1975.
23. TR. CANŢA, *Studii teoretico-experimentale privind folosirea jetului de plasmă la recondiţionarea arborilor cotiţi de autovehicule*. Teză de doctorat, I. P. Bucureşti, 1978.
24. TR. CANŢĂ, *Lucrările celei de a 7-a Conferinţe Internaţionale de Metalizare, Londra*, Metalurgia, *8*, 1974.
25. TR. CANŢĂ, *Încărcarea fusurilor de arbori cotiţi prin metalizare în jet de plasmă*, Transporturi şi telecomunicaţii, Bucureşti, *1*, p. 25—30.
26. TR CANŢĂ ş. a. *Reconditioning of worn auto parts by means of metallspraying techniques*, Proiect ONUDI-ROM/004, Centrul de Cercetări Terotehnice, 1976.
27. TR. CANŢĂ, C. FILIPOAIA, *Dispozitiv de etanşare pentru instalaţii industriale*, Brevet de invenţie OSIM, nr. 65980, Bucureşti, 1977.
28. H. HANTZSCHE, *Eigenschaften von plasmaspritztem Wolframkarbid*, Vortrag 5, Internationale Metallspritz Konferentz, Warshaw, Poland, 1966.

ACORDAREA MECANICĂ A TIRANȚILOR REZERVOARELOR SFERICE

de A. PAVEL, L. RIZEA, M. CULIN, C. MATEESCU, N. GRIGORE
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Lucrarea, care privește protecția antiseismică a rezervoarelor sferice, prezintă o nouă rezolvare originală a practicii pretensionării și acordării spațiale a tiranților rezervoarelor respective.

În practica depozitării industriale a gazelor lichefiate tehnice, un loc important îl ocupă rezervoarele sferice de mare capacitate. În concepție românească, asemenea rezervoare sînt rezemate pe picioare tubulare verticale, sudate la manta fie în zona ecuatorială (fig. 1 *a*), fie într-o zonă imediat subecuatorială (fig. 1 *b*), rezemarea respectivă fiind, deci, de tip discret (discontinuu).

Asigurarea conlucrării spațiale a tuturor picioarelor sistemului de rezemare și, implicit, a construcției metalice, în întregul ei ansamblu, sub acțiunea sarcinilor orizontale (eoliene, seismice, dinamice din explozii etc.), se realizează prin intermediul unor perechi de tiranți (tendoane, contravîntuiri) care trebuie să fie pretensionați (acordați) [1, 2] la același nivel de sarcină.

Acordarea corespunzătoare a tiranților (fig. 2) trebuie să fie asigurată atît la punerea în funcțiune (pentru o investiție nouă), cît și după revizii și încercări periodice, accidente tehnice sau expirarea intervalului de garanție atestat prin buletinul de acordare.

Procedeul de acordare mecanică, care se prezintă în lucrare, se bazează pe dezvoltarea în tiranți a unei anumite forțe de pretensionare cu ajutorul unor mijloace mecanice obișnuite și urmărirea realizării forței corespunzătoare cu ajutorul extensometrelor mecanice cu amplificare prin angrenaje.

Indiferent de structura sa constructivă, un extensometru mecanic cuprinde, în principal: a) vehiculul care transmite deplasarea, egală cu deformația axială Δl a bazei de măsurare l_0, la sistemul de amplificare; b) sistemul de amplificare și c) sistemul de citire sau de înregistrare a deplasării (deformației) axiale, dependent, în primul rînd, de modalitatea de amplificare adoptată.

Schematic și exemplificativ, în figura 3 este prezentat un extensometru mecanic cu comparator. După cum se constată în figura citată, deformarea elastică (în urma acțiunii forței de pretensionare) a structurii date este urmărită de palpatorul comparatorului, valoarea deformației respective fiind citită direct pe cadranul acestuia.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 5, 1981, P. 773—782

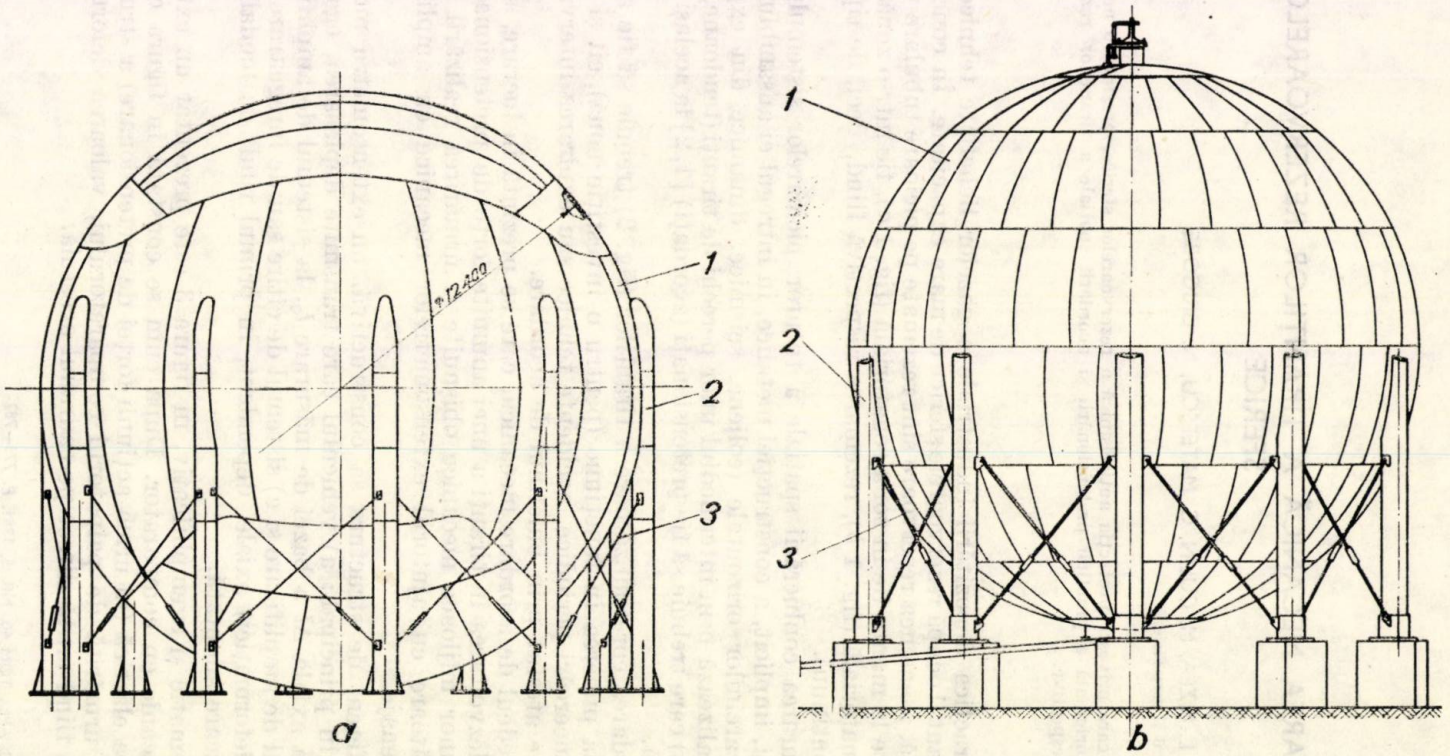


Fig. 1. — Rezervoarele sferice de 1000 m³ : *a* — rezemarea pe picioare tubulare la nivelul planului ecuatorial ; *b* — rezemarea pe picioare tubulare la nivelul planului ușor subecuatorial ; *1* — mantaua rezervorului ; *2* — picioarele tubulare, verticale ; *3* — tiranții.

În cazul rezervoarelor sferice la care, în urma unei montări defectuoase, tiranții-pereche (dintre două picioare de susținere consecutive) se ating sau sînt prezente abateri de la coaxialitate ale semitiranților (situație

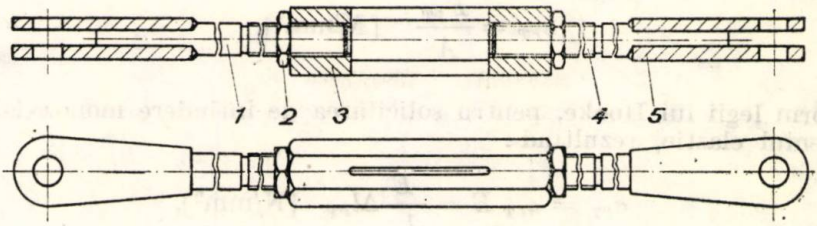


Fig. 2. — Tirantul rezervoarelor sferice: *1* — semitirantul lung; *2* — contrapiulița; *3* — mufa (piulița) întinzătoare; *4* — semitirantul scurt; *5* — elemeatul de articulare (simplu → ureche; dublu → furcă, ca în figură, sau triplu).

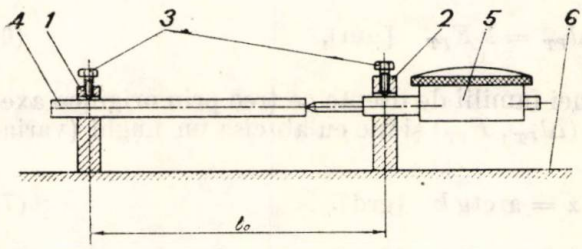


Fig. 3. — Extensometrul mecanic cu comparator: *1*, *2* — eementele de fixare pe structură; *3* — șuruburile de fiare; *4* — tija extensometrului; *5* — comparatorul cu cadran; *6* — structura studiată.

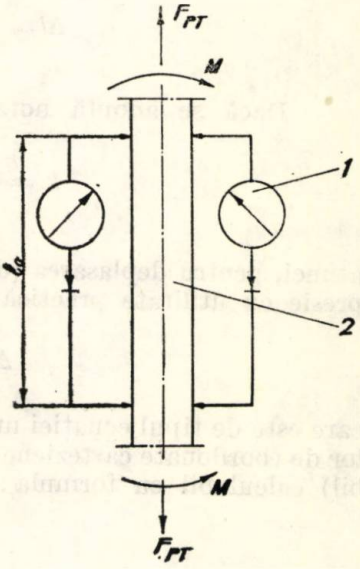


Fig. 4. — Schema de principiu a dispozitivului de acordare mecanică: *1* — comparatorul cu cadran; *2* — structura studiată (tirantul).

practică preponderentă), se impune utilizarea unui dispozitiv special, cu două comparatoare montate diametral în opoziție (fig. 4). În acest fel, un comparator acumulează efectul suplimentar de întindere din încovoiere, iar celălalt, efectul de compresiune tot din încovoiere, deplasarea (deformația) corespunzătoare forței axiale de pretensionare fiind, așadar,

$$\Delta l_{FT} = \frac{\Delta l_{\mathrm{I}} + \Delta l_{\mathrm{II}}}{2} \quad [\mathrm{mm}]. \tag{1}$$

Ca urmare a acţiunii forţei axiale de pretensionare F_{PT}, în tirantul cu secţiune transversală circulară al sistemului de rezemare se dezvoltă efortul unitar:

$$\sigma_{PT} = \frac{F_{PT}}{A} \quad [N/mm^2], \tag{2}$$

conform legii lui Hooke, pentru solicitarea de întindere monoaxială, în domeniul elastic, rezultînd:

$$\sigma_{PT} = \varepsilon_{PT} E = \frac{E}{l_0} \Delta l_{PT} \quad [N/mm^2], \tag{3}$$

astfel că, din (2) şi (3), se obţine următoarea expresie de calcul:

$$\Delta l_{PT} = \frac{4 l_0}{\pi d^2 E} F_{PT} \quad [mm]. \tag{4}$$

Dacă se adoptă notaţia:

$$k = \frac{4 \cdot 10^3}{\pi} \frac{l_0}{d^2 E} \quad [\mu m/N], \tag{5}$$

atunci, pentru deplasarea (deformaţia) axială l_{PT}, rezultă următoarea expresie cu utilitate practică directă:

$$\Delta l_{PT} = k F_{PT} \quad [\mu m], \tag{6}$$

care este de tipul ecuaţiei unei familii de drepte ce trec prin originea axelor de coordonate carteziene (Δl_{PT}, F_{PT}) şi fac cu abscisa un unghi (variabil) calculabil cu formula:

$$\alpha = \operatorname{arctg} k \quad [grd]. \tag{7}$$

În funcţie de domeniul şi precizia de măsurare ale comparatorului şi ţinîndu-se cont de deformaţia axială Δl_{PT}, se procedează la o etalonare prealabilă, astfel ca unei diviziuni a cadranului comparatorului să-i corespundă o anumită valoare a deformaţiei, preferenţial exprimată în μm. Pentru o aceeaşi valoare a deformaţiei Δl_{PT}, cu cît numărul de diviziuni ale cadranului comparatorului este mai mare, cu atît comparatorul respectiv are o precizie de citire superioară, girînd rezultatele experimentale.

Pornind de la formula (4) şi păstrînd constantă baza de măsurare l_0, cu uşurinţă se poate deduce că, pentru acelaşi nivel al forţei de pretensionare F_{PT}, deformaţiile axiale Δl_{PT1} şi Δl_{PT2}, afectate de doi tiranţi avînd diametrele d_1 şi d_2 (cu $d_1 < d_2$), îndeplinesc condiţia:

$$\Delta l_{PT2} = \Delta l_{PT1} \frac{d_1^2}{d_2^2} < \Delta l_{PT1} \quad [\mu m], \tag{8}$$

astfel că, în cazul tirantului de diametru $d_2' > d_1$, trebuie utilizat un comparator cu precizia de citire sensibil sporită.

Spre exemplificare, se poate considera situația reală, de pe platformele petrochimice, în care rezervoarele sferice industriale prezintă — de la o alternativă constructivă la alta — tiranți cu diametre $d \in [50,70]$ mm. În asemenea situație $d_1^2/d_2^2 = d_{min}^2/d_{max}^2 \simeq 0{,}5$ și, avînd în vedere condiția (8), rezultă că precizia de citire a unui comparator utilizat pentru tiranții cu diametrul $d_2 = 70$ mm trebuie să fie cam de două ori mai mare decît cea pentru tiranții cu diametrul $d_1 = 50$ mm, aceasta, evident, dacă se urmărește determinarea cu aceeași precizie a forței de pretensionare.

Dacă comparatorul utilizat practic are o precizie de citire mică, atunci îmbunătățirea acesteia se poate obține prin mărirea bazei de măsurare l_0 a dispozitivului, deoarece, impunînd celor doi tiranți ($d_2 > d_1$) aceeași deformație axială Δl_{PT}, corespunzătoare forței F_{PT}, se obține condiția evidentă conform căreia :

$$l_{02} = l_{01} \frac{d_2^2}{d_1^2} > l_{01} \quad [\text{mm}]. \tag{9}$$

Mărirea bazei de măsurare poate genera, însă, o serie de erori de operare, datorită torsionării tirantului și, mai ales, variației diametrului tirantului pe lungimea l_0.

Considerînd tirantul rectiliniu, dacă diametrul său este constant (ceea ce înseamnă deformație specifică $\varepsilon_{PT} = \text{const.}$ pe toată lungimea l_0), atunci este evident că valoarea bazei de măsurare l_0 nu influențează valoarea deformației specifice ε_{PT}. De asemenea, dacă ε_{PT} variază liniar (a doua derivată $\varepsilon''_{PT} = 0$), atunci lungimea bazei de măsurare poate să aibă oricare valoare, deoarece deformația specifică medie — care se determină în astfel de cazuri — are valoare bine determinată, fiind egală cu valoarea ε_{PT_0} corespunzătoare punctului aflat la jumătatea intervalului de extindere l_0. Însă, atunci cînd derivata secundă ε''_{PT} nu este nulă ($\varepsilon''_{PT} \neq 0$), se comite o eroare considerînd valoarea medie măsurată drept valoare medie reală ε_{PTm} corespunzătoare bazei de măsurare l_0.

În literatura de specialitate [3, 4], între deformația specifică ε_{PT_0} și deformația specifică reală corespunzătoare punctului mijlociu al bazei de măsurare l_0 (fig. 5) s-a stabilit corelația :

$$\varepsilon_{PTm} = \varepsilon_{PT_0} + \frac{l_0^2}{24} \varepsilon''_{PT_0} \quad [\mu\text{m/m}], \tag{10}$$

în conformitate cu care se poate, de asemenea, scrie că :

$$\Delta l_{PTm} = \Delta l_{PT_0} + \frac{l_0^2}{24} \Delta l''_{PT_0} \quad [\mu\text{m}]. \tag{11}$$

Rezultă, deci, că lungimea bazei de măsurare este indicat să fie cu atît mai mică, cu cît derivata secundă ε''_{PT_0}, respectiv $\Delta l''_{PT_0}$, este mai mare. Trasarea curbelor de dependență, de genul celei din figura 5, devine, totuși, improprie pentru executarea unei lucrări practice de acordare a

tiranţilor rezervoarelor sferice, preferîndu-se alternativa folosirii comparatoarelor cu precizie de citire cît mai ridicată, sau — în lipsa acestora — recomandîndu-se alte procedee de acordare [5, 6].

În continuare, se prezintă dispozitivul original* (fig. 6) folosit la pretensionarea şi acordarea mecanică a tiranţilor rezervoarelor sferice de

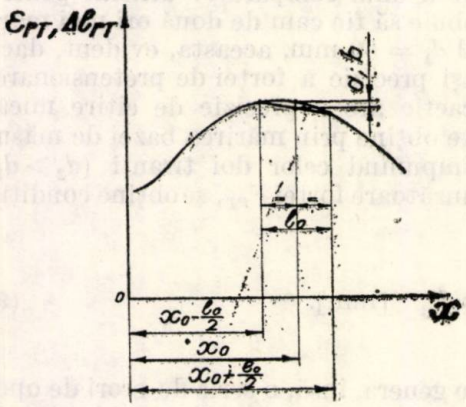


Fig. 5. — Variaţia deformaţiei specifice, respectiv a deformaţiei axiale, pe lungimea bazei de măsurare a structurii cu secţiunea transversală variabilă.

construcţie autohtonă, a cărui schiţă (fig. 7) urmăreşte principiul exemplificat în figura 4. Conceput pentru gama de diametre $d \in [50, 70]$ mm (fig. 8), dispozitivul are în alcătuire elemente simple (fig. 9), uşor de confecţionat şi care nu impun condiţii speciale în montare şi utilizare. Evident, componentele cele mai importante ale dispozitivului sînt comparatoarele de măsură cu cadran, a căror precizie de citire este de 1 μm.

Întrucît comparatoarele utilizate au precizie înaltă de citire, la proiectarea elementelor dispozitivului s-a avut în vedere baza de măsurare l_0. Considerînd cazul practic cel mai frecvent, în care un tirant cu diametrul de 50 mm trebuie pretensionat la forţa de 10^5 N, cu o toleranţă de maximum 2000 N şi impunînd ca acul comparatorului să se deplaseze cu 50 diviziuni = 50 μm = 0,05 mm = Δl_{PT}, din formula (4) rezultă baza de măsurare necesară:

$$l_0 = \frac{\pi d^2 E \Delta l_{PT}}{4F_{PT}} \simeq 200 \text{ mm}. \tag{12}$$

În acest context, pentru diferite valori ale diametrului tiranţilor, altele decît cea exemplificată, se obţine următoarea expresie finală:

$$\Delta l_{PT} = 0{,}00121 \frac{F_{PT}}{d^2} \quad [\text{mm}], \tag{13}$$

* Realizarea practică a dispozitivului a revenit, în mare măsură, tehnicianului principal Andrei Pintea de la laboratorul EFIUTP din Institutul de petrol şi gaze Ploieşti.

respectiv

$$\Delta l_{PT} = 1{,}21 \frac{F_{PT}}{d^2} \quad [\mu m], \tag{14}$$

aici F_{PT} introducîndu-se în N, iar d — în mm.

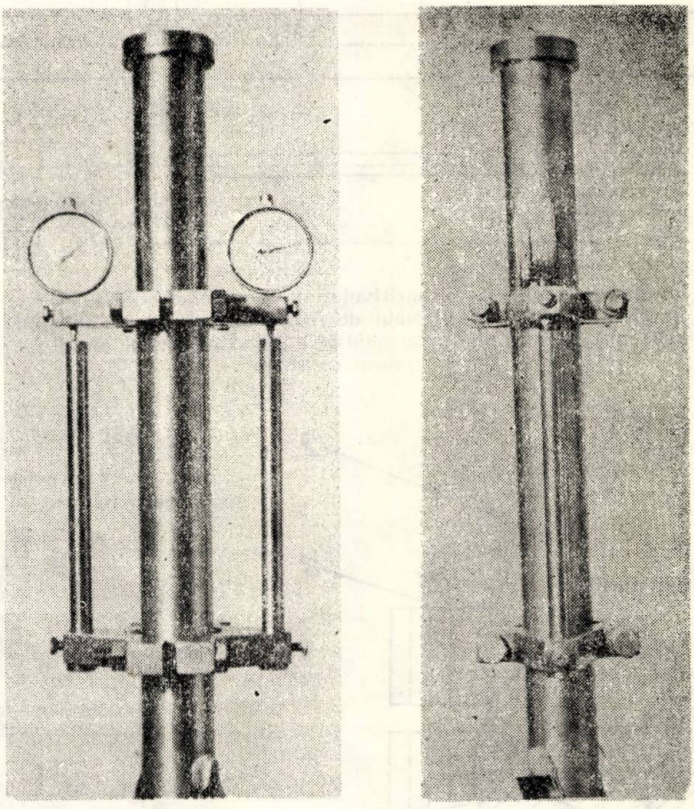


Fig. 6. — Dispozitivul cu extensometre pentru pretensionarea și acordarea mecanică a tiranților rezervoarelor sferice.

Pentru determinarea operativă a deformației axiale Δl_{PT} și a indicației comparatorului care trebuie urmărită, se pot utiliza grafice de lucru de tipul celui prezentat în figura 10.

La acordarea tiranților (în număr de 20 ai) unui rezervor sferic de 1000 m^3, rezemat pe 10 picioare tubulare verticale, sînt necesare 20 de dispozitive cu extensometre mecanice cu comparatoare, care se fixează pe fiecare tirant, în planul lateralelor acestuia [5], păstrînd aceeași bază de măsurare l_0. Această valoare a bazei de măsurare poate fi ușor determinată, la montaj, cu ajutorul tijei dispozitivului (fig. 11) avînd lungimea corespunzătoare (în cazul de față, 200 mm). După prinderea pe tirant, tija se retrage și se imobilizează într-o poziție convenabilă, astfel aleasă,

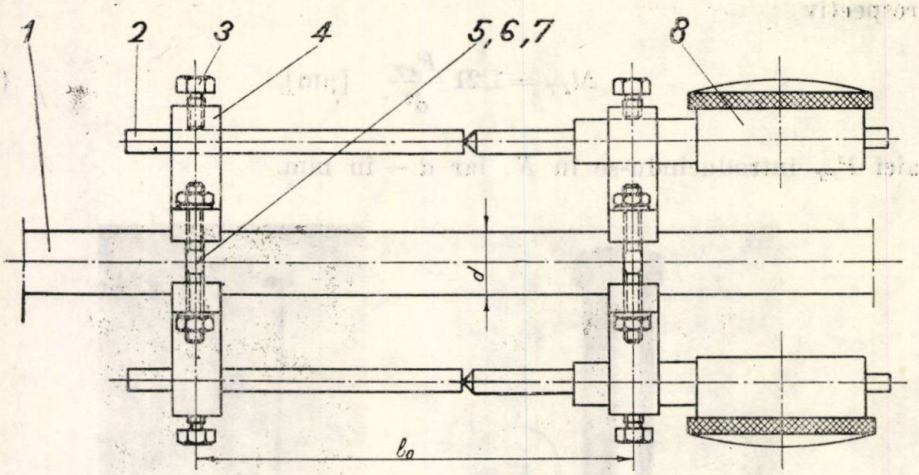


Fig. 7. — Schița principială a dispozitivului cu extensometre mecanice: *1* — tirantul; *2* — tija extensometrului; *3* — șurubul de fixare al tijei; *4* — elementul de fixare; *5, 6, 7* — șurubul, șaiba și piulița de montare a dispozitivului pe tirant; *8* — comparatorul cu cadran.

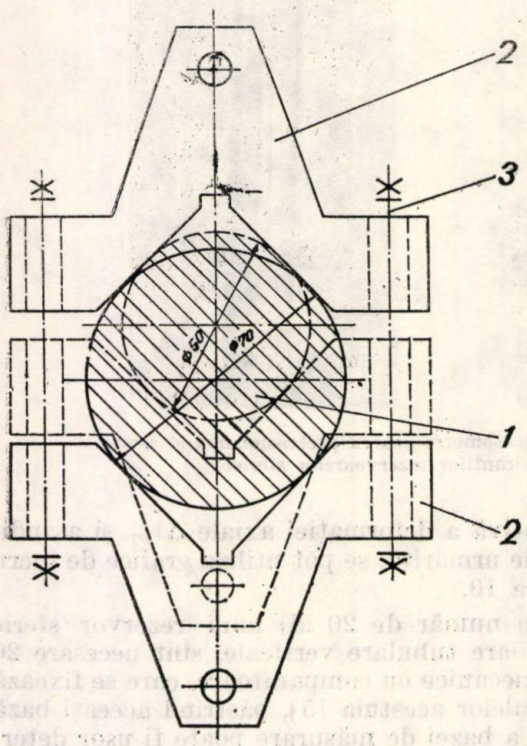


Fig. 8. — Prinderea elementelor de fixare pe tiranți cu diametre diferite: *1* — tirantul; *2* — elementele de fixare; *3* — șurubul de fixare.

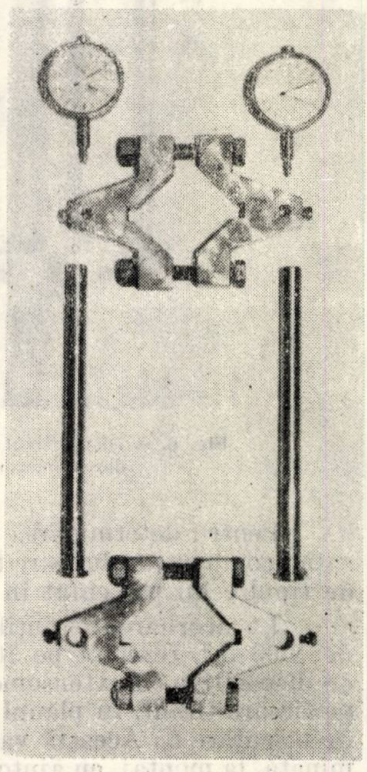


Fig. 9. — Dispozitivul cu extensometre mecanice, prezentat sub formă explodată.

încît, în timpul operației de acordare, palpatorul comparatorului să fie în contact permanent cu ea. În continuare, cu tiranții netensionați axial, comparatoarele se reglează „la zero", după care se poate începe operația de acordare propriu-zisă.

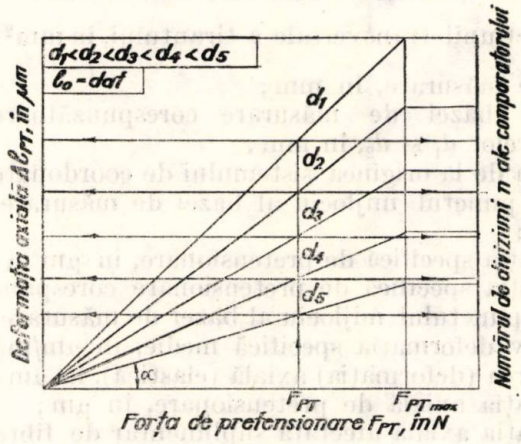


Fig. 10. — Graficul de lucru pentru pretensionarea tiranților rezervoarelor sferice.

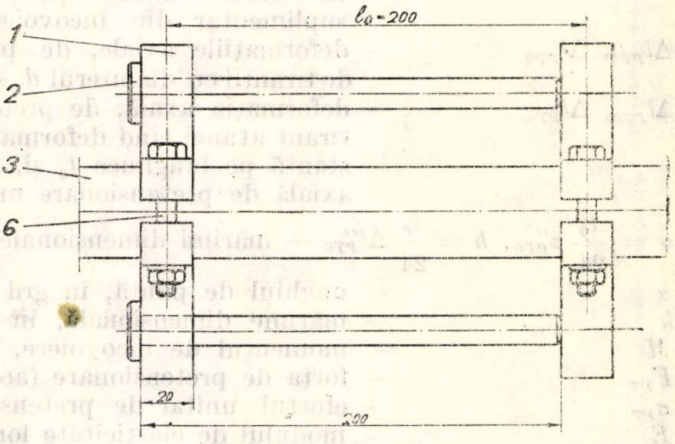


Fig. 11. — Determinarea practică a bazei de măsurare l_0: *1* — elementul de fixare; *2* — tija extensometrului; *3* — tirantul; *4* — șurubul de fixare.

Operația de acordare mecanică necesită faze pregătitoare obișnuite oricărui alt procedeu [5, 6], cu specificația că nu sînt necesare măsuri speciale de protecție a dispozitivelor. Acest lucru permite executarea operației de acordare în orice anotimp (temperatura mediului ambiant nu influențează nici funcționarea dispozitivelor și, mai ales, nici rezultatele măsurărilor, tijele fiind confecționate din același material ca cel al tiranților) și, deci, în condițiile oricărui microclimat existent pe platformele industriale chimice sau petrochimice.

Prin simplitatea construcției, montării și utilizării sale, dispozitivul mecanic de acordare reduce mult durata operațiilor de pretensionare a tiranților unui rezervor sferic, impunîndu-se, astfel, pentru condițiile de lucru aspre existente în combinatele petrochimice moderne.

Primită la redacție la 28 ianuarie 1981

NOTAŢII

d reprezintă diametrul tirantului, în mm;

$d_1 = d_{min}$, $d_2 = d_{max}$ — diametrele minim (50) şi, respectiv, maxim (70) ale tiranţilor unui rezervor sferic, în mm;

$A = \frac{\pi d^2}{4}$ — aria secţiunii transversale a tirantului, în mm²;

l_0 — baza de măsurare, în mm;

l_{01}, l_{02} — valorile bazei de măsurare corespunzătoare diametrelor d_1 şi d_2, în mm;

x_0 — distanţa de la originea sistemului de coordonate pînă la punctul mijlociu al bazei de măsurare, în mm;

ε_{PT} — deformaţia specifică de pretensionare, în μm/m;

ε_{PT0}, ε_{PTm} — deformaţia specifică de pretensionare corespunzătoare punctului mijlociu al bazei de măsurare, respectiv deformaţia specifică medie, în μm/m;

Δl — deplasarea (deformaţia) axială (elastică), în μm;

Δl_{PT} — deformaţia axială de pretensionare, în μm;

Δl_{I}, Δl_{II} — deformaţia axială afectată suplimentar de fibra tirantului întinsă şi, respectiv, comprimată suplimentar din încovoiere, în μm;

Δl_{PT1}, Δl_{PT2} — deformaţiile axiale, de pretensionare, afectate de tiranţii cu diamterul d_1 şi, respectiv, d_2, în μm;

Δl_{PT0}, Δl_{PTm} — deformaţia axală, de pretensionare, afectată de tirant atunci cînd deformaţia specifică este constantă pe lungimea l_0 şi, respectiv, deformaţia axială de pretensionare medie, în μm;

$a = \frac{l_0^2}{24}\varepsilon''_{PT0}$, $b = \frac{l_0^2}{24}\Delta l''_{PT0}$ — mărimi dimensionale, în μm/m;

α — unghiul de pantă, în grd;

k — mărime dimensională, în μm/N;

M — momentul de încovoiere, în N·mm;

F_{PT} — forţa de pretensionare (acordare), în N;

σ_{PT} — efortul unitar de pretensionare, în N/mm²;

E — modulul de elasticitate longitudinal al materialului de bază al tirantului, în N/mm².

BIBLIOGRAFIE

1. A. PAVEL, *Pretensionarea tendoanelor rezervoarelor sferice. I şi II*, St. cerc, mec. apl., **38**, *4* şi *5*, p. 537–555 şi p. 717–730 (1979).
2. A. PAVEL, *Contribuţii la rezolvarea problemei pretensionării tendoanelor rezervoarelor sferice de mare capacitate*, Revista de chimie, **30**, *12*, p. 1256–1259 (1979),
3. P. DANTU, *Note sur la rectification des curbes expérimentales*, Analyse des contraintes, *7* (1966).
4. P. S. THEOCARIS ş. a., *Analiza experimentală a tensiunilor*. Vol. I. Bucureşti, Edit. tehnică, 1977.
5. A. PAVEL, L. RIZEA *Acordarea electrotensometrică a tiranţilor rezervoarelor sferice*, Revista de chimie **32**, 7 1981.
6. A. PAVEL ş. a., *Acordarea electrorezistivă a tiranţilor rezervoarelor sferice*. St. cerc. mec. apl., **40**, *4*, p. 619–628 (1981).

INSTALAȚIE PENTRU STUDIUL FRECĂRII DINTRE LAGĂR ȘI ARBORE

de PETRE SIMA
Universitatea Brașov

GRIGORE COSTIN
Liceul industrial Tractorul, Brașov

DAN CĂMĂRĂSCU
I.C.I.M., Brașov

În lucrare se prezintă o instalație de concepție originală, prevăzută cu un dispozitiv special, utilizabilă la studiul frecării dintre arbori și lagăre. Dispozitivul cu care este dotată instalația permite măsurarea directă a forței de frecare dintre lagăr și arbore și a fost brevetat ca invenție prin hotărîrea nr. 32346 din 25.02.1980 a O.S.I.M.

CONSIDERAȚII GENERALE

Industria constructoare de mașini utilizează tot mai intens, pentru transmiterea mișcărilor, lagăre cu cuzineți. Se știe însă, că frecarea care are loc între lagăr și arbore prezintă multiple aspecte nedorite, ca, de exemplu, uzuri, dezvoltare de energie calorică, ce poate conduce la gripări etc. Sub acest aspect, sîntem interesați să cunoaștem cît mai exact fenomenul frecării dintre arbori și lagăre.

Pentru a putea efectua un studiu experimental, care să verifice teoria pusă, de altfel, bine la punct în legătură cu această problemă, colectivul de autori ai acestui material, au conceput și realizat o instalație pentru studiul frecării dintre lagăr și arbore, pe care o prezentăm în cele ce urmează.

INSTALAȚIE PENTRU STUDIUL FRECĂRII DINTRE LAGĂR ȘI ARBORE

În literatura de specialitate, se indică o serie de metode simple, cu ajutorul cărora se poate estima valoarea forței de frecare dintre lagăr și arbore. Amintim, dintre acestea, una din metodele care se practică în mod curent și care constă în aceea că se imprimă un impuls inițial arborelui și se cronometrează timpul pînă la oprirea completă a acestuia, funcție de care, pe baza unor relații cunoscute, se calculează forța de frecare dintre arbore și lagăre.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 5, 1981, P. 783–787

Instalaţia la care ne referim, prevăzută cu un dispozitiv, brevetat ca invenţie (hotărîrea nr. 32346 din 25.02.1980), permite măsurarea directă a forţei de frecare din lagăre.

În figura 1 se prezintă vederea generală a instalaţiei; cu 1 s-a notat dispozitivul brevetat şi pe care îl vom descrie în continuare. În figura 2

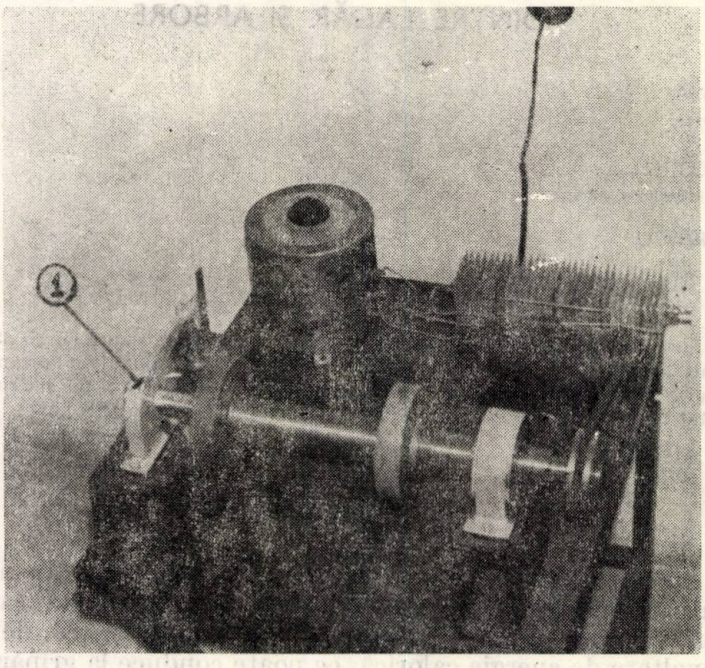


Fig 1.

se poate vedea dispozitivul pentru măsurarea forţei de frecare dintre arbore şi lagăr.

Întregul sistem este acţionat de un motor electric de curent continuu, alimentat de la reţeaua de 220 V, prin intermediul unui sistem de redresare a curentului, care are drept scop variaţia turaţiei. Prin intermediul unei curele de transmisie, motorul antrenează un arbore ce se reazemă pe două lagăre, în care sînt montaţi doi rulmenţi. Arborele poate fi încărcat cu ajutorul unor volanţi, care se montează pe acesta, între punctele de rezemare. La capătul opus şaibei pentru curea a arborelui, se află sistemul de măsurat (dispozitivul brevetat ca invenţie), format dintr-un indicator rezemat pe un resort şi un ceas dinamometric, pentru indicarea valorilor obţinute pentru forţă.

Frecarea efectivă are loc între fusul arborelui fixat pe acesta printr-un sistem tip „pană" şi lagărul studiat.

Lagărul este fixat rigid de inelul interior al rulmentului, de care este fixată şi pîrghia indicatoare.

În momentul rotirii arborelui, prin frecarea dintre fusul arborelui şi lagăr, acesta din urmă se va roti o dată cu dispozitivul dinamometric de măsurare a forţei de frecare dintre arbore şi bucşa (cuzinetul) lagăru-

lui. Datorită resortului de care este fixată pîrghia indicatoare, lăgărul nu se va putea roti complet, doar cît îi este necesar să indice valoarea forței de frecare.

Înainte de executarea determinării experimentale, se va stabili fondul de lucru al instalației, adică forța de frecare din cei doi rulmenți

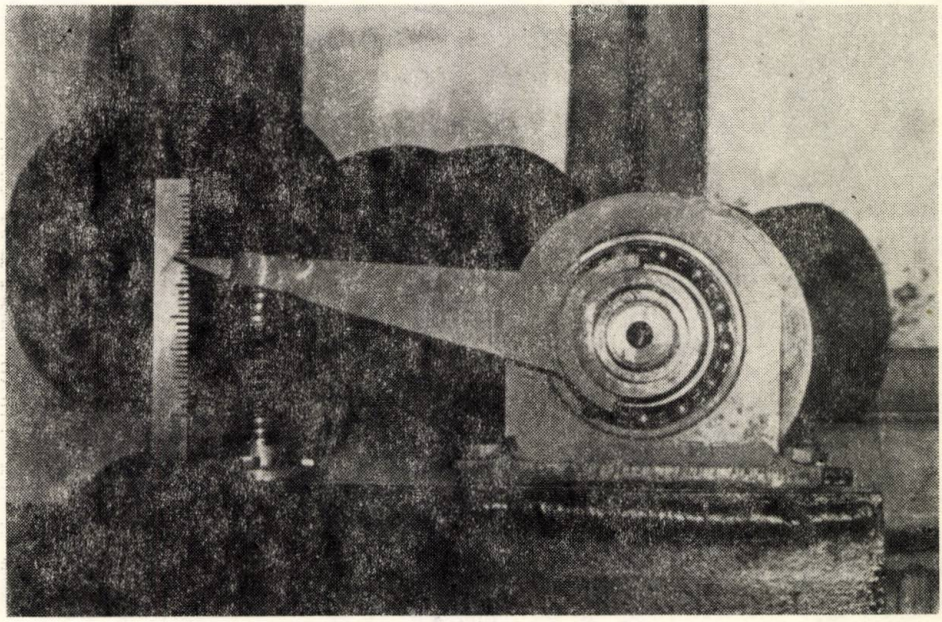


Fig. 2

ai punctelor de reazem ale arborelui, la care se adaugă forța de frecare din lagăr, obținînd o nouă valoare a forței de frecare.

Între cele două variații ale forței de frecare, vom obține domeniul cercetat, ca în graficul din figura 3.

În figura 4 se prezintă instalația electrică a aparatului, care, după cum se poate observa, mai cuprinde și un tahometru pentru măsurarea și controlul turației motorului, precum și un reostat pentru varierea turației.

În figura 5 se arată dispozitivul instalației pentru studiul frecării dintre lagăr și arbore, distingîndu-se următoarele elemente componente ale acestuia : 1, inelul exterior al lagărului (carcasa lagărului), 2, inelul exterior al rulmentului fusului arborelui, 3, inelul interior al rulmentului, 4, bucșa (cuzinetul) lagărului, 5, fusul arborelui, 6, indicatorul dispozitivului și 7 resortul sau dispozitivul dinamometric de măsurare a forțelor de frecare.

Frecarea efectivă are loc, după cum se poate ușor observa, între fusul arborelui 5 și cuzinetul lagărului, 4 (fig. 5), fixat rigid de inelul interior al rulmentului interior, de care este fixată și pîrghia indicatoare 6.

Instalația permite studiul frecării dintre diferite materiale cu calități ale suprafeței de frecare diferită, materialul fusului și cuzinetului

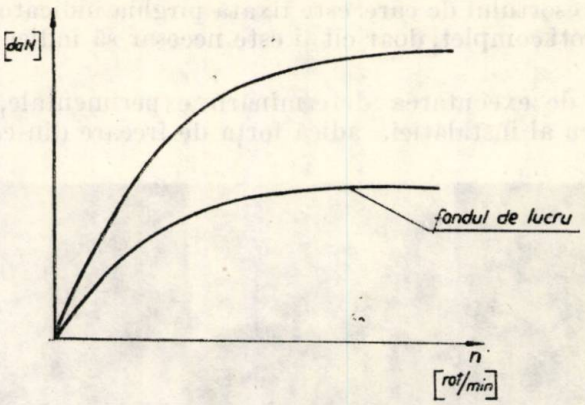


Fig. 3

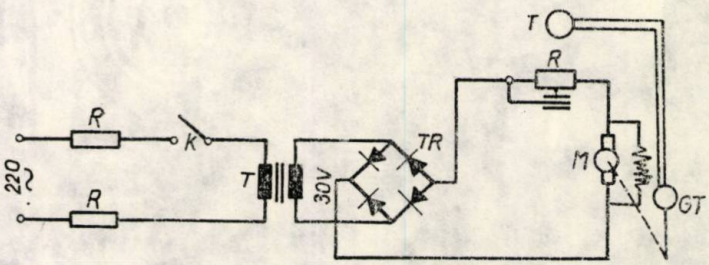


Fig. 4

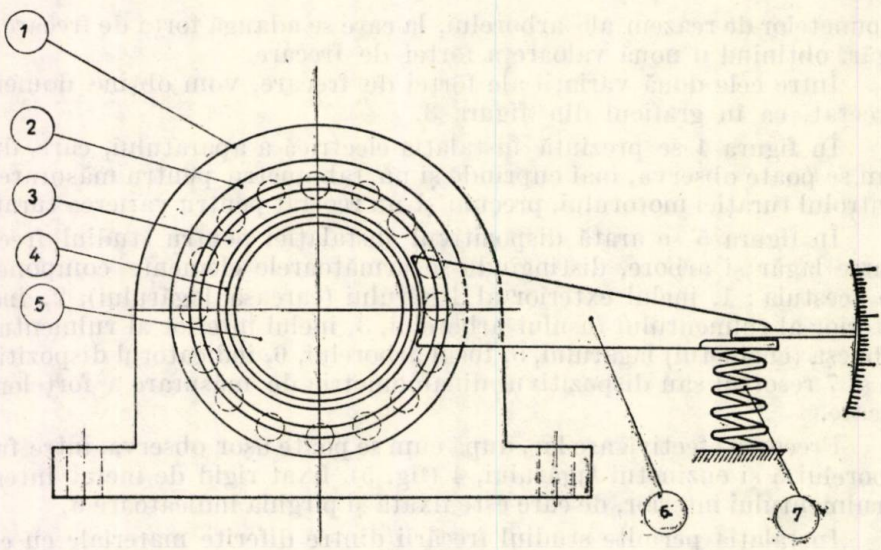


Fig. 5

putîndu-se înlocui cu ușurință, schimbînd cuzinetul și aplicînd pe fusul arborelui o bucșă din materialul dorit.

Frecarea dintre arbore și lagăr se poate studia pentru turații diferite ale arborelui, deoarece instalația este antrenată de un motor de curent continuu, alimentat cu tensiune variabilă.

Pentru a se putea studia frecarea la diferite încărcări ale lagărelor, se pot utiliza volanți de diferite greutăți, care se pot monta sub forma unor volanți pe arbore.

De asemenea, prin adaptările corespunzătoare, instalația poate servi și la studiul frecării semilichide sau lichide. Asfel, se pot studia și influența diferiților lubrefianți asupra frecării dintre arbori și lagăre, precum și cea a temperaturii, prin introducerea unor rezistențe electrice în băile de lubrefianți, în care ipoteză este necesar ca instalațiilor să li se monteze băi de ungere.

Primită la redacție la 1 decembrie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. D. HOROVITZ, *Organe de mașini*, Edit. tehnică, București, 1969.
2. DUDITA FLOREA, *Regimuri tranzitorii în transmisia automobilului*, St. cerc. mec. apl., *3*, (1964).
3. ILIE CONSTANTINESCU, CIPRIAN BOLOG, *Mecanică*, *Edit.* didactică și pedagogică, București, 1978.
4. A. RIPIANU, P. POPESCU, B. BĂLAN, *Mecanică tehnică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
5. P. SIMA *Mecanica teoretică*, Litografia Universității din Brașov, 1972.
6. AL. STOENESCU, GH. SILAȘ, *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, București, 1963.
7. V. VÂLCOVICI, ȘT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, București. 1969.
8. ALEXANDRU VAIDA, *Proiectarea mașinilor unelte*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.

R
F 2557

6

TOMUL 40
noiembrie — decembrie 1981

1990 SEP 10

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. **E. CARAFOLI,** *redactor şef*

Membri :

Acad. **I. ANTON,**
Acad. **ŞT. BĂLAN,**
Acad. **D. DUMITRESCU,**
Acad. **C. IACOB**
Acad. **D. MATEESCU,**
Acad. **O. ONICESCU,**
Acad. **R. VOINEA,**
Prof. **C. AVRAM,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **GH. BUZDUGAN,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **R. C. BOGDAN,**
Prof. **D. PAVELESCU,**
Prof. **R. PRIŞCU,**
Dr. ing. **V. VISARION**
Dr. ing. **D. PANTAZOPOL,**
Ing. **I. CRIŞAN,**
Prof. **CR. PELECUDI,**
Prof. **TR. DEMIAN,**
Prof. **T. OROVEANU,** *secretar de redacţie,*
Dr. ing. **C. TEODOSIU,** *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. **E. CARAFOLI,** *redactor şef,*

Membri :

Acad. **I. ANTON,**
Acad. **D. MATEESCU,**
Ing. **I. CRIŞAN,**
Dr. ing. **D. PANTAZOPOL,**
Prof. **TR. DEMIAN,**
Prof. **T. OROVEANU,** *secretar de redacţie,*
Dr. ing. **C. TEODOSIU,** *secretar de redacţie.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa : ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 70717, str. 13 Decembrie nr. 3, P. O. Box 136—137, telex 11226, Bucureşti, România, în ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Revistele se pot procura (direct sau prin poştă) şi prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 40, nr. 6 noiembrie — decembrie 1981

SUMAR

STUDII

V. N. CONSTANTINESCU, V. BUTOESCU, O extindere a teoriei suprafeţei portante la evoluţii pe traiectorii oarecare cu viteze subsonice 791

M. M. NIŢĂ, Cu privire la studiul stabilităţii avioanelor cu decolare şi aterizare, verticală 801

C. BERBENTE, O extindere a metodei de trasare Carafoli la reţele de profile 811

D. MATEESCU, R. ŞELESCU, Curgerea supersonică în jurul unui fuzelaj conic de secţiune oarecare izolat sau prevăzut cu o aripă delta cu bordurile subsonice 819

S. GĂLETUŞE, Asupra adaptării optime a elicei la avion. 837

ŞTEFAN STAICU, O aplicaţie a metodei Carafoli la studiul mişcării supersonice în jurul unei aripi cruciforme 847

TEODOR OROVEANU, MOHAMMED ASEF, Asupra unei probleme de mişcare nestaţionară în conductele de gaze . . . 855

C. TEODOSIU, T. DUMITRESCU, I. ROŞU, Modelarea procesului de extrudare la cald a oţelurilor inoxidabile . . . 869

Cu prilejul aniversării academicianului Elie Carafoli 885

INDEX ALFABETIC 905

O EXTINDERE A TEORIEI SUPRAFEȚEI PORTANTE LA EVOLUȚII PE TRAIECTORII OARECARE CU VITEZE SUBSONICE

de V. N. CONSTANTINESCU
Institutul politehnic București

V. BUTOESCU
INCREST, București

Lucrarea extinde teoria suprafeței portante pentru mișcări subsonice pe traiectorii oarecare. Pornind de la ideea de salt al parametrilor fluidului pe suprafața portantă, problema curgerii în jurul ei se reduce la soluționarea unui sistem de ecuații integrale. Prin modul în care s-a tratat problema, pe lîngă portanță apare în mod automat și influența grosimii.

INTRODUCERE

După cum este cunoscut, problema mișcării în jurul unei aripi sau a unor sisteme portante complexe (aripă — fuzelaj etc.) a fost intens studiată în regim staționar. De asemenea, există numeroase studii și metode ce tratează mișcări nestaționare în jurul aripilor, îndeosebi pentru cazul oscilațiilor armonice.

Problema generală a mișcării subsonice nestaționare în jurul unor configurații complexe este însă legată de unele dificultăți în alegerea singularităților cu ajutorul cărora să se poată simula mișcarea globală în condiții fizice acceptabile. În vederea unor asemenea studii, ne propunem în cele ce urmează să abordăm problema în condiții cît mai generale, fără a face de la început apel la anumite tipuri particulare de singularități. Vom utiliza în acest scop anumite elemente ale teoriei distribuțiilor.

1. ECUAȚIILE FLUIDULUI SLAB PERTURBAT

În cele ce urmează, vom considera că fluidul în care se deplasează corpul portant este perfect și că sînt satisfăcute condițiile ce stau la baza teoriei liniarizate. În acest caz, ecuațiile fluidului față de un sistem de referință fix se reduc ([1], [2] etc.) la sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} &\Box\,\varphi(\vec{P},\,t) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi(\vec{P},\,t) + \frac{p(\vec{P},\,t) - p_\infty}{\rho_\infty} = 0,\\ &\frac{p(\vec{P},\,t)}{p_\infty} - \varkappa\, s(\vec{P},\,t) - 1 = 0,\\ &T(\vec{P},\,t) - T_\infty = 0, \end{aligned} \tag{1a}$$

unde $\square$ este operatorul d'Alembert, $\vec{P}$ este un punct în spațiul ocupat de fluid (R^3, mediu nelimitat), iar t semnifică timpul ($t \in R^1$). Funcțiile φ, p, s și T reprezintă, respectiv, potențialul vitezelor, presiunea, gradul de condensare

$$s(\vec{P}, t) = \frac{1}{\rho_\infty}[\rho(\vec{P}, t) - \rho_\infty]$$

(ρ fiind densitatea) și temperatura. Toate aceste mărimi sînt definite în $R^3 \times R^1 - (S)$, unde (S) este o suprafață singulară fixă sau mobilă. Indicele ∞ se referă la valorile parametrilor fluidului neperturbat. Primele două ecuații din (1a) pot fi puse și sub forma

$$\begin{aligned} &\square\, \psi(\vec{P}, t) = 0, \\ &\psi(\vec{P}, t) + \frac{p(\vec{P}, t) - p_\infty}{\rho_\infty} = 0, \end{aligned} \tag{1b}$$

unde ψ reprezintă potențialul accelerațiilor

$$\psi(\vec{P}, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\vec{P}, t) \simeq \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{P}, t).$$

Utilizarea lui ψ în locul lui φ prezintă avantajul dependenței liniare de presiune, ceea ce face ca dîra de vîrtejuri să nu apară în mod formal.

2. ECUAȚIA UNDELOR ÎN DISTRIBUȚII

În cazul în care corpul portant (aripă, elice sau rotor de elicopter) satisface ipotezele teoriei liniarizate, se poate substitui corpul portant cu suprafața sa mediană, generată ca în figura 1. Vom înțelege prin suprafață portantă o suprafață mobilă (S) care: (1) este mărginită de o curbă

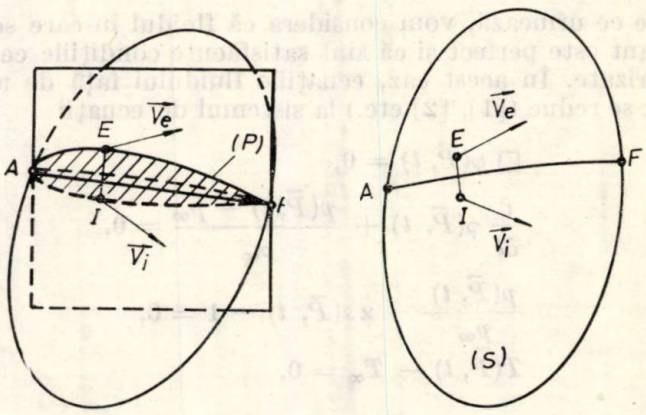


Fig. 1

închisă; (2) presiunea și viteza particulelor fluide suferă salturi finite la traversarea ei, eventual cu excepția unor linii pe aceasta; (3) suprafața (S) este infinit vecină unui cilindru (C) (fig. 2); (4) viteza locală a fiecărui punct al suprafeței (S) în raport cu fluidul în repaus de la inifinit face un unghi mic cu generatoarea cilindrului (C) cea mai apropiată punctului considerat; (5) suprafața (S) este impenetrabilă pentru fluid; (6) curgerea se face cu respectarea condiției Kutta-Jukovski.

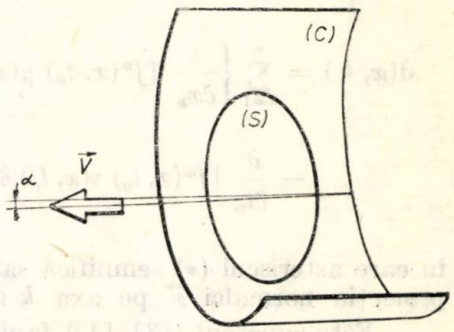


Fig. 2

Astfel, rezultă că studiul suprafețelor portante atrage după sine studiul suprafețelor de discontinuitate pentru funcțiile $\psi(\vec{P}, t)$.

Metoda prezentată aici ar putea fi extinsă și pentru studiul profilelor subțiri, definiția lor coincizînd cu cea a suprafeței portante, cu deosebirea că primele sînt definite pe un spațiu cu $n = 2$ dimensiuni, pe cînd ultimele pe $n = 3$ dimensiuni. De aceea, deși avem în vedere în special suprafețele portante, vom prezenta aici relațiile deduse pentru n arbitrar ($n = 2$ sau 3).

Ecuația undelor în $R^n \times R^1$ se scrie, pentru o funcție oarecare $f(x, t_0)$

$$\Box f(x, t_0) \equiv \Delta f(x, t_0) - \partial^2/\partial t_0^2 \; f(x, t_0), \tag{2}$$

unde Δ reprezintă laplaceianul în R^n, iar $t_0 = a_\infty t$. Cu x s-a notat un punct în R^n. O suprafață (S) mobilă în R^n se scrie

$$F(x, t_0) = 0, \tag{3}$$

în care $(x, t_0) \in D_{n+1} \subset R^n \times R^1$, unde D_{n+1} reprezintă domeniul ocupat de aripă în timp. Ecuația (3) reprezintă în $R^n \times R^1$ o hipersuprafață (Σ). Între versorii normalelor $\vec{N}$ la (Σ) și $\vec{n}$ la (S) există relația

$$\vec{N}(x, t_0) = \mu(x, t_0)\, \vec{n}(x, t_0) + \nu(x, t_0)\, \vec{j},$$

$$\mu^2(x, t_0) + \nu^2 (x, t_0) = 1, \tag{4}$$

$\vec{j}$ fiind versorul „direcției" timpului. Dacă suprafața (S) este o suprafață de discontinuitate de speța întîia pentru $f(x,t_0)$, ecuației (2) îi corespunde în distribuții ecuația ([4], [5]):

$$\Box f(x, t_0) = S(x, t_0) + \mathrm{d}(x, t_0). \tag{5}$$

În (5) s-a notat tot cu $f(x, t_0)$ distribuţia generată de funcţia $f(x,t_0)$, iar

$$S(x, t_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k'^*(x, t_0)\ \mu(x, t_0)\ n_k(x, t_0)\ \delta(\Sigma) - f_{t_0}'^*(x, t_0)\nu(x, t_0)\ \delta(\Sigma),$$

$$\mathrm{d}(x, t_0) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} [f^*(x, t_0)\ \mu(x, t_0)\ n_k(x, t_0)\ \delta(\Sigma)] \right\} - \tag{6}$$

$$- \frac{\partial}{\partial t_0} [f^*(x, t_0)\ \nu(x, t_0)\ \delta(\Sigma)],$$

în care asteriscul $(*)$ semnifică salturile funcţiilor sau derivatelor, iar n_k proiecţia normalei $\vec{n}$ pe axa k a sistemului ortogonal de coordonate.

Este cunoscut ([3], [4]) faptul că, notîndu-se cu $\mathscr{E}(x, t_0)$ o soluţie fundamentală a operatorului $\square$, soluţia ecuaţiei (5) se poate scrie ca un produs de convoluţie,

$$f(x, t_0) = [S(x, t_0) + \mathrm{d}(x, t_0)] * \mathscr{E}(x, t_0). \tag{7}$$

Vom nota

$$f_S(x, t_0) = S(x, t_0) * \mathscr{E}(x, t_0)$$

$$f_d(x, t_0) = \mathrm{d}(x, t_0) * \mathscr{E}(x, t_0). \tag{8}$$

Făcînd calculele, găsim

$$f_S(x, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{(S)} q_0(\xi, \tau_0)\ \mathscr{E}(x - \xi, t_0 - \tau_0)\ \mathrm{d}S\mathrm{d}\tau_0 -$$

$$- \int_{(\Sigma)} f_{t_0}'^*(\xi, \tau_0)\ \mathscr{E}(x - \xi, t_0 - \tau_0)\ \mathrm{d}\xi, \tag{9}$$

$$f_d(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{(S)} f^*(\xi, \tau_0) \frac{\partial}{\partial n} \mathscr{E}(x - \xi, t_0 - \tau_0)\ \mathrm{d}S\mathrm{d}\tau_0 -$$

$$- \int_{(\Sigma)} f^*(\xi, \tau_0) \frac{\partial}{\partial \tau_0} \mathscr{E}(x - \xi, t_0 - \tau_0)\ \mathrm{d}\xi,$$

unde

$$q_0(x, t_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k'^*(x, t_0)\ n_k(x, t_0). \tag{10}$$

3. ECUAȚIILE SUPRAFEȚEI PORTANTE

Suprafața portantă netedă (S), mobilă în spațiu, este locul punctelor unde parametri fluidului suferă un salt finit. Ea are ecuația

$$A(\vec{P}, t) = 0, \tag{11}$$

unde $(\vec{P}, t) \in D_{n+1} \in R^n \times R^1$, domeniu în care $-\infty < t < \infty$. Aici $\vec{P}$ desemnează un punct în spațiul fizic cu două sau trei dimensiuni ($n = 2$ sau 3), iar timpul $t = t_0/a_\infty$ (timp real). Și aici salturile se notează cu asterisc. Trecerea de la ecuația undelor cu variabile dimensional omogene (2) la variabilele uzuale $\vec{P}$ și t din (1b) nu prezintă dificultăți. Notînd

$$\mathcal{E}(\vec{P}, t_0) = \mathcal{E}(\vec{P}, a_\infty t) = E(\vec{P}, t),$$

$$q_0(\vec{P}, t_0) = q_0(\vec{P}, a_\infty t) = q(\vec{P}, t),$$

găsim

$$\psi_S(\vec{P}, t) = a_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{(S)} q(\vec{Q}, \tau)\, E(\vec{P} - \vec{Q}, t - \tau)\, \mathrm{d}S \mathrm{d}\tau -$$

$$- \frac{1}{a_\infty} \int_{(\Sigma)} \psi_i'^*(\vec{Q}, \tau)\, E(\vec{P} - \vec{Q}, t - \tau)\, \mathrm{d}Q,$$

(12)

$$\psi_d(\vec{P}, t) = a_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{(S)} \psi^*(\vec{Q}, \tau) \frac{\partial}{\partial n} E(\vec{P} - \vec{Q}, t - \tau)\, \mathrm{d}S \mathrm{d}\tau -$$

$$- \frac{1}{a_\infty} \int_{(\Sigma)} \psi^*(\vec{Q}\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} E(\vec{P} - \vec{Q}, t - \tau)\, \mathrm{d}Q.$$

Potențialul vitezelor se poate obține imediat

$$\varphi(\vec{P}, t) = \int_{-\infty}^{t} \psi_S(\vec{P}, t)\, \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{t} \psi_d(\vec{P}, \tau)\, \mathrm{d}\tau = \varphi_S(\vec{P}, t) + \varphi_d(\vec{P}, t). \tag{13}$$

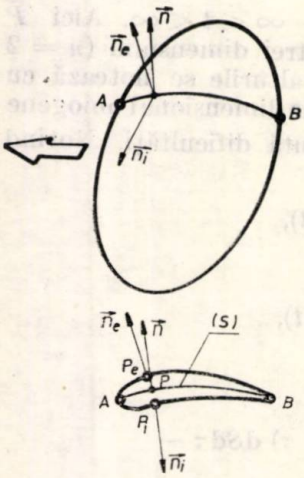
Condiții la limită

Existența unei grosimi teoretic infinitesimale a corpului portant se poate lua în considerație prin ideea de „salt al normalei" Aceasta înseamnă că, dacă se consideră un punct $P \in (S)$, pe extrados va fi luată în conside-

rație normala $\vec{n}_e$, iar pe intrados $\vec{n}_i$. Așadar, în $\vec{P}$ vom considera trei versori, $\vec{n}$, $\vec{n}_e$ și $\vec{n}_i$ (fig. 3).

Fie

$$\vec{P} = \vec{P}_0(\varkappa, t), \quad \varkappa = \begin{cases} \varkappa_1 & \text{dacă } m = 2, \\ \{\varkappa_1\ \varkappa_2\} & \text{dacă } m = 3, \end{cases} \tag{14}$$



unde $\varkappa_i \in \mathscr{D}_i \subset R$, o formă parametrică a lui (S). Atunci, viteza unui punct de pe (S) este

$$\vec{V}_0 = \dot{\vec{P}}_0(\varkappa, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}_0(\varkappa, t) \tag{15}$$

și condiția la limită se scrie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{\text{grad}\ \varphi(\vec{P} + \vec{n}\varepsilon, t) - \vec{V}_0(\vec{P}, t)\}\, \vec{n}_e(\vec{P}, t) = 0, \tag{16}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{\text{grad}\ \varphi(\vec{P} - \vec{n}\varepsilon, t) - \vec{U}_0(\vec{P}, t)\}\, \vec{n}_i(\vec{P}, t) = 0,$$

Fig. 3

unde $\varepsilon > 0$. La sistemul (15) trebuie să se adauge, desigur, și condiția Kutta-Jukovski, impusă de apariția unei nedeterminări create de singularitatea puternică a nucleelor unor integrale, problemă care se reia mai tîrziu pentru o aplicație concretă.

Sistemul de ecuații integrale ale suprafeței portante

Referitor la ecuațiile (12) vom face mai întîi două remarci. Astfel vom observa că

$$q(\vec{P}, t) = \vec{a}^*(\vec{P}, t)\ \vec{n}(\vec{P}, t) = a_n^*(\vec{P}, t),$$

$$\psi^*(\vec{P}, t) = -\frac{1}{\rho_\infty} p^*(\vec{P}, t), \tag{17}$$

unde $\vec{a}^*$ reprezintă saltul accelerației particulelor fluide, iar p^* saltul presiunii la traversarea suprafeței (S).

Pe de altă parte, tot în (12) vom observa că integralele pe (Σ) reprezintă în fond integrale pe volumul descris de (S) în mișcarea sa. Aceste integrale le vom neglija. De fapt, întotdeauna în teoria suprafeței portante stratul de vîrtejuri din spatele aripii s-a considerat concentrat pe o suprafață, deși fiecare potcoavă elementară era situată la distanță (în general)

de ea. Pe de altă parte, integralele pe (Σ) ne așteptăm să aibă valori mici. În concluzie, putem scrie

$$\varphi_S(\vec{P}, t) = a_\infty \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{(S)} q(\vec{Q}, \tau_1)\, E(\vec{P} - \vec{Q}, \tau - \tau_1)\, \mathrm{d}S\mathrm{d}\tau_1,$$

$$\varphi_d(\vec{P}, t) = -\frac{a_\infty}{\rho_\infty} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{(S)} p^*(\vec{Q}, \tau_1) \frac{\partial E}{\partial n}(\vec{P} - \vec{Q}, \tau - \tau_1)\, \mathrm{d}S\mathrm{d}\tau_1. \tag{18}$$

Introducînd φ_S și φ_d în (13) găsim pe φ și acesta substituit în (16) conduce la un sistem de două ecuații integrale cu funcțiile necunoscute $q(\vec{Q}, \tau_1)$ și $p^*(\vec{Q}, \tau_1)$. La acest sistem trebuie adăugată și condiția Kutta-Jukovski. În continuare, ne vom concentra atenția asupra cazului tridimensional.

4. APLICAȚIE — MIȘCĂRI TRIDIMENSIONALE (Teoria suprafeței portante)

Pentru a putea aduce integralele din (18) la o formă mai simplă, în care să dispară distribuția concentrată pe (S), $E(P,t)$ și derivata ei, se aduce ecuația suprafeței (S) la o formă parametrică de tipul (14),

$$\vec{Q} = \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau),$$

$$(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in \mathcal{D} \in R^2, \tag{19}$$

cu proprietatea specială că un punct $\vec{P}_f$ de pe frontiera suprafeței portante mobile este caracterizat de pereche de constante $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Aceasta înseamnă că, dacă $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ definesc la un moment dat un punct de pe frontieră, ele vor defini întotdeauna un punct de pe frontieră (fig. 4). Nu vom reproduce aici calculele, ci vom menționa numai rezultatele obținute din prelucrarea integralelor (18)

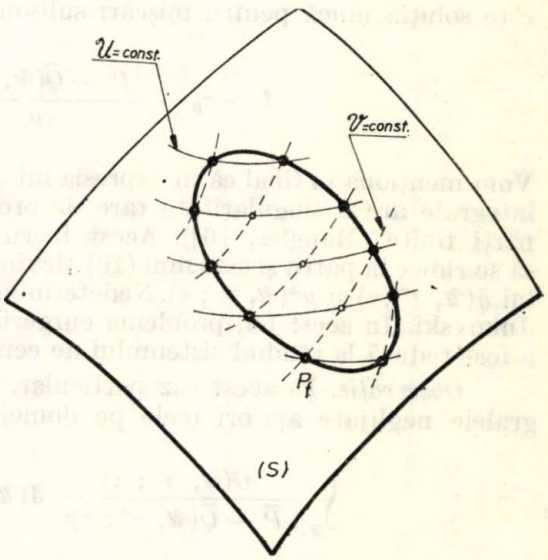


Fig. 4

$$\varphi_S(\vec{P}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \int_{-\infty}^{\tau_0} \frac{\tilde{q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \tau)}{|\vec{P} - \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \tau)|} \mathrm{d}S\mathrm{d}\tau, \tag{20}$$

$$\varphi_d(\vec{P}, t) = \frac{1}{4\pi\rho_\infty a_\infty}\int_{(S)} \tilde{p}^*(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau_0)\times$$

$$\times \frac{[\vec{P} - \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau_0)]\,\vec{n}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau_0)}{|\vec{P}-\vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \tau_0)|^2\left[1-\dfrac{[\vec{P}-\vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau_0)\,\dot{\vec{Q}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau_0)]}{a_\infty|\vec{P} - \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau_0)|}\right]}\,dS +$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho_\infty}\int_{(S)}\int_{-\infty}^{\tau_0} \tilde{p}^*(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)\,\frac{[\vec{P} - \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)]\,\vec{n}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)}{|\vec{P} - \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)|^3}\,d\tau dS, \quad (21)$$

unde

$$\tilde{q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau) = q[\vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)],$$

$$\tilde{p}^*(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau) = p^*[\vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)], \quad (22)$$

$$\dot{\vec{Q}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau),$$

iar

$$\tau_0 = \tau_0(\vec{P}, t; \mathcal{U}, \mathcal{V}) \quad (23)$$

este soluția unică pentru mișcări subsonice*, a ecuației în τ_0

$$t - \tau_0 - \frac{|\vec{P} - \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau_0)|}{a_\infty} = 0. \quad (24)$$

Vom menționa în final că în expresia lui $\varphi_d(P,t)$ integrandul celei de-a doua integrale are o singularitate tare de ordinul doi și ea trebuie luată în părți finite (Mangler, [6]). Acest lucru face ca numărul necunoscutelor să se ridice la patru și sistemul (16) devine insuficient pentru determinarea lui $\tilde{q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)$ și $p^*(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)$. Nedeterminarea o ridică însă condiția Kutta-Jukovski. În acest fel, problema curgerii fluidului în jurul suprafeței (S) a fost redusă la studiul sistemului de ecuații integrale (16).

Observație. În acest caz particular, al mișcării tridimensionale, integralele neglijate apriori (cele pe domeniul (Σ)) sînt de forma

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{G(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)}{|\vec{P} - \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)|}\,J(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)\,d\mathcal{U}\,d\mathcal{V}. \quad (25)$$

Prin $J(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)$ s-a notat jacobianul transformării (19). Dacă suprafața aripii este nemișcată în timp (conturul ei însă nu), deci ecuația suprafeței

* Unicitatea soluției este demonstrată în Anexă.

(S) se reduce la $A(\vec{P}) = 0$, adică punctele de pe aripă sînt supuse la o legătură scleronomă, integralele (25) se anulează, deoarece $J(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau) \equiv 0$. Acesta este, de exemplu, cazul suprafeței portante plane în mișcare rectilinie. În general însă (S) variază cu timpul, dar curbura și incidența mici, fac ca J să fie de ordinul de mărime al acestora și tot astfel și integrala (25).

5. CONCLUZII

Lucrarea prezentată a dovedit posibilitatea abordării problemei mișcării suprafeței portante într-un mediu fluid nemărginit într-un cadru foarte general, al traiectoriilor oarecare, evident în limitele teoriei liniare. În același timp, influența grosimii aripii apare în mod natural, prin modul de tratare a problemei. Acest mod de tratare a permis regăsirea singularităților de tip sursă și dublet fără a porni direct de la ele, cum se procedează de obicei ([7], [8]).

Primită la redacție la 16 iulie 1981

ANEXA

Unicitatea soluției ecuației (24)

Fie funcția,

$$\Lambda(\tau) = \tau + \frac{|\vec{P} - \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)|}{a_\infty}, \quad \tau \in R.$$

Derivînd în raport cu τ, găsim,

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = 1 - \frac{1}{a_\infty} \frac{\vec{P} - \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)}{|\vec{P} - \vec{Q}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)|} \cdot \dot{\vec{Q}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau).$$

În cazul mișcărilor subsonice $|\dot{\vec{Q}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}; \tau)| < a_\infty$ și deci $\mathrm{d}\Lambda(\tau)/\mathrm{d}\tau > 0$. În acest caz ecuația (24), care se poate scrie și sub forma

$$t - \Lambda(\tau) = 0,$$

are, evident, soluția unică

$$\tau = \tau_0(\vec{P}, t; \mathcal{U}, \mathcal{V}),$$

ceea ce era de demonstrat.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, *Aerodinamica vitezelor mari (fluide compresibile)*, Editura Academiei R.P.R., 1957.
2. L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Mécanique des Fluides*, Edition Mir, Moscou, 1971.
3. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1970.
4. V. VLADIMIROV *Distributions en physique mathematique*, Ed. Mir., Moscou, 1979.
5. V. VLADIMIROV, *Ecuațiile fizicii matematice*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1980 (trad. l. rusă).
6. W. MANGLER, *Improper Integrals in Theoretical Aerodynamics*, ARC 14394 CP94.
7. R. DAT, *Representation d'une ligne portante animée d'un mouvement arbitraire par une ligne de doublets d'acceleration*, Recherche Aérospatiele no. 133 (Nov.-Dec. 1969).
8. R. DAT, *La theorie de la surface portante appliquée à l'aile fixe et à l'helice*, Recherche Aérospatiele no. 4 (Juillet-Août 1973).

CU PRIVIRE LA STUDIUL STABILITĂȚII AVIOANELOR CU DECOLARE ȘI ATERIZARE VERTICALĂ

de M. M. NIȚĂ

Institutul politehnic București

În lucrare se studiază stabilitatea zborului la punct fix al avionului cu decolare și aterizare verticală. Ecuațiile generale ale mișcării se întocmesc considerînd avionul sistem de masă variabilă prin captare și ejectare simultane de particule. În ecuațiile liniarizate ale mișcării perturbate, pe lîngă termenii giroscopici, intervin termeni specifici sistemelor de masă variabilă care depind de parametri ce definesc funcționarea sistemului de propulsie-sustentație și amplasarea secțiunilor de admisie și de ejecție.

1. CONSIDERAȚII INTRODUCTIVE

În decursul mișcării avioanelor cu decolare și aterizare verticală, echipate cu sisteme de propulsie și de sustentație aeroreactoare, are loc un proces continuu de captare de particule de aer și ejectare de gaze, caracterizat printr-un consum însemnat de combustibil; în plus, mase importante de fluid (lichid, aer, gaze) sînt vehiculate în corpul aparatului. Rezultă că pentru obținerea ecuațiilor riguroase de mișcare este necesar să se considere avionul ca sistem de masă variabilă prin captare și separare simultane de particule.

În acest sens, se presupune că sistemul de propulsie-sustentație este prevăzut cu suprafețele de intrare $S_{ij}(j = 1, 2,..,p)$ prin care se captează particule de aer de densitate ρ_a și cu suprafețele de ieșire $S_{ek}(k = 1, 2,...,q)$ prin care sînt ejectate gaze de densitate ρ_g.

În [4], [5] s-au exprimat teoremele impulsului și momentului cinetic pentru sisteme de masă variabilă, prin captare și separare simultane de particule, sub forma:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} + \sum_{j=1}^{p} \int_{S_{ij}} \bar{v}\,\rho_a \bar{V} \cdot \bar{n}\, d\sigma + \sum_{k=1}^{q} \int_{S_{ek}} \bar{v}\,\rho_g \bar{V} \cdot \bar{n}\, d\sigma = \Sigma \bar{F}, \tag{1}$$

$$\frac{d\bar{K}_{O_1}}{dt} + \sum_{j=1}^{p} \int_{S_{ij}} \bar{r}_1 \times \bar{v}\,\rho_a \bar{V} \cdot \bar{n}\, d\sigma + \sum_{k=1}^{q} \int_{S_{ek}} \bar{r}_1 \times \bar{v}\,\rho_g \bar{V} \cdot \bar{n}\, d\sigma = \Sigma\, \bar{r}_1 \times \bar{F}, \tag{2}$$

în care $\bar{H}$ — impulsul sistemului, $\bar{K}_{O_1}$ — momentul cinetic în raport cu punctul fix O_1, $\bar{r}_1$ — vector de poziție, cu originea în punctul O_1, $\bar{v}$ — viteza absolută a unei particule de aer (gaz), $\bar{V}$ — viteza relativă, față de avion, a unei particule de aer (gaz), $\bar{n}$ — versorul normalei într-un punct al uneia dintre suprafețele S_{ij}, S_{ek}, orientat spre exteriorul avionului, $\Sigma\bar{F}$ și $\Sigma\bar{r}_1 \times \bar{F}$ — torsorul forțelor exterioare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 6, 1981, P. 801–810

În baza ecuațiilor (1), (2), în [4], [5] s-au obținut următoarele ecuații de mișcare:

$$m\dot{\bar{v}}_O = \Sigma^* \bar{F} + \bar{\mathscr{T}} - \frac{\partial \bar{H}_r}{\partial t} - 2\bar{\omega}\times\bar{H}_r + m\frac{\partial^2 \bar{R}_0}{\partial t^2} + 2m\bar{\omega}\times\frac{\partial \bar{R}_0}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{K}_O}{\partial t}\right)_{J=\text{const.}} + \bar{\omega}\times\bar{K}_O = \Sigma\,\bar{\mathscr{M}}_a + \bar{\mathscr{M}}_r + \bar{\mathscr{M}}^* - \frac{\partial \bar{K}_r}{\partial t} -$$

$$- \bar{\omega}\times\bar{K}_r - \frac{\partial \bar{R}_O}{\partial t}\times\bar{H}_r, \tag{4}$$

în care

$$\left(\frac{\partial \bar{K}_O}{\partial t}\right)_{J=\text{const.}} = (J_x\dot{\omega}_x - J_{xy}\dot{\omega}_y - J_{xz}\dot{\omega}_z)\,\bar{i} +$$

$$+ (J_y\dot{\omega}_y - J_{yz}\dot{\omega}_z - J_{xy}\dot{\omega}_x)\,\bar{j} + (J_z\dot{\omega}_z - J_{xz}\dot{\omega}_x - J_{yz}\dot{\omega}_y)\,\bar{k}, \tag{5}$$

unde m reprezintă masa instantanee a aparatului, J_x, J_y, J_z — momentele de inerție în raport cu axele triedrului $Oxyz$ legat de avion, cu originea în centrul de masă, O, definit de versorii, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (axa Ox este axa longitudinală a avionului cu sensul pozitiv spre partea anterioară a fuzelajului, axa Oz este perpendiculară pe Ox în planul longitudinal de simetrie, orientată spre partea ventrală a fuzelajului, iar axa laterală Oy este astfel definită încît să formeze cu primele două un triedru rectangular drept), J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} — momente de inerție centrifugale, $\bar{v}_O$ — viteza absolută a centrului de masă, O, $\Sigma^*\bar{F}$ și $\Sigma\,\bar{\mathscr{M}}_a$ — elementele torsorului forțelor aerodinamice și de greutate, $\bar{\mathscr{T}}$ și $\bar{\mathscr{M}}_r$ — tracțiunea, respectiv momentul forțelor de propulsie-sustentație față de centrul de masă, $\bar{H}_r$ și $\bar{K}_r$ — impulsul, respectiv momentul cinetic în raport cu centrul maselor, corespunzătoare mișcării relative față de înveliș a particulelor solide, lichide, de aer și gaze din interiorul aparatului, $\bar{\omega}$ — viteza unghiulară a triedrului $Oxyz$, $\bar{K}_O$ — momentul cinetic al aparatului în raport cu centrul maselor, $\partial\bar{R}_O/\partial t$ și $\partial^2\bar{R}_O/\partial t^2$ — viteza și accelerația relativă ale centrului de masă, O, în raport cu învelișul. În aceste relații și în cele ce urmează cu simbolul $\partial/\partial t$ se notează derivata relativă a unui vector în raport cu triedrul legat de avion.

De asemenea, termenul $\bar{\mathscr{M}}^*$ din ecuația (4) este dat de [5]:

$$\bar{\mathscr{M}}^* = -\sum_{j=1}^{p}\int_{S_{ij}} \bar{r}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})\rho_a\bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma - \sum_{k=1}^{q}\int_{S_{ek}} \bar{r}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})\rho_g\bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma -$$

$$-\left(\frac{\partial \bar{K}_O}{\partial t}\right)_{\omega=\text{const.}}, \tag{6}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție cu originea în centrul de masă, O, iar

$$\left(\frac{\partial \bar{K}_O}{\partial t}\right)_{\omega=\text{const.}} = \left(\frac{dJ_x}{dt}\omega_x - \frac{dJ_{xy}}{dt}\omega_y - \frac{dJ_{xz}}{dt}\omega_z\right)\bar{i} +$$

$$+\left(\frac{dJ_y}{dt}\omega_y - \frac{dJ_{yz}}{dt}\omega_z - \frac{dJ_{xz}}{dt}\omega_x\right)\bar{j} +$$

$$+\left(\frac{dJ_z}{dt}\omega_z - \frac{dJ_{xz}}{dt}\omega_y - \frac{dJ_{yz}}{dt}\omega_y\right)\bar{k}. \qquad (6')$$

În mod curent ecuațiile mișcării avionului cu reacție se scriu sub forma

$$m\dot{\bar{v}}_O = \Sigma^* \bar{F} + \bar{\mathcal{T}}, \qquad (7)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{K}_O}{\partial t}\right)_{J=\text{const.}} + \bar{\omega}\times\bar{K}_O = \Sigma\,\bar{\mathcal{M}}_a + \bar{\mathcal{M}}_r,$$

trecîndu-se direct de la ecuațiile de mișcare ale avioanelor cu propulsie prin elice, prin înlocuirea forței rezultante a tracțiunilor elicilor și a momentului rezultant al acestora cu torsorul forțelor de tracțiune ale sistemelor aeroreactoare.

Este de observat că în studiul mișcării de translație ecuațiile (3) și (4) conduc practic la forma (7) dacă se consideră că vectorii $\bar{H}_r$ și $\frac{\partial \bar{R}_O}{\partial t}$ sînt constanți, situație caracteristică funcționării de regim a sistemului de propulsie. Așadar, pentru studiul performanțelor avionului se pot utiliza ecuațiile de mișcare în forma (7). De asemenea, și în studiul unor evoluții oarecare se observă că termenii suplimentari ce apar în ecuațiile (3), (4) față de ecuațiile (7) au valori mici în modul față de restul termenilor (elementele torsorului forțelor aerodinamice și de propulsie, forța de greutate) și deci pot fi neglijați fără a se afecta sensibil precizia rezultatelor.

Aceeași remarcă poate fi făcută și pentru studiul stabilității dinamice, cu observația că se pot obține rezultate contradictorii doar în cazurile cînd parametri ce definesc caracterul mișcării perturbate sînt situați în apropierea frontierei de stabilitate.

În studiul stabilității zborului imobil sau chiar a mișcării pe verticală, pentru avioanele cu decolare și aterizare verticală, neglijarea termenilor suplimentari din ecuațiile (3) și (4) nu mai este justificată întrucît aceștia au, cel puțin, valori comparabile cu cei corespunzători forțelor aerodinamice la mișcarea pe verticală) și chiar devin sensibil mai mari în mișcarea perturbată corespunzătoare zborului imobil.

Pentru a exprima termenul suplimentar $\bar{\mathcal{M}}^*$ din (4) se definește [3] pentru fiecare dintre suprafețele S_{ij}, S_{ek} centrul de intrare I_j, respectiv, centrul de ieșire, E_k, definiți de vectorii de poziție:

$$\bar{r}_{I_j} = \frac{\int_{S_{ij}} \bar{r}\,\rho_a \bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{S_{ij}} \rho_a \bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{r}_{E_k} = \frac{\int_{S_{ek}} \bar{r}\,\rho_g \bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{S_{ek}} \rho_g \bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma}, \tag{8}$$

precum și centrul suprafețelor de intrare, I, respectiv, centrul suprafețelor de ieșire, E, prin vectorii de poziție

$$\bar{r}_I = \frac{\sum_{j=1}^{p} Q_{ij}\bar{r}_{I_j}}{\sum_{j=1}^{p} Q_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^{p} Q_{ij}\bar{r}_{I_j}}{Q_i}, \tag{9}$$

$$\bar{r}_E = \frac{\sum_{k=1}^{q} Q_{ek}\bar{r}_{E_k}}{\sum_{k=1}^{q} Q_{ek}} = \frac{\sum_{k=1}^{q} Q_{ek}\bar{r}_{E_k}}{Q_e}, \tag{10}$$

unde Q_{ij} reprezintă debitul aerului ce intră în sistem prin suprafața S_{ij}, iar Q_{eh} debitul gazelor ejectate prin suprafața S_{ek}:

$$Q_{ij} = -\int_{S_{ij}} \rho_a \bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma;\quad Q_{ek} = \int_{S_{ek}} \rho_g \bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma; \tag{11}$$

s-a notat cu Q_i și Q_e debitul global de aer, respectiv de gaze.

Cu relațiile

$$\bar{r} = \bar{r}_I + \bar{r}' = \bar{r}_{I_j} + \bar{r}_j, \tag{12}$$

în care

$$\bar{r}_I = x_I\bar{i} + y_I\bar{j} + z_I\bar{k};\quad \bar{r}' = x'\bar{i} + y'\bar{j} + z'\bar{k},$$
$$\bar{r}_{I_j} = x_{I_j}\bar{i} + y_{I_j}\bar{j} + z_{I_j}\bar{k};\quad \bar{r}_j = x_j\bar{i} + y_j\bar{j} + z_j\bar{k}, \tag{13}$$

și considerînd pentru simplificare că

$$\int_{S_{ij}} x'y'\,\rho_a\bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{S_{ij}} x'z'\,\rho_a\bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{S_{ij}} y'z'\,\rho_a\bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{14}$$

se obține

$$\left[\sum_{j=1}^{p}\int_{S_{ij}} \bar{r}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})\rho_a\bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma\right]\cdot\bar{i} = -Q_i(y_I^2+z_I^2+k_{x_I}^2)\,\omega_x +$$

$$+\omega_y\sum_{j=1}^{p}Q_{ij}x_{I_j}y_{I_j}+\omega_z\sum_{j=1}^{p}Q_{ij}x_{I_j}z_{I_j}. \tag{15}$$

Procedînd analog pentru a doua sumă de integrale din (6) se obține

$$\left[\sum_{k=1}^{q}\int_{S_{ek}} \bar{r}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})\,\rho_g\bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma\right]\cdot\bar{i} = Q_e(y_E^2+z_E^2+k_{x_E}^2)\,\omega_x -$$

$$-\omega_y\sum_{k=1}^{q}Q_{ek}x_{E_k}y_{E_k}-\omega_z\sum_{k=1}^{q}Q_{ek}x_{E_k}z_{E_k}, \tag{16}$$

unde x_{E_k}, y_{E_k}, z_{E_k}, x_E, y_E, z_E sînt coordonatele, în raport cu triedrul $Oxyz$, ale centrelor E_k, respectiv ale centrului de ieșire, E, definite prin vectorii $\bar{r}_{E_k}$, $\bar{r}_E$.

În relațiile (15) și (16) s-a notat cu k_{x_I}, k_{y_I}, k_{z_I}, k_{x_E}, k_{y_E}, k_{z_E} razele de giratie axiale în raport cu axele triedrelor $Ixyz$, respectiv $Exyz$ (cu originea în I, respectiv în E, avînd axele paralele cu axele triedrului $Oxyz$) ale sistemului de particule de aer (gaze) care trec prin suprafețele S_{ij}, respectiv S_{ek}, în unitatea de timp.

Considerînd neglijabile derivatele momentelor de inerție din (6), rezultă în final

$$\mathcal{M}_x^* = [-Q_e(y_E^2+z_E^2+k_{x_E}^2)+Q_i(y_I^2+z_I^2+k_{x_I}^2)]\,\omega_x +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{q}Q_{ek}x_{E_k}y_{E_k}-\sum_{j=1}^{p}Q_{ij}x_{I_j}y_{I_j}\right)\omega_y +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{q}Q_{ek}x_{E_k}z_{E_k}-\sum_{j=1}^{p}Q_{ij}x_{I_j}z_{I_j}\right)\omega_z, \tag{17}$$

celelalte două proiecții ale vectorului $\bar{\mathcal{M}}^*$ se obțin imediat prin permutări.

2. ECUAȚIILE LINIARIZATE ALE MIȘCĂRII PERTURBATE

În cele ce urmează ne propunem să analizăm efectul considerării termenilor suplimentari din (3) și (4) în studiul stabilității avionului cu decolare și aterizare verticală, considerînd ca mișcare de bază zborul imobil.

Pentru a pune în evidență condiția de menținere a avionului la punct fix este necesar ca în locul vitezei absolute și accelerației absolute ale centrului de masă, să se introducă viteza și accelerația de transport, $\bar{u}_O$ și $\dot{\bar{u}}_O$ ale acestui punct, avînd că:

$$\bar{v}_O = \bar{u}_O + \frac{\partial \bar{R}_O}{\partial t}, \quad \dot{\bar{v}}_O = \dot{\bar{u}}_O + \frac{\partial^2 \bar{R}_O}{\partial t^2} + 2\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{R}_O}{\partial t}.$$

Considerînd că în mișcarea perturbată în jurul acestei poziții forțele și momentele aerodinamice sînt practic nule rezultă $\Sigma^* \bar{F} = \bar{G}$; $\Sigma \bar{\mathcal{M}}_a = 0$; totodată, prin amplasarea corespunzătoare a sistemelor reactive destinate sustentației se realizează $\bar{\mathcal{M}}_r = 0$, în tot timpul mișcării. În condițiile funcționării de regim a sistemelor reactive se poate admite că $\partial \bar{K}_r / \partial t = 0$; întrucît viteza relativă a centrelor de masă are aproximativ aceeași direcție ca și impulsul relativ, ultimul termen în (4) se neglijează. În sfîrșit, se consideră că triedrul $Oxyz$ legat de avion coincide cu triedrul de axe principale de inerție de la momentul inițial, astfel că pentru intervale limitate de timp se poate admite că $J_{xy} \approx 0$, $J_{xz} \approx 0$, $J_{yz} \approx 0$.

Cu aceste observații, ecuațiile de mișcare (3) și (4) devin:

$$\begin{aligned} m\dot{\bar{u}}_O &= \bar{G} + \bar{\mathcal{T}} - 2\bar{\omega} \times \bar{H}_r, \\ J_x \dot{\omega}_x \bar{i} + J_y \dot{\omega}_y \bar{j} + J_z \dot{\omega}_z \bar{k} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O &= \bar{\mathcal{M}}^* - \bar{\omega} \times \bar{K}_r \end{aligned} \tag{18}$$

unde

$$\bar{u}_O = u_x \bar{i} + u_y \bar{j} + u_z \bar{k},$$

$$\dot{\bar{u}}_O = \dot{u}_x \bar{i} + \dot{u}_y \bar{j} + \dot{u}_z \bar{k} + \bar{\omega} \times \bar{u}.$$

În ecuațiile (18) se va considera $\bar{H}_r = H_r \bar{i}$, unde $H_r = \text{const.}$, în ipoteza că mișcarea particulelor fluide în lungul axei longitudinale este preponderentă; totodată, considerînd că avionul este echipat cu un sistem aeroreactiv montat fix pe avion, avînd posibilitatea reglării direcției tracțiunii prin rotirea ajutajelor, se poate lua $\bar{K}_r = K_r \bar{i}$, cu $K_r = \text{const.}$, care reprezintă momentul cinetic al maselor solide în rotație, neglijînd momentul cinetic corespunzător mișcării relative a particulelor de fluid lichid, aer și gaze) față de înveliș.

În consecință, cu condiția $\bar{\mathcal{T}} = -\mathcal{T}\bar{k}$, din (18) rezultă ecuațiile scalare neliniare ale mișcării perturbate:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} &= -g \sin\theta + \omega_z u_y - \omega_y u_z, \\ \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} &= g \cos\theta \sin\varphi + \omega_x u_z - \omega_z u_x - 2\frac{g}{G} H_r \omega_z, \\ \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} &= g \cos\theta \cos\varphi - \frac{g}{G}\mathcal{T} + \omega_y u_x - \omega_x u_y + 2\frac{g}{G} H_r \omega_y; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{\mathcal{M}_x^*}{J_x} + \frac{J_y - J_z}{J_z}\omega_y\omega_z,$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{\mathcal{M}_y^*}{J_y} + \frac{J_z - J_x}{J_y}\omega_x\omega_z - \frac{K_r}{J_y}\omega_z, \tag{20}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\mathcal{M}_z^*}{J_z} + \frac{J_x - J_y}{J_z}\omega_x\omega_y + \frac{K_r}{J_z}\omega_y;$$

la care se adaugă ecuațiile [1]:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_y \cos\varphi - \omega_z \sin\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_x + (\omega_y \sin\varphi + \omega_z \cos\varphi)\,\mathrm{tg}\,\theta, \tag{21}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_y \sin\varphi + \omega_z \cos\varphi}{\cos\theta},$$

unde ψ este unghiul de azimut, format în planul orizontal între axa Ox și o axă de referință, θ — unghiul de atitudine longitudinală, definit de axa Ox și planul orizontal, φ — unghiul de înclinare laterală.

În expresiile proiecțiilor $\mathcal{M}_x^*$, $\mathcal{M}_y^*$, $\mathcal{M}_z^*$ se consideră că sistemul reactiv, cu tracțiune vectorială prin orientarea ajutajelor, este prevăzut cu două secțiuni de admisie S_{i_1}, S_{i_2}, plasate simetric față de planul longitudinal, cu centrele I_1 și I_2 în planul Oxy, astfel că $y_{I_1} = -y_{I_2}$; $z_{I_1} = z_{I_2} = z_I = 0$; pentru o funcționare identică a celor două sisteme de admisie rezultă $y_I = 0$. În plus, se consideră, evident, că $x_I = x_{I_1} = x_{I_2} > 0$.

Cît privește secțiunile de ieșire a gazelor se consideră că sistemul este prevăzut cu patru ajutaje dispuse simetric, două cîte două, față de planul Oxz; pentru ajutajele anterioare se definește un centru de ieșire E_1 și debitul global de gaze Q_{e_1}, iar pentru ajutajele posterioare, centrul de ieșire E_2 și debitele de gaze Q_{e_2}. În consecință, centrele E_1 și E_2 fiind situate în planul Oxz vom avea $y_{E_1} = y_{E_2} = y_E = 0$, iar $z_{E_1} = z_{E_2} = z_E > 0$; în plus, pentru cele două perechi de ajutaje orientabile, conform cu (10), se poate scrie

$$Q_{e_1} x_{E_1} + Q_{e_2} x_{E_2} = Q_e x_E.$$

Avînd în vedere că

$$Q_e = Q_i + Q_c \approx Q_i,$$

unde Q_c este debitul de combustibil, cu considerațiile prezentate, rezultă:

$$\mathcal{M}_x^* = a_{11}\omega_x + a_{13}\omega_z,$$

$$\mathcal{M}_y^* = a_{22}\omega_y, \tag{22}$$

$$\mathcal{M}_z^* = a_{31}\omega_x + a_{33}\omega_z,$$

unde

$$a_{11} = Q_i(k_{x_I}^2 - k_{x_E}^2 - z_E^2),$$

$$a_{13} = Q_e x_E z_E,$$

$$a_{22} = Q_i(x_I^2 - x_E^2 - z_E^2 + k_{y_I}^2 - k_{y_E}^2), \tag{23}$$

$$a_{31} = a_{13},$$

$$a_{33} = Q_i(x_I^2 - x_E^2 + k_{z_I}^2 - k_{z_E}^2).$$

În mișcarea de bază $u_x = u_y = u_z = \omega_x = \omega_y = \omega_z = \theta = \varphi = \psi = 0$, astfel că din ecuațiile (19) rezultă condiția evidentă $\mathcal{T} = G$.

Ecuațiile liniarizate ale mișcării perturbate devin așadar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta u_x) = g\delta\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta u_y) = -2\frac{g}{G}H_r\delta\omega_z + g\delta\varphi, \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta u_z) = 2\frac{g}{G}H_r\delta\omega_y;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\omega_x) = \frac{a_{11}}{J_x}\delta\omega_x + \frac{a_{13}}{J_x}\delta\omega_z,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\omega_y) = \frac{a_{22}}{J_y}\delta\omega_y - \frac{K_r}{J_y}\delta\omega_z, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\omega_z) = \frac{a_{31}}{J_z}\delta\omega_x + \frac{K_r}{J_z}\delta\omega_y + \frac{a_{33}}{J_z}\delta\omega_z;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\theta) = \delta\omega_y,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\varphi) = \delta\omega_x, \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\psi) = \delta\omega_z.$$

3. STABILITATEA ZBORULUI LA PUNCT FIX

Este de observat că sistemul (25) se separă de sistemele (24) și (26); avînd soluția acestui sistem de obțin imediat soluțiile sistemelor (24) și (28).

Pentru a analiza stabilitatea zborului imobil vom considera mai întîi cazul particular cînd $x_E = 0$, ceea ce revine la a considera că debitele jeturilor din cele două perechi de ajutaje satisfac condiția $Q_{1\epsilon}x_{E_1}+Q_{2\epsilon}x_{E_2}= = 0$. În acest caz $a_{13} = a_{31} = 0$ și deci prima ecuație din (25) are soluția

$$\delta\omega_x = \exp\left(\frac{a_{11}}{J_x}t\right) - 1,$$

de unde rezultă condiția $a_{11} < 0$, care, așa cum rezultă din (23), este curent îndeplinită.

Relativ la celelalte două ecuații din (25) ecuația caracteristică este:

$$\lambda^2 - \lambda\left(\frac{a_{22}}{J_y}+\frac{a_{33}}{J_z}\right)+\frac{a_{22}a_{33}}{J_yJ_z}+\frac{K_r^2}{J_yJ_z} = 0,$$

de unde rezultă că mișcarea este asimptotic stabilă în raport cu variabilele ω_y, ω_z, dacă

$$\frac{a_{22}}{J_y}+\frac{a_{33}}{J_z} < 0, \tag{27}$$

$$a_{22}a_{33} + K_r^2 > 0, \tag{28}$$

de unde, neglijînd unii termeni mici din expresiile lui a_{22} și a_{33}, adică

$$a_{22} \approx Q_i(x_I^2 - z_E^2),\ a_{33} \approx Q_i x_I^2,$$

rezultă

$$\left(\frac{x_I}{z_E}\right)^2 < \frac{J_z}{J_y + J_z},\ (z_E^2 - x_I^2)x_I^2 < \frac{K_r^2}{Q_i^2}. \tag{29}$$

Dacă se consideră $K_r = 0$, condiție frecvent întîlnită la avioanele cu număr par de motoare și aproximativ îndeplinită la avionul monomotor, dacă se iau măsuri corespunzătoare privind sensurile de rotație ale elementelor mobile, din a doua ecuație (25) rezultă

$$\delta\omega_y = \exp\left(\frac{a_{22}}{J_y}t\right) - 1. \tag{30}$$

Ecuația caracteristică a sistemului format din prima și a treia ecuație din (25) este

$$\lambda^2 - \lambda\left(\frac{a_{11}}{J_x} + \frac{a_{33}}{J_z}\right) + \frac{a_{11}a_{33}}{J_xJ_z} - \frac{a_{13}a_{31}}{J_xJ_z} = 0$$

și deci condițiile ca mișcarea să fie asimptotic stabilă în raport cu variabilele ω_x, ω_y, ω_y devin:

$$a_{22} < 0, \quad \frac{a_{11}}{J_x} + \frac{a_{33}}{J_z} < 0, \quad a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} > 0, \tag{31}$$

de unde, ținînd seama de (23) în care se neglijează termenii mici, pentru primele două condiții rezultă:

$$x_I^2 - x_E^2 - z_E^2 < 0, \quad x_I^2 - x_E^2 < z_E^2 \frac{I_z}{J_x},$$

în timp ce ultima condiție (31) poate fi eventual îndeplinită dacă

$$z_E^2, \; x_I^2 - x_E^2, \; k_{x_E}^2, \; k_{x_I}^2, \; k_{z_E}^2, \; k_{z_I}^2$$

sînt de același ordin de mărime.

Din cele arătate rezultă că, pe lîngă termenii corespunzători cuplurilor giroscopice termenii proveniți din vectorul $\bar{M}^*$, care depind de caracteristica de funcționare a sistemului reactiv de sustentație și de dimensiunile și amplasarea secțiunilor de admisie și ejecție în raport cu triedrul $Oxyz$, pot contribui, eventual, la realizarea unui zbor imobil stabil.

În condițiile utilizării unor amortizori automați de rotație [2], ceea ce înseamnă introducerea în ecuațiile (25) a unor termeni de forma $-k_1 \delta\omega_x$, $-k_2 \delta\omega_y$ și, respectiv, $-k_3 \delta\omega_z$ considerarea termenilor suplimentari dați de proiecțiile vectorului $\bar{M}^*$ va avea ca rezultat micșorarea sau creșterea factorilor de amplificare k_1, k_2, k_3, pentru a obține același grad de amortizare.

Primită la redacție la 17 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. B. ETKIN, *Dynamics of Flight. Stability and Control*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, 1963.
2. T. HACKER, *Stabilitate și comandă în teoria zborului*, Edit. Academiei R.S.România, București, 1968.
3. M. M. NIȚĂ, GH. DRĂGĂNOIU, *Deplasarea relativă a centrului de masă al avionului echipat cu motoare aeroreactoare*, St. cerc. mec. apl., **35**, 2, 235–242 (1976).
4. M. M. NIȚĂ, GH. DRĂGĂNOIU, *Cu privire la ecuația mișcării centrului de masă al aparatelor de zbor echipate cu motoare aeroreactoare*, Buletinul Academiei militare, 2, 40–48, (1978).
5. M. M. NIȚĂ, *On the Equation of Motion About the Mass Centre of the Jet Aircraft Considered as Variable Mass System*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée, **24**, 4, 527–537 (1979).

O EXTINDERE A METODEI DE TRASARE CARAFOLI LA REȚELE DE PROFILE

de C. BERBENTE
Institutul politehnic București

Metoda Carafoli pentru trasarea profilelor izolate pe baza transformării conforme este extinsă la rețele de profile. Se arată că parametri de bază care determină caracteristicile aerodinamice (inclusiv coeficientul de rotunjire la bordul de fugă) se păstrează, deși sînt într-o anumită măsură modificați prin efectul rețelei. Un procedeu simplu de corecție a profilului de bază permite obținerea unor profile interesante de turbină și compresor.

1. INTRODUCERE

Metoda Carafoli de trasare a profilelor izolate [1], [2] se remarcă prin simplitatea și eleganța cu care sînt introduși parametrii de bază care determină proprietățile aerodinamice: curbura, grosimea maximă relativă, unghiul de portanță nulă, repartiția grosimii în lungul corzii precum și coeficientul de rotunjire a bordului de fugă. Metoda folosește o transformare conformă avînd numai trei termeni:

$$z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_n}{\zeta^n} \qquad (\zeta = \rho e^{i\theta}), \tag{1}$$

unde z reprezintă variabila complexă din planul profilului, iar ζ variabila complexă din planul cercului transformat. Constantele q și q_n, n se determină ținînd seama de proprietățile aerodinamice impuse profilului. Transformatul bordului de fugă este un punct de viteză nulă pe cerc. De asemenea, se impune poziția punctului din planul ζ unde se anulează derivata funcției de transformare (1); în cazul profilelor cu bord de fugă ascuțit acest punct este chiar transformatul bordului de fugă.

Condiția de anulare a vitezei în punctul de pe cercul transformat care corespunde bordului de fugă permite determinarea circulației în jurul profilului.

2. CAZUL REȚELELOR DE PROFILE

Fie o rețea liniară de profile identice, avînd pasul t și unghiul de instalare λ (fig. 1).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 40, NR. 6, 1981, P. 811–817

În cazul în care profilele sînt plăci plane, paralele cu axa x, se ştie că transformarea :

$$Z_p = \frac{t}{2\pi}\left(e^{i\lambda}\ln\frac{\zeta + R}{\zeta - R} + e^{-i\lambda}\ln\frac{\zeta R + 1}{\zeta R - 1} + B\right) \tag{2}$$

pune în corespondenţă profilele din reţea cu cercul de rază unitate din planul ζ. S-au notat cu R şi B constante care vor fi determinate mai jos.

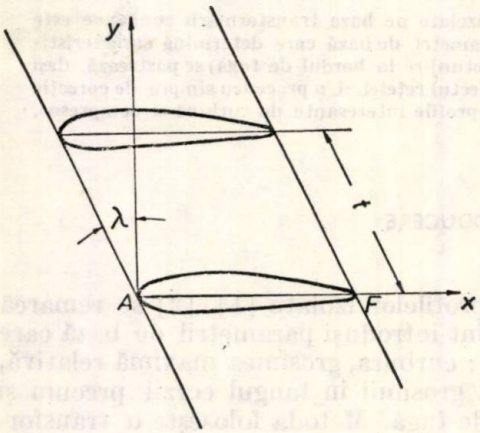


Fig. 1

Notînd cu A şi F bordul de atac, respectiv de fugă ale profilului, punctele B, D transformatele acestor vîrfuri ascuţite, prin relaţia (2) se obţin din condiţia de anulare a derivatei $\frac{dz_p}{d\zeta}$. În acest mod se obţine :

$$\theta_B = -\theta_0\,;\quad \theta_D = -\theta_0,$$

$$\left(\rho = 1\,;\ \frac{dz_p}{d\zeta} = 0\right), \tag{3}$$

unde unghiul θ_0 este dat de expresia

$$\theta_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{R^2 - 1}{R^2 + 1}\operatorname{tg}\lambda\right). \tag{4}$$

Practic, se lucrează cu determinarea principală a funcţiei „ln" din expresia (2). În aceste condiţii, o fişie de lăţime t, plasată simetric de o parte şi de alta a unei plăci din reţea, se transformă prin relaţia (2) în exteriorul cercului $\rho = 1$.

Notînd cu c coarda profilului şi impunînd, în plus, ca

$$x_A = 0\,;\quad x_F = c\,;\quad y_A = y_F = 0, \tag{5}$$

se obţin relaţiile :

$$\frac{c}{t} = \frac{1}{\pi}\left(\cos\lambda\ln\frac{1 + 2R\cos\theta_0 + R^2}{1 - 2R\cos\theta_0 + R^2} + 2\sin\lambda\operatorname{arctg}\frac{2R\sin\theta_0}{R^2 - 1}\right), \tag{6}$$

$$B = \pi\left(\sin\lambda + \frac{b}{t} - i\cos\lambda\right). \tag{7}$$

Fiind date desimea reţelei (c/t) şi unghiul de instalare din relaţiile (4) şi (6) se pot determina parametrii θ_0 şi R. Corespondenţa dintre un

punct de pe cercul $\rho = 1$ și un punct de pe placă se scrie sub formă reală astfel:

$$\frac{x_{pc}}{t} = -\frac{1}{2\pi}\left(\cos\lambda \ln\frac{1 + 2R\cos\theta + R^2}{1 - 2R\cos\theta + R^2} - 2\sin\lambda \operatorname{arctg}\frac{2R\sin\theta}{R^2 - 1}\right) + \frac{b}{2t} \tag{8}$$

$$(y_{pc} = 0).$$

În cazul cînd profilele din rețea au o formă oarecare, se caută o transformare conformă:

$$z = z_p e^{-i\nu} + \sum_0^\infty \frac{C_n}{\zeta^n}, \tag{9}$$

unde ν și C_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sînt constante. În cazul cînd rețeaua se transformă pe cercul de rază unitate se obține metoda Vallander. Se observă că în expresia (9) intră termenul z_p din cazul rețelei de plăci rotite cu unghiul ν, iar seria reprezintă o corecție care ține seama de curbura și grosimea profilului din rețea. Datorită menținerii cercului $\rho = 1$, metoda Vallander necesită un număr mare de termeni corectivi, fiind aplicabilă la profile subțiri de curbură mică.

Extinderea metodei Carafoli la profile în rețea se bazează pe:

a) alegerea unui cerc transformat (k) cu centrul deplasat față de originea axelor;

b) interpretarea deplasării centrului cercului (k) în parametri legați de curbura profilului și de repartiția grosimii în lungul corzii;

c) introducerea coeficientului de rotunjire (considerarea rețelelor de profile Carafoli);

d) construirea unui *profil de bază* care apoi poate fi corectat.

În cazul în care se utilizează un cerc cu centrul deplasat, se poate lua $\nu = 0$. Astfel, se păstrează unghiul de instalare al rețelei.

2.1. TRASAREA PROFILULUI DE BAZĂ

Presupunem că s-au dat desimea $\frac{c}{t}$ și unghiul de instalare λ, și s-au determinat parametrii R și θ_0 ai rețelei plane de aceeași desime și unghi de instalare.

Prin analogie cu metoda Carafoli pentru profilul izolat, vom determina un profil de bază obținut dintr-un cerc (k) prin transformarea (2).

Poziția centrului O' al cercului (k) se fixează în raport cu cercul $\rho = 1$. Fie BD diametrul acestui cerc care face unghiul $(-\theta_0)$ cu axa O (fig. 2). Centrul O' se alege astfel încît

$$OO' = me^{i\delta}; \quad \delta = \frac{\pi}{2} - \theta_0 + \varepsilon, \tag{10}$$

unghiul ε fiind făcut de OO' cu normala la diametrul BD. Parametrul $m \cos\varepsilon$, care reprezintă deplasarea centrului O' în direcţia normalei la BD, determină curbura profilului, iar produsul $m \sin\varepsilon$ influenţează repartiţia grosimilor.

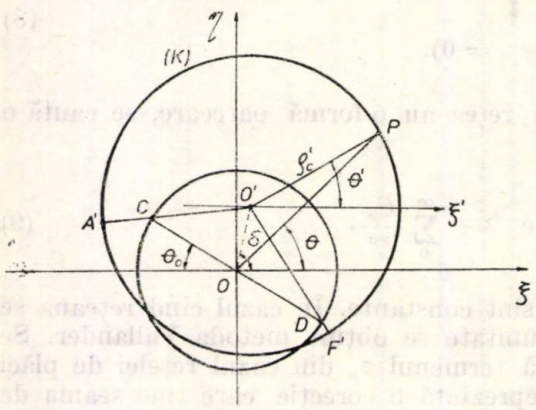


Fig. 2

Pentru $\varepsilon > 0$, spre exemplu, profilul se îngroaşă spre bordul de atac.

Transformatul F' al bordului de fugă se ia pe prelungirea dreptei $O'D$, astfel încît parametrul

$$k_f = FF' \qquad (11)$$

joacă rolul unui coeficient de rotunjire a bordului de fugă în mod analog cu metoda Carafoli pentru trasarea profilelor izolate. Într-adevăr, derivata transformării $\left(\frac{dz_p}{d\zeta}\right)$ se anulează în punctul D, interior cercului (k), de rază ρ'_k, dată de relaţia

$$\rho'_k = \sqrt{1 + m^2 + 2m \sin\varepsilon} + k_f. \qquad (12)$$

În cazul reţelelor de profile, variaţiile parametrilor m, ε şi k_f sînt limitate de condiţia ca cercul (k) să aibă în exterior punctele singulare $\zeta = \pm R$, în timp ce punctele singulare $\zeta = \pm 1/R$ trebuie să fie conţinute în interiorul acestui cerc. Aceste condiţii sînt mai greu de satisfăcut pentru reţele dese, cu valori mari ale modulului unghiului de instalare λ.

Practic, aceşti parametri variază în intervale: $m \in (0\,;0{,}4)$, $\varepsilon \in (0°, 25°)$, $k_f \in (0\,;\ 0{,}05)$.

Pentru trasare, se iau punctele convenabile pe cercul O'şi se determină x_p şi y_p din relaţia (2), constanta B fiind dată de relaţia (7).

2.2. CORECTAREA PROFILULUI DE BAZĂ

Profilele de bază pot fi corectate în diverse moduri alegînd un număr de termeni din suma care apare în transformarea (9). O condiţie importantă care poate fi impusă o constituie anularea derivatei funcţiei de transformare într-un punct plasat pe direcţia $O'F'$, în particular chiar în F' dacă bordul de fugă al profilului trebuie să rămînă ascuţit. În acest scop, este utilă expresia derivatei funcţiei z_p,

$$e^{i\theta}\frac{dz_p}{d\zeta} = -\frac{Rt}{\pi}\,\frac{(\rho^2-1)[R^2\cos(\lambda+\theta)+\cos(\lambda-\theta)]+i(\rho^2+1)[R^2\sin(\lambda+\theta)-\sin(\lambda-\theta)]}{R^2(\rho^4+1)\cos 2\theta - \rho^2(R^4+1) + iR^2(\rho^4-1)\sin 2\theta}. \qquad (13)$$

Alte condiții pot fi legate de curbura profilului sau de repartiția grosimilor, presupunînd că acestea nu au putut fi realizate în mod satisfăcător de profilul de bază. În acest sens, este interesant de studiat ce modificări introduce un termen T_n de forma :

$$T_n = \frac{C_n}{(\zeta - a)^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

unde a și C_n sînt constante complexe, polul $\zeta = a$ fiind întotdeauna situat în interiorul cercului (k). În particular, $a = 0$ sau $a = \mu$.

Alegînd un sistem de axe cu centrul în $\zeta = a$ vom nota cu Z variabila complexă :

$$Z = \frac{\zeta - a}{\rho_c'} = re^{i\omega}. \tag{15}$$

Cu aceste notații, corecțiile coordonatelor x, y ale punctelor de pe profilul de bază pot fi puse sub forma :

$$\left(\frac{x - x_p}{t}\right)_n = \left(\frac{r_k}{r}\right)^n A_{kn} \sin n(\omega - \omega_{kn}), \tag{16a}$$

$$\left(\frac{y - y_p}{t}\right)_n = \left(\frac{r_k}{r}\right)^n A_{kn} \cos n(\omega - \omega_{kn}), \tag{16b}$$

unde A_{kn} este o mărime adimensională care reprezintă abaterea în coordonata y într-un punct p_k de pe profil. Transformatul punctului p_k pe cercul (k) are coordonatele (r_k, ω_k).

Pentru alegerea parametrilor n, A_{kn} și ω_{kn} sînt importante zerourile funcțiilor (16) care sînt în număr de $2n$.

Putem realiza profile interesante cu relativ puțini termeni $T_n (n = 1, 2, 3)$, alegînd convenabil parametri introduși așa cum se va vedea din aplicațiile prezentate.

3. EXEMPLE DE TRASARE

În figura 3 sînt prezentate cîteva profile de bază trasate pentru diverse valori ale parametrilor $\frac{t}{c}$, λ, m, ε și k_f. Valorile pozitive ale unghiului de instalare ($\lambda > 0$) corespund rețelelor de turbină, iar valorile negative rețelelor de compresor. Practic, profilele obținute trebuie apreciate tocmai ca profile de turbină sau compresor. Spre exemplu, profilul din figura 3*a* se apropie de profilele utilizate la baza unor palete de compresor, în timp ce profilul din figura 3*d* ar putea fi utilizat la vîrful unei palete de turbină.

Influența parametrilor $m \cos \varepsilon$, $m \sin \varepsilon$ și k_f este similară cu cazul profilului izolat, fiind modificată în primul rînd de desimea rețelei $\frac{t}{b}$ și mai puțin de unghiul de instalare λ. Spre exemplu, la $\frac{t}{b} = 1$, $\lambda = 30°$, $\varepsilon = 0$, curbura profilului este aproximativ $m/3$, în timp ce pentru un profil izolat este $m/2$; apare deci o tendință de aplatisare a profilului în rețea. În mod similar, influența coeficientului de rotunjire k_f este mai redusă, în comparație cu profilul izolat. Repartiția grosimii este determinată în primul rînd de coeficientul $m \sin \varepsilon$ dar este influențată și de parametrul k_f.

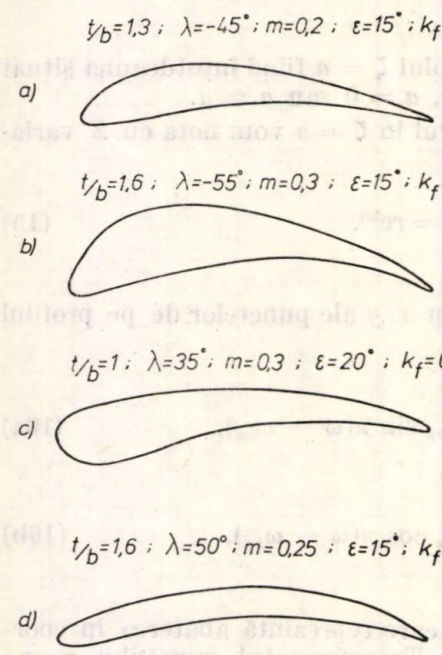


Fig. 3

Profilele de rețea compresoare sînt subțiri, de curbură relativ mică și se pot corecta mai ușor. De aceea, ne-am ocupat, în special, de corectarea profilelor de turbină.

În figura 4*a* este reprezentat un profil de bază avînd : $m = 0{,}3$; $\varepsilon = 15°$, $k_f = 0{,}03$, $\frac{t}{b} = 1$, $\lambda = 30°$. Pentru mărirea curburii și o mai bună repartiție a grosimii, ținînd seama că este vorba de o rețea de turbină s-a utilizat un singur termen corectiv $T_2(n = 2)$ avînd $A_{k2} = -0{,}02$ și $\omega_{k2} = -0{,}43°$ (corespunzător transformatului bordului de fugă). S-a luat $a = 0$. Profilul corectat este reprezentat în figura 4*b*.

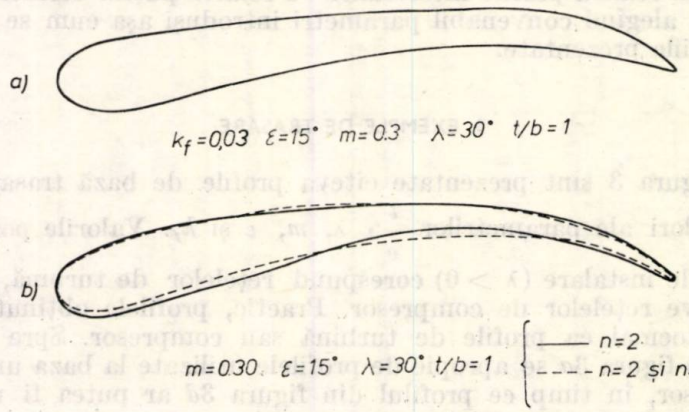


Fig. 4

Pentru $n = 3$ și $A_{k3} = 0{,}005$ se obțin de asemenea rezultate interesante, așa cum se observă în figura 4*b*.

Deplasarea polului $\zeta = a$ în originea cercului de bază ($a = \mu$) conduce la variații prea rapide ale termenului corectiv.

Menționăm că în metoda Carafoli pentru profile izolate se recomandă de asemenea valorile $n = 2$ și $n = 3$ ($a = 0$) pentru termenul corectiv.

În concluzie, se poate spune că principalele caracteristici ale coeficienților recomandați în metoda Carafoli pentru profilul izolat, se păstrează în cazul rețelelor conducînd la rezultate interesante. Profilele astfel obținute sînt utilizabile direct sau pot reprezenta un start foarte bun pentru obținerea de noi profile pentru rețelele de turbină și compresor.

Primită la redacție la 17 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, *Aerodinamica*, Edit. tehnică, București, 1951.
2. E. CARAFOLI și T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor*, vol. II, Edit. Academiei, 1955.

BIBLIOTECA CENTRALĂ A MUZEELOR 1948

CURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL UNUI FUZELAJ CONIC DE SECȚIUNE OARECARE IZOLAT SAU PREVĂZUT CU O ARIPĂ DELTA CU BORDURILE SUBSONICE

de D. MATEESCU și R. ȘELESCU
INCREST, București

Pentru studiul în regim supersonic al fuzelajului conic de secțiune oarecare prevăzut cu o aripă delta cu bordurile de atac subsonice, în lucrare este aplicată metoda de rezolvare elaborată de primul autor în [1] care permite, în final, determinarea vitezei axiale de perturbație și coeficientului de presiune pe aripă și pe fuzelaj, precum și a coeficientului de portanță al întregului sistem.
Soluția pentru conul izolat de secțiune oarecare se obține prin simplă particularizare din cea stabilită pentru sistemul aripă delta-fuzelaj conic de secțiune arbitrară.
Rezultatele teoretice deduse în lucrare pentru cazurile fuzelajului eliptic izolat și prevăzut cu o aripă delta sînt în bună concordanță cu cele experimentale obținute de Jorgensen [4], după cum este indicat în figurile 4 și 5.

1. INTRODUCERE

Obiectul prezentei lucrări îl constituie studiul curgerii supersonice în jurul sistemului portant format dintr-o aripă delta cu bordurile de atac subsonice și un fuzelaj conic de secțiune transversală oarecare (fig. 1), fără a lua în considerare separația curentului la bordurile de atac subsonice, al cărei efect se manifestă la incidențe mai mari.

Această problemă a constituit și obiectul cercetărilor teoretice efectuate de J. R. Spreiter [5] în cadrul ipotezei corpurilor zvelte, precum și a celor experimentale întreprinse de L. H. Jorgensen [4] asupra cazului particular al unui fuzelaj conic de secțiune eliptică prevăzut cu o aripă delta. Studiul elaborat de Spreiter [5] fiind dezvoltat în cadrul ipotezei corpurilor zvelte, rezultatele teoretice obținute de el au trebuit să fie modificate printr-un factor semiempiric în scopul de a obține concordanța acestora cu rezultatele experimentale obținute de Jorgensen [4] în urma efectuării unor cercetări experimentale sistematice.

În această lucrare, care se bazează pe rezultatele studiilor noastre anterioare [1] și [2], vom prezenta o metodă pentru studiul curgerii supersonice în jurul sistemului aripă triunghiulară-fuzelaj conic de secțiune oarecare stabilită în cadrul teoriei generale a mișcărilor conice dezvoltată de E. Carafoli [3], fără a impune nici o restricție suplimentară care să decurgă din ipoteza corpurilor zvelte. Datorită acestui fapt, rezultatele teoretice obținute prin aplicarea metodei de studiu prezentată în această lucrare la cazul fuzelajului conic eliptic prevăzut cu o aripă delta sînt în bună concordanță cu cele experimentale obținute de Jorgensen [4], după cum se poate constata din comparația prezentată în figura 4.

Metoda dezvoltată în această lucrare permite obţinerea, printr-o simplă operaţie de trecere la limită, a soluţiei pentru cazul fuzelajului conic izolat de secţiune oarecare, care este de asemenea în bun acord cu rezultatele experimentale obţinute de Jorgensen [4], pentru conul eliptic izolat, după cum se observă din comparaţia prezentată în figura 5.

2. NOTAŢIILE FOLOSITE

U_∞ — viteza curentului supersonic neperturbat;

a_∞ — viteza sunetului în condiţiile curentului neperturbat;

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach al curentului supersonic neperturbat;

$$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1};$$

$Ox_1x_2x_3$ — sistem cartezian ortogonal de coordonate, avînd axa Ox_1 situată în planul de simetrie al fuzelajului (figura 1);

$y = \dfrac{x_2}{x_1}$, $z = \dfrac{x_3}{x_1}$ — coordonatele adimensionale ale planului fizic $(x_1 = 1)$;

$f\left(\dfrac{x_2}{x_1}, \dfrac{x_3}{x_1}\right) = f(y, z) = 0$ — ecuaţia suprafeţei conice a fuzelajului de secţiune oarecare;

$\pm l$ — coordonatele din planul fizic $(x_1 = 1)$ corespunzătoare bordurilor de atac ale aripii (figura);

α — unghiul de incidenţă al aripii şi axei Ox_1 a fuzelajului faţă de direcţia vitezei curentului supersonic neperturbat;

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ — potenţialul vitezelor de perturbaţie, care este o funcţie omogenă de ordin unu în cazul mişcărilor conice şi care satisface ecuaţia liniarizată a potenţialului

$$-B^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = 0; \qquad (1)$$

$u = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}$, $v = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}$, $w = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}$ — componentele vitezei de perturbaţie după direcţiile celor trei axe de coordonate, care în cazul mişcărilor conice sînt funcţii omogene de ordin zero.

3. CONSIDERAȚII ASUPRA METODEI DE REZOLVARE

Să considerăm sistemul aripă-fuzelaj conic definit geometric în figura 1*a*, a cărui aripă considerată subțire are forma în plan triunghiulară simetrică, definită prin bordurile de atac OA_1 și OA_2 subsonice ($y = \pm l$, $Bl < 1$), iar fuzelajul este o suprafață conică de secțiune oarecare, simetrică față de planul Ox_1x_2, definită prin ecuația curbei directoare din planul fizic ($x_1 = 1$),

$$f(y, z) = 0, \text{ unde } y = \frac{x_2}{x_1},$$

$$z = \frac{x_3}{x_1}. \tag{2}$$

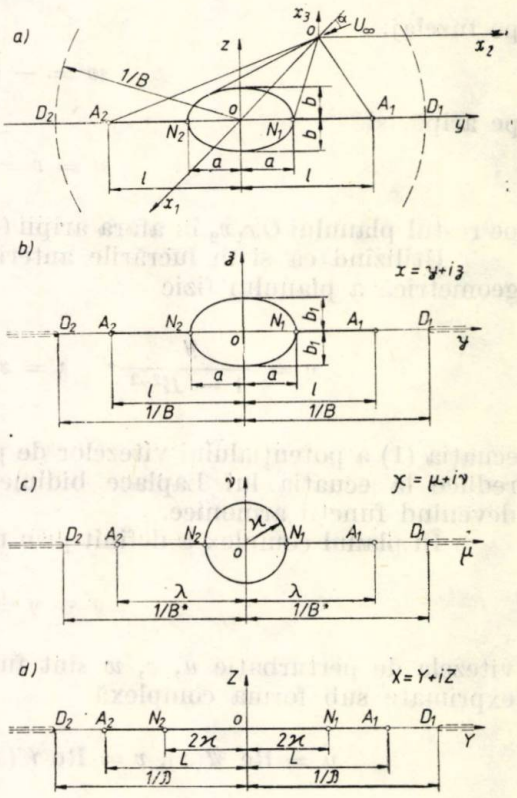


Fig. 1

Considerînd că aripa și fuzelajul au incidența α față de direcția vitezei U_∞ a curentului neperturbat, mișcarea supersonică în jurul sistemului aripă-fuzelaj este definită prin condițiile la limită

$$v\frac{\partial f}{\partial y} + (w + U_\infty \sin\alpha)\frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$= (U_\infty \cos\alpha + u)\left(y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{3}$$

pe fuzelaj, și

$$w = -U_\infty \sin\alpha \tag{4}$$

pe aripă.

În cadrul teoriei liniarizate, din mișcarea generală în jurul sistemului considerat mai sus poate fi separată mișcarea în jurul fuzelajului conic izolat de secțiune oarecare fără incidență, definită prin condițiile la limită

$$v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = (U_\infty + u)\left(y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{5a}$$

$$w = 0, \tag{5b}$$

pe fuzelajul conic și, respectiv, pe planul Ox_1x_2 în afara fuzelajului, mișcare care a fost studiată prin diferite metode de numeroși autori [6], [7], [8].

În această lucrare vom studia mişcarea care rezultă în urma acestei separări şi care ia în considerare efectul incidenţei α a sistemului aripă -fuzelaj, definită prin condiţiile la limită

$$v\frac{\partial f}{\partial y}+(w+\alpha U_\infty)\frac{\partial f}{\partial z}=u\left(y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cong 0 \tag{6}$$

pe fuzelaj,

$$w=-\alpha U_\infty \tag{7}$$

pe aripă, şi

$$u=v=0 \tag{8}$$

pe restul planului Ox_1x_2 în afara aripii ($y<-l$ şi $y>l$).

Utilizînd ca şi în lucrările anterioare [1], [2], [3], transformarea geometrică a planului fizic

$$\mathfrak{y}=\frac{y}{1-B^2z^2},\qquad \mathfrak{z}=z\frac{\sqrt{1-B^2(y^2+z^2)}}{1-B^2z^2} \tag{9}$$

ecuaţia (1) a potenţialului vitezelor de perturbaţie din mişcarea conică se reduce la ecuaţia lui Laplace bidimensională, vitezele de perturbaţie devenind funcţii armonice.

În planul complex x definit prin transformarea (9),

$$x=\mathfrak{y}+i\mathfrak{z}, \tag{10}$$

vitezele de perturbaţie u, v, w sînt funcţii armonice, astfel încît pot fi exprimate sub forma complexă

$$u=\operatorname{Re}\mathcal{U}(x),\ v=\operatorname{Re}\mathcal{V}(x),\qquad w=\operatorname{Re}\mathcal{W}(x), \tag{11}$$

între funcţiile de variabilă complexă $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{W}$ existînd relaţiile de compatibilitate

$$\mathrm{d}\mathcal{U}=-x\mathrm{d}\mathcal{V}=\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\mathrm{d}\mathcal{W}, \tag{12}$$

deduse din condiţiile de irotaţionalitate a mişcării [3].

Prin transformarea (9), urma aripii din planul fizic rămîne nemodificată (figura 1b), urma conului Mach $\left(y^2+z^2=\frac{1}{B^2}\right)$ se transformă în tăieturile $-\infty D_2$ şi $D_1\infty$ de pe axa reală $O\mathfrak{y}$, iar conturul secţiunii transversale a fuzelajului se modifică puţin, fiind dat de ecuaţia modificată care se deduce din (2)

$$f(y,z)=f_1(\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0, \tag{13}$$

astfel încît ordonata centrală a fuzelajului (pentru $y = \eta = 0$) devine, ținînd seama de (9),

$$b_1 = \frac{b}{\sqrt{1 - B^2 b^2}}. \tag{14}$$

Considerînd în cadrul ipotezei perturbațiilor mici că dimensiunile transversale ale fuzelajului sînt reduse față de cele ale conului Mach, condiția la limită pe fuzelaj poate fi scrisă sub forma

$$v \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + (w + \alpha U_\infty) \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \cong 0, \tag{15}$$

iar prin integrarea relațiilor de compatibilitate (12) în vecinătatea fuzelajului se obține

$$w = -\alpha U_\infty - \operatorname{Im} \mathscr{V}, \tag{16}$$

astfel încît condițiile la limită ale mișcării pot fi exprimate sub forma complexă

$$\operatorname{Im} [\mathscr{V} \cdot \mathrm{d}x]_{fuzelaj} = 0, \tag{17a}$$

$$\operatorname{Im} [\mathscr{V}]_{aripă} = 0, \tag{17b}$$

$$\operatorname{Re} [\mathscr{V}]_{-\infty A_2,\, A_1 \infty} = 0. \tag{17c}$$

Introducînd acum, ca în [1], potențialul complex $F(x)$ al unei mișcări incompresibile fictive definit prin relațiile

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \mathscr{V}, \quad F = \int \mathscr{V}\, \mathrm{d}x = \mathscr{U} + x\mathscr{V}, \tag{18}$$

condițiile la limită (17a, b, c) pot fi scrise sub forma

$$\operatorname{Im} [\mathrm{d}F]_{fuzelaj} = 0, \tag{19a}$$

$$\operatorname{Im} \left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \right]_{aripă} = 0, \tag{19b}$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \right]_{-\infty A_2,\, A_1 \infty} = 0. \tag{19c}$$

În scopul determinării potențialului complex fictiv $F(x)$, cu ajutorul căruia funcția complexă $\mathscr{U}(x)$ asociată vitezei axiale de perturbație se exprimă sub forma

$$\mathscr{U} = F - x \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}, \tag{20}$$

vom utiliza, ca în [1], o transformare conformă convenabilă, care depinde de forma secţiunii transversale a fuzelajului conic

$$\chi = \chi(x), \text{ unde } \chi = \mu + i\nu, \tag{21}$$

astfel încît conturul fuzelajului să fie reprezentat în planul χ printr-un cerc de rază $\varkappa$, iar urma aripii să rămînă pe axa reală (figura 1*c*), precum şi transformarea conformă

$$X = \chi + \frac{\varkappa^2}{\chi}, \text{ unde } X = Y + iZ \tag{22}$$

prin care conturul circular al fuzelajului se transformă în segmentul N_2N_1 al axei reale OY, urma aripii fiind menţinută în continuare pe axa reală din planul X (segmentele A_2N_2 şi N_1A_1 din figura 1*d*).

Viteza complexă corespunzătoare potenţialului incompresibil fictiv F va fi în acest plan

$$\frac{dF}{dX} = \frac{dF}{dx}\,\frac{dx}{d\chi}\,\frac{d\chi}{dX}, \tag{23}$$

astfel încît condiţiile la limită devin în planul X

$$\operatorname{Im}\left[\frac{dF}{dX}\right]_{A_2A_1} = 0, \tag{24a}$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{dF}{dX}\right]_{-\infty A_2,\, A_1\infty} = 0, \tag{24b}$$

prima dintre acestea reprezentînd condiţia la limită pe întregul sistem aripă-fuzelaj.

Aşa cum am arătat în [1] şi [3], funcţiile complexe $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ asociate vitezei axiale şi respectiv laterale de perturbaţie prezintă în punctele corespunzătoare bordurilor de atac subsonice ale aripii singularităţile

$$\frac{1}{\sqrt{l \pm x}}. \tag{25}$$

Notînd prin $\pm L$ coordonatele din planul X corespunzătoare bordurilor de atac ale aripii, care se deduc din $\pm l$ prin intermediul transformărilor conforme (21) şi (22), este uşor de văzut, ţinînd seama de (18) şi (23), că viteza complexă $\dfrac{dF}{dX}$ prezintă în punctele $X = \pm L$ singularităţile

$$\frac{1}{\sqrt{L \pm X}}. \tag{26}$$

Procedînd în modul indicat în [1], putem considera că mișcarea din planul X, definită prin condițiile la limită (24 a, b) și prin singularitățile (26) corespunde, prin intermediul unei transformări analoage cu (9), unei mișcări conice în jurul unei aripi triunghiulare subțiri fictive, reprezentate prin segmentul A_2A_1 de pe axa reală OY (figura 1d).

Notînd prin $\mathcal{U}_a$, $\mathcal{V}_a$ și $\mathcal{W}_a$ funcțiile complexe asociate vitezei axiale, laterale și respectiv verticale de perturbație din această mișcare conică fictivă, între care există relațiile de compatibilitate similare cu (12)

$$d\mathcal{U}_a = -X d\mathcal{V}_a = \frac{iX}{\sqrt{1-\mathcal{B}^2X^2}} d\mathcal{W}_a, \tag{27}$$

rezultă în mod evident

$$\mathcal{V}_a = \frac{dF}{dX} \tag{28}$$

și prin integrarea relațiilor de compatibilitate (27),

$$\mathcal{U}_a = F - X\frac{dF}{dX}. \tag{29}$$

Ținînd seama de aceste relații, precum și de (20), vom putea deduce, ca în [1], următoarea expresie pentru funcția complexă $\mathcal{U}$ a vitezei axiale de perturbație în jurul sistemului aripă-fuzelaj considerat

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_a + \left(X - x\frac{dX}{d\chi}\frac{d\chi}{dx}\right)\mathcal{V}_a. \tag{30}$$

Funcțiile $\mathcal{U}_a$ și $\mathcal{V}_a$ din mișcarea în jurul aripii fictive, definite prin condițiile la limită (24 a, b) și prin singularitățile (26), pot fi deduse cu ușurință aplicînd metoda analogiei hidrodinamice [3],

$$\mathcal{U}_a = \frac{A_{u_0} + A_{u_1}X}{\sqrt{L^2 - X^2}}, \tag{31a}$$

$$\mathcal{V}_a = \frac{A_{v_0} + A_{v_1}X}{\sqrt{L^2 - X^2}}, \tag{31b}$$

în care constantele A_{u_0}, A_{u_1}, A_{v_0} și A_{v_1} sînt legate prin următoarele relații deduse din relațiile de compatibilitate (12)

$$A_{u_0} = A_0 \cdot L^2, \quad A_{u_1} = A_{v_0} = 0, \text{ unde } A_{v_1} = -A_0. \tag{2}$$

Introducînd aceste relații în formula (30), se obține ca în [1] următoarea expresie generală a vitezei axiale de perturbație ($u = \mathrm{Re}\mathscr{U}$) pentru sistemul aripă delta-fuzelaj conic de secțiune oarecare

$$\mathscr{U} = A_0 \frac{L^2 - X^2 + x \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\chi} \dfrac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x} X}{\sqrt{L^2 - X^2}}, \tag{33}$$

în care constanta A_0 se determină din condiția ca aripa să aibă incidența α

$$\mathrm{Im} \int_{y'}^{\frac{1}{B}} \frac{\sqrt{1 - B^2 y^2}}{y} \mathrm{d}\mathscr{U} = \alpha U_\infty, \tag{34}$$

care a fost obținută prin integrarea relațiilor de compatibilitate (12) pe axa reală ($x = y$) între cercul Mach $\left(y = \dfrac{1}{B}\right)$ și un punct de pe aripă (de abscisă y').

În acest mod, pentru orice formă a conturului secțiunii transversale a fuzelajului conic poate fi stabilită o transformare conformă convenabilă $\chi(x)$, care, introdusă în (33), permite determinarea vitezei axiale de perturbație $u = \mathrm{Re}\mathscr{U}$ și prin intermediul acesteia a coeficientului de presiune $C_p = -2\dfrac{u}{U_\infty}$. La extragerea părții reale din expresia (33), vom ține seama că pe sistemul considerat $X = Y$.

Coeficientul de portanță al sistemului aripă delta-fuzelaj conic de secțiune oarecare considerat se determină din relația

$$C_z = \frac{4}{S} \int_0^l \frac{u}{U_\infty} \mathrm{d}y, \tag{35}$$

unde, pentru suprafața de referință S, se consideră de obicei

$$S = l. \tag{36}$$

Soluția pentru cazul fuzelajului conic izolat se obține cu ușurință particularizînd $l = a$, $L = 2\varkappa$ în expresia (33).

4. CAZUL FUZELAJULUI CONIC DE SECȚIUNE ELIPTICĂ PREVĂZUT CU O ARIPĂ DELTA

Ca aplicație, să considerăm cazul sistemului aripă delta-fuzelaj conic de secțiune eliptică, pentru care funcția $f(y,z)$ are expresia

$$f(y, z) = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{37}$$

În planul $x = \mathfrak{y} + i\mathfrak{z}$ obținut prin transformarea (9), conturul fuzelajului se transformă într-o curbă care, în cadrul ipotezelor admise, poate fi aproximată prin elipsa

$$f_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{y}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{b_1^2} - 1 = 0, \qquad b_1 = \frac{b}{\sqrt{1 - B^2 b^2}}. \tag{38}$$

În acest caz, pentru a reprezenta conturul fuzelajului printr-un cerc de rază $\varkappa$, transformarea conformă (21) este de forma

$$\chi = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4q^2}), \tag{39}$$

unde

$$q^2 = \frac{1}{4}(a^2 - b_1^2) = \frac{1}{4}(1 - k_1^2)\, a^2, \tag{40a}$$

$$\varkappa = \frac{1}{2}(a + b_1) = \frac{1}{2}(1 + k_1)\, a, \tag{40b}$$

în care am notat prin k_1 raportul semiaxelor elipsei din planul x

$$k_1 = \frac{b_1}{a} = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2 B^2 a^2}}, \qquad k = \frac{b}{a}. \tag{41}$$

Ținînd seama de această transformare și introducînd în relația (33) expresiile

$$x \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\chi} \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x} = x\left(\frac{\varkappa^2 + q^2}{2q^2} - \frac{\varkappa^2 - q^2}{2q^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4q^2}}\right), \tag{42a}$$

$$X = x\left(\frac{\varkappa^2 + q^2}{2q^2} - \frac{\varkappa^2 - q^2}{2q^2} \frac{\sqrt{x^2 - 4q^2}}{x}\right), \tag{42b}$$

$$L = \frac{\varkappa^2 + q^2}{2q^2} l - \frac{\varkappa^2 - q^2}{2q^2} \sqrt{l^2 - 4q^2}, \tag{42c}$$

funcția complexă $\mathscr{U}$ asociată vitezei axiale de perturbație poate fi exprimată în planul x sub forma

$$\frac{\mathscr{U}}{\alpha U_\infty l} = A \frac{\left(k_1 + \frac{1}{k_1}\right) l - 2\sqrt{l^2 - 4q^2} - \frac{4q^2}{l} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4q^2}}}{\sqrt{\left(k_1 + \frac{1}{k_1}\right)(l^2 - x^2) - 2l\sqrt{l^2 - 4q^2} + 2x\sqrt{x^2 - 4q^2}}}, \tag{43}$$

unde am notat

$$A = \frac{A_0}{\alpha U_\infty}. \tag{44}$$

Pentru determinarea constantei A trebuie calculată integrala definită din condiția (34). Această integrală definită poate fi calculată numeric cu precizia dorită, utilizînd o metodă adecvată pentru calculul integralelor improprii.

Calculînd integrala definită din condiția (34) printr-o metodă analitică aproximativă bazată pe unele dezvoltări în serie (considerînd $B^2b^2 \ll 1$), se obține pentru constanta A expresia

$$A = \frac{1-k_1}{\sqrt{k_1}} \frac{4}{\Lambda_1 E(\sqrt{1-B^2l^2}) + \Lambda_2 K(\sqrt{1-B^2l^2})}, \tag{45}$$

unde $K(\sqrt{1-B^2l^2})$ și $E(\sqrt{1-B^2l^2})$ reprezintă integralele eliptice complete de speța întîi, respectiv a doua, de modul $\sqrt{1-B^2l^2}$ și unde constantele Λ_1 și Λ_2 au expresiile

$$\Lambda_1 = 4C_0 + \frac{4}{3}(1+B^2l^2)\,C_1 + \frac{1}{30}(8+7\,B^2l^2+8B^4l^4)\,C_2, \tag{46a}$$

$$\Lambda_2 = -\frac{2}{3}B^2l^2\left[C_1 + \frac{1}{5}(1+B^2l^2)\,C_2\right], \tag{46b}$$

în care

$$C_0 = \frac{1}{k_1}\left[\left(\sqrt{1-\frac{4q^2}{l^2}} - k_1\right)^2 + (1-k_1)\frac{4q^2}{l^2}\right], \tag{47a}$$

$$C_1 = \frac{\varkappa^4 - q^4}{l^4} C_0 - \left(\frac{4q^2}{l^2}\right)^2, \tag{47b}$$

$$C_2 = \frac{\varkappa^4 - q^4}{l^4}\left[3C_1 + \left(\frac{4q^2}{l^2}\right)^2\right] - 3\left(\frac{4q^2}{l^2}\right)^3. \tag{47c}$$

Viteza axială pe perturbație $u = \mathrm{Re}\,\mathcal{U}$ din mișcarea care ia în considerație efectul incidenței sistemului aripă-fuzelaj se determină prin extragerea părții reale din expresia (43).

Vom obține astfel pe aripă ($z = \zeta = 0$, $x = \xi = y$) expresia

$$\frac{u}{\alpha U_\infty l} = \frac{A}{\sqrt{k_1}l}\,\frac{\sqrt{y^2-4q^2}\,(k_1 l - \sqrt{l^2-4q^2})^2 - 4q^2(k_1 y - \sqrt{y^2-4q^2})}{\sqrt{y^2-4q^2}\,\sqrt{(k_1 l - \sqrt{l^2-4q^2})^2 - (k_1 y - \sqrt{y^2-4q^2})^2}} \tag{48}$$

Pentru extragerea părții reale a funcției complexe $\mathscr{U}$ pe fuzelaj poate fi utilizată transformarea auxiliară

$$x = \begin{cases} 2q \operatorname{ch} \mathscr{X} & \text{pentru } k_1 < 1 \quad (4q^2 > 0), \\ a e^{\mathscr{X}} & \text{pentru } k_1 = 1 \quad (4q^2 = 0), \\ \mathrm{i} \cdot 2q \operatorname{sh} \mathscr{X} & \text{pentru } k_1 > 1 \quad (4q^2 < 0), \end{cases} \tag{49}$$

unde

$$\mathscr{X} = \mathscr{Y} + \mathrm{i}\mathscr{Z}, \tag{50}$$

ceea ce corespunde schimbărilor de variabilă

$$y = \begin{cases} 2q \operatorname{ch} \mathscr{Y} \cos \mathscr{Z} & \text{pentru } k_1 < 1, \\ a e^{\mathscr{Y}} \cos \mathscr{Z} & \text{pentru } k_1 = 1, \\ \mathrm{i} \cdot 2q \operatorname{sh} \mathscr{Y} \cos \mathscr{Z} & \text{pentru } k_1 > 1, \end{cases} \tag{51a}$$

$$z = \begin{cases} 2q \operatorname{sh} \mathscr{Y} \sin \mathscr{Z} & \text{pentru } k_1 < 1, \\ a e^{\mathscr{Y}} \sin \mathscr{Z} & \text{pentru } k_1 = 1, \\ \mathrm{i} \cdot 2q \operatorname{ch} \mathscr{Y} \sin \mathscr{Z} & \text{pentru } k_1 > 1. \end{cases} \tag{51b}$$

Pe fuzelaj aceste expresii se simplifică, devenind pentru orice valoare a raportului k_1

$$y = a \cos \mathscr{Z}, \tag{52a}$$

$$z = k_1 a \sin \mathscr{Z}. \tag{52b}$$

Procedînd în acest mod se obține pentru viteza axială de perturbație u pe fuzelaj expresia

$$\frac{u}{\alpha U_\infty l} = \frac{A}{\sqrt{k_1}\, l} \frac{\left(1 - \dfrac{4q^2}{a^2}\dfrac{y^2}{a^2}\right)(k_1 l - \sqrt{l^2 - 4q^2})^2 + \left(\dfrac{4q^2}{a}\right)^2 \left(1 - \dfrac{y^2}{a^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{4q^2}{a^2}\dfrac{y^2}{a^2}\right)\sqrt{(k_1 l - \sqrt{l^2 - 4q^2})^2 + \left(\dfrac{4q^2}{a}\right)^2 \left(1 - \dfrac{y^2}{a^2}\right)}}, \tag{53}$$

care pe coama fuzelajului ($y = y = 0$, $z = k_1 a$) devine

$$\frac{1}{\alpha U_\infty l} u \Big|_{y=0} = \frac{A}{\sqrt{k_1}} \left(1 - k_1 \sqrt{1 - \frac{4q^2}{l^2}}\right), \tag{54}$$

iar la joncţiunea fuzelajului cu aripa ($\eta = y = a$, $\zeta = 0$) are valoarea

$$\frac{1}{\alpha U_\infty l} u\Big|_{y=a} = \frac{A}{\sqrt{k_1}}\left(\sqrt{1 - \frac{4q^2}{l^2}} - k_1\right). \tag{55}$$

Pentru cazul particular în care fuzelajul este reprezentat în planul x printr-un cerc de rază a ($k_1 = 1$), expresiile (48) şi (53) se simplifică considerabil, devenind

$$\frac{u}{\alpha U_\infty l} = \frac{A}{l^2} \frac{y(l^2 + a^2)^2 - 2a^2 l^2\left(y + \frac{a^2}{y}\right)}{y\sqrt{(l^2 + a^2)^2 - l^2\left(y + \frac{a^2}{y}\right)^2}} \tag{56a}$$

pe aripă, şi

$$\frac{u}{\alpha U_\infty l} = \frac{A}{l^2}\sqrt{(l^2 + a^2)^2 - 4l^2\eta^2} \tag{56b}$$

pe fuzelaj, funcţia complexă $\mathcal{U}$ având în acest caz expresia

$$\frac{\mathcal{U}}{\alpha U_\infty l} = \frac{A}{l^2} \frac{l^4 + a^4\left(1 - 2\frac{l^2}{x^2}\right)}{\sqrt{(l^2 - x^2)\left(l^2 - \frac{a^4}{l^2}\right)}}. \tag{57}$$

Pentru exemplificare, în figurile 2 şi 3 este reprezentată variaţia în lungul anvergurii a vitezei axiale de perturbaţie datorată efectului incidenţei pentru sistemul aripă-fuzelaj conic eliptic caracterizat prin $Bl = 0{,}8$ şi respectiv $Bl = 0{,}6$, considerînd următoarele valori pentru raportul $k = \frac{b}{a}$ al semiaxelor secţiunii eliptice a fuzelajului:

$$\left.\begin{array}{ll} ① & k = 10^{-8} \\ ② & k = 0{,}25 \\ ③ & k = 0{,}5 \\ ④ & k = 0{,}75 \\ ⑤ & k = 1 \end{array}\right\} \frac{a}{l} = 0{,}5, \qquad \left.\begin{array}{ll} ⑥ & k = \frac{4}{3} \\ ⑦ & k = 2 \\ ⑧ & k = 4 \\ ⑨ & k = 10^8 \end{array}\right\} \frac{b}{l} = 0{,}5.$$

Cazurile ① şi ⑨ reprezintă de fapt aripa delta izolată şi respectiv aripa delta prevăzută cu placă (care datorită simetriei nu influenţează distribuţia de viteze pe aripă).

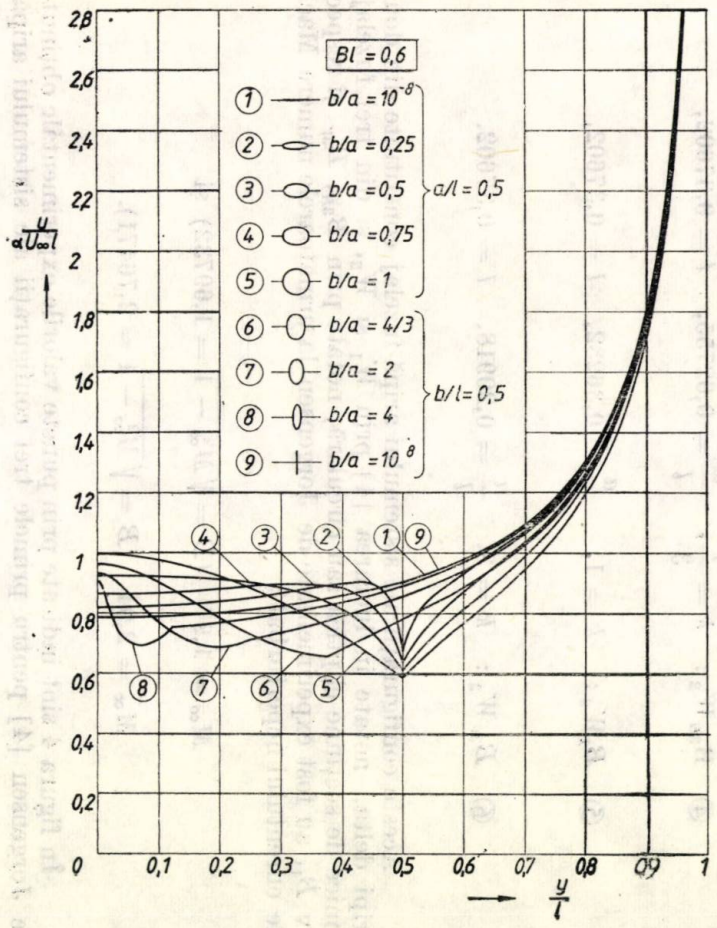

Bl = 0,6
① b/a = 10^-8
② b/a = 0,25
③ b/a = 0,5
④ b/a = 0,75
⑤ b/a = 1
a/l = 0,5
⑥ b/a = 4/3
⑦ b/a = 2
⑧ b/a = 4
⑨ b/a = 10^8
b/l = 0,5
u / αU∞l
y / l
2,8
2,6
2,4
2,2
2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1

Fig. 2

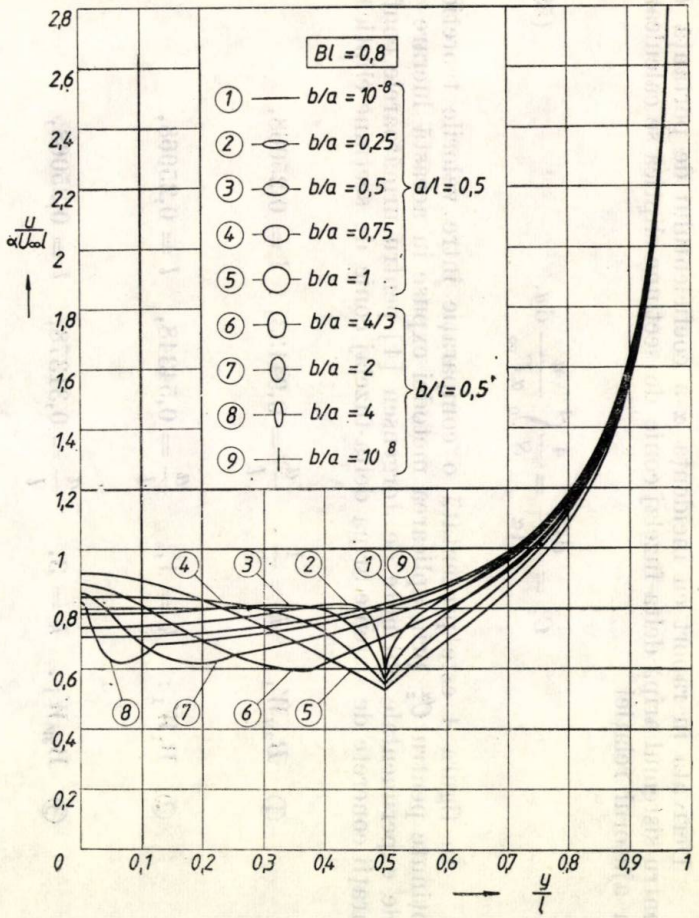

Bl = 0,8
① b/a = 10^-8
② b/a = 0,25
③ b/a = 0,5
④ b/a = 0,75
⑤ b/a = 1
a/l = 0,5
⑥ b/a = 4/3
⑦ b/a = 2
⑧ b/a = 4
⑨ b/a = 10^8
b/l = 0,5
u / αU∞l
y / l
2,8
2,6
2,4
2,2
2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1

Fig. 3

Derivata în raport cu incidenţa α a coeficientului de portanţă C_z pentru sistemul aripă delta-fuzelaj conic de secţiune eliptică se calculează cu ajutorul relaţiei

$$C_z^\alpha = \frac{\mathrm{d}C_z}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{4}{S}\int_0^l \frac{u}{\alpha U_\infty}\,\mathrm{d}y. \tag{58}$$

În figura 4 este prezentată o comparaţie între valorile teoretice obţinute pentru C_z^α prin aplicarea metodei expuse în această lucrare şi cele experimentale obţinute de Jorgensen [4] pentru următoarele configuraţii concrete de sisteme aripă delta-fuzelaj conic de secţiune eliptică:

① $B_{3H}W_1$: $k = \frac{1}{3}$, $\frac{a}{l} = 0{,}94133$, $l = 0{,}25068$,

② B_1W_1: $k = 1$, $\frac{a}{l} = 0{,}54348$, $l = 0{,}25068$,

③ $B_{3V}W_1$: $k = 3$, $\frac{a}{l} = 0{,}31378$, $l = 0{,}25068$,

④ $B_{3H}W_2$: $k = \frac{1}{3}$, $\frac{a}{l} = 0{,}62755$, $l = 0{,}37602$,

⑤ B_1W_2: $k = 1$, $\frac{a}{l} = 0{,}36232$, $l = 0{,}37602$,

⑥ $B_{3V}W_2$: $k = 3$, $\frac{a}{l} = 0{,}20918$, $l = 0{,}37602$.

Aceste configuraţii ale sistemului aripă-fuzelaj constituite din două aripi delta, notate în lucrarea [4] prin W_1 şi W_2, şi din trei fuzelaje conice de secţiune eliptică sau circulară, notate prin B_{3H}, B_{3V} şi respectiv B_1, au fost experimentate de Jorgensen la următoarele numere Mach ale curentului neperturbat:

$$M_\infty = 1{,}97 \quad (B = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1{,}69732) \text{ şi}$$

$$M_\infty = 2{,}94 \quad (B = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2{,}76471).$$

În figura 4 sînt indicate prin puncte valorile experimentale obţinute de Jorgensen [4] pentru primele trei configuraţii ale sistemului aripă-

fuzelaj la ambele numere Mach (pentru care $Bl = 0{,}42549$ și respectiv $Bl = 0{,}69306$), precum și cele pentru ultimele trei configurații ale sistemului la $M_\infty = 1{,}97$ (pentru care $Bl = 0{,}63823$), întrucît la $M_\infty = 2{,}94$ bordurile de atac ale aripii W_2 devin supersonice ($Bl = 1{,}03959$).

Vom menționa că pentru a ușura compararea rezultatelor obținute, în figura 4 coeficientul de portanță a fost raportat, ca în lucrarea [4] a lui Jorgensen, la suprafața frontală a fuzelajului conic eliptic, adică

$$S = \pi\, ab, \tag{59}$$

iar incidența α a fost considerată exprimată în grade.

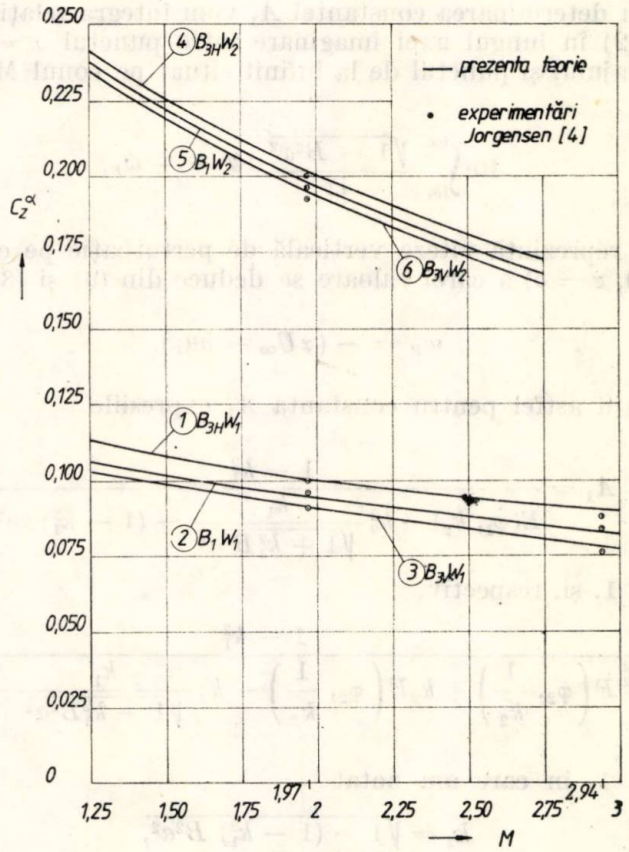


Fig. 4

După cum se observă din figura 4, rezultatele teoretice deduse prin metoda prezentată în lucrare (cu formulele (48) și (53) în care valoarea constantei A a fost determinată printr-o metodă adecvată de integrare numerică) sînt în bună concordanță cu cele experimentale obținute de Jorgensen [4].

5. CAZUL FUZELAJULUI CONIC IZOLAT DE SECŢIUNE ELIPTICĂ

Soluţia problemei pentru cazul particular al fuzelajului izolat poate fi determinată din relaţia (33) înlocuind l prin a şi L prin $2\varkappa$, obţinîndu-se astfel expresia

$$\frac{\mathscr{U}}{\alpha U_\infty a} = A_1 \frac{ia}{\sqrt{x^2 - 4q^2}}, \tag{60}$$

unde am notat

$$A_1 = (1 + k_1)\frac{A_0}{\alpha U_\infty}, \qquad 4q^2 = (1 - k_1^2)\, a^2. \tag{61}$$

Pentru determinarea constantei A_1 vom integra relaţiile de compatibilitate (12) în lungul axei imaginare între punctul $x = ib_1$ situat pe coama fuzelajului şi punctul de la infinit situat pe conul Mach, obţinînd condiţia

$$\mathrm{Re}\int_{ib_1}^{i\infty} \frac{\sqrt{1 - B^2x^2}}{ix}\, \mathrm{d}\mathscr{U} = - w_P, \tag{62}$$

în care w_P reprezintă viteza verticală de perturbaţie pe coama fuzelajului ($y = 0$, $z = b$) a cărei valoare se deduce din (6) şi (37), fiind

$$w_P = - (\alpha U_\infty - bu_P). \tag{63}$$

Se obţin astfel pentru constanta A_1 expresiile

$$A_1 = \frac{1 - k_1^2}{E(\varphi_1, k_2) - k_2^2 \dfrac{k_1}{\sqrt{1 + k_1^2 B^2 a^2}} - (1 - k_1^2)\, ka^2} \tag{64}$$

pentru $k_1 < 1$, şi, respectiv,

$$A_1 = \frac{1 - k_1^2}{\dfrac{1 - k_2^2}{k_2} F\left(\varphi_2, \dfrac{1}{k_2}\right) + k_2 E\left(\varphi_2, \dfrac{1}{k_2}\right) - k_2^2 \dfrac{k_1}{\sqrt{1 + k_1^2 B^2 a^2}} - (1 - k_1^2)\, ka^2} \tag{65}$$

pentru $k_1 > 1$, în care am notat

$$k_2 = \sqrt{1 - (1 - k_1^2)\, B^2 a^2}, \tag{66a}$$

$$\varphi_1 = \mathrm{arc\ tg} \frac{1}{k_1 Ba}, \tag{66b}$$

$$\varphi_2 = \mathrm{arc\ sin} \frac{k_2}{\sqrt{1 + k_1^2\, B^2 a^2}}, \tag{66c}$$

$F(\varphi,k)$ și $E(\varphi,k)$ reprezentînd, ca de obicei, integralele eliptice de speța I, respectiv a II-a, de argument φ și modul k.

Viteza axială de perturbație pe fuzelajul eliptic izolat este dată de expresia

$$\frac{u}{\alpha U_\infty a} = A_1 \frac{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}{1-(1-k_1^2)\frac{y^2}{a^2}},$$

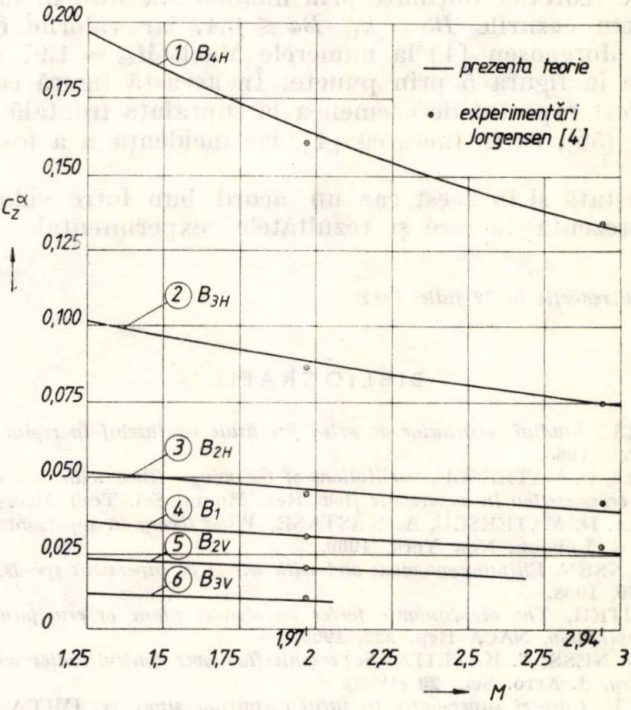


Fig. 5

iar derivata C_z^α a coeficientului de portanță în raport cu incidența α se calculează și în acest caz cu relația (58).

În figura 5 este prezentată o comparație între rezultatele teoretice deduse pentru C_z^α prin relațiile stabilite mai sus și cele obținute de Jorgensen [4] pentru următoarele fuzelaje conice eliptice:

$$\textcircled{1}\quad B_{4H}: \qquad k = \frac{1}{6}, \qquad a = 0{,}33372,$$

$$\textcircled{2}\quad B_{3H}: \qquad k = \frac{1}{3}, \qquad a = 0{,}23597,$$

③ B_{2H}: $k = \frac{2}{3}$, $a = 0{,}16686$,

④ B_1: $k = 1$, $a = 0{,}13624$,

⑤ B_{2V}: $k = 1{,}5$, $a = 0{,}11124$,

⑥ B_{3V}: $k = 3$, $a = 0{,}07866$.

Curbele teoretice obținute prin metoda stabilită în lucrare au fost trasate pentru cazurile $Bb = k_1$, $Ba \lesssim 0{,}4$, iar valorile experimentale obținute de Jorgensen [4] la numerele Mach $M_\infty = 1{,}97$ și $M_\infty = 2{,}94$ sînt indicate în figura 5 prin puncte. În această figură coeficientul de portanță a fost raportat de asemenea la suprafața frontală a fuzelajului conic eliptic (59), ca în lucrarea [4], iar incidența α a fost considerată în grade.

Se constată și în acest caz un acord bun între valorile teoretice deduse în prezenta lucrare și rezultatele experimentale obținute de Jorgensen.

Primită la redacție la 22 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. D. MATEESCU, *Studiul sistemelor de aripi prevăzute cu fuzelaj în regim supersonic*, Teză de doctorat, 1968.
2. E. CARAFOLI, D. MATEESCU, *Oscillations of the wings fitted with conical bodies of arbitrary cross-section in supersonic flow*, Rev. Roum. Sci. Tech.-Méc. Appl., *4* (1970).
3. E. CARAFOLI, D. MATEESCU, A. NĂSTASE, *Wing theory in supersonic flow*, Pergamon Press, London, New York, 1969.
4. L. H. JORGENSEN, *Elliptic cone alone and with wings at supersonic speeds*, NACA Report 1376, 1958.
5. J. R. SPREITER, *The aerodynamic forces on slender plane or cruciform wing and body combination*, NACA Rep. *962*, 1950.
6. A. FERRI, N. NESS, T. KAPLITA, *Supersonic flow over conical bodies without axial symmetry*, J. Aero. Sci., **20** (1953).
7. D. MATEESCU, *Curgeri supersonice în jurul corpurilor simetrice*, IMFCA Raport N-1468, 1975.
8. H. M. LEE, L. M. RASMUSSEN, *Hypersonic flow past an elliptic cone*, AIAA Paper 79-0364, Ian. 1979.
9. M. JISCHKE, *Supersonic flow past conical bodies with nearly circular cross-sections*, AIAA Journal, Feb. 1981.

ASUPRA ADAPTĂRII OPTIME A ELICEI LA AVION

de S. GĂLETUȘE
Institutul politehnic București

Lucrarea prezintă relații îmbunătățite de calcul ale vitezelor induse în dreptul elicei și condiția de maxim a randamentului. Sînt determinate apoi tracțiunea adimensională, momentul adimensional și randamentul în funcție de pasul geometric la extremitatea discului elicei și randamentului indus. Aceste rezultate prezentate și sub formă grafică sînt simplu de utilizat la proiectarea unei elici adaptate optim la avion.

NOTAȚII

φ — unghi de așezare față de planul de rotație;
α_{ef} — incidența efectivă față de axa de portanță nulă (APN);
α_i — unghi indus;
W — viteza axială a aerului față de elice;
Ω — viteza unghiulară de rotație;
V_0 — viteza totală;
V — viteza totală reală;
w, ω — viteze induse de pînza de vîrtejuri;
w_f, ω_f — viteze induse de dîra de vîrtejuri;
$\bar{w}, \bar{w}_f = w/W,\ w_f/W$;
$\bar{\omega}, \bar{\omega}_f = \omega/\Omega,\ \omega_f/\Omega$;
R — raza discului elicei;
$\lambda_0 = W/r\Omega = \operatorname{tg}\ \beta_0$ — pasul geometric local;
$\lambda = (W + w)/r(\Omega - \omega) = \operatorname{tg}\beta$ — pasul aerodinamic local;
$\Lambda_0 = W/R\Omega = \operatorname{tg}\ B_0$ — pasul geometric la extremitate;
$\Lambda = (W + w)/R(\Omega - \omega) = \operatorname{tg} B$ — pasul aerodinamic la extremitate;
C_z — coeficient de portanță;
C_x — coeficient de rezistență;
C_m — coeficient de moment;
C_t — coeficient de tracțiune;
c — coarda profilului;
$\bar{c} = c/R$;
$\bar{r} = r/R$;
n — numărul de pale;
$\sigma = nc/2\pi r$;
T — tracțiunea elicei;
M — momentul rezistent;
$\bar{T} = 2T/\rho(R\Omega)^2\,\pi R^2$;
$\bar{M} = 2M/\rho(R\Omega)^2\,\pi R^2 \cdot R$.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 40, NR. 6, 1981, P. 837–846

1. INTRODUCERE

Propulsarea avioanelor prin elice cunoaște în ultima vreme o nouă dezvoltare legată de economia de combustibil. Într-adevăr, consumul specific minim îl prezintă propulsia cu elice. În cadrul acestei propulsii au fost necesare noi analize a funcționării elicei pentru obținerea unor randamente cît mai mari. În același timp, s-a studiat și problema inversă aceea a utilizării elicei la valorificarea energiei eoliene [1]. Pentru avioane ușoare, utilitare, de școală etc. se întrebuințează de regulă elice cu pas fix și de aceea în aceste cazuri se inpune o analiză mai atentă a condițiilor de proiectare și de adaptare a elicei de avion.

2. VITEZELE INDUSE

Cunoașterea cît mai exactă a vitezelor induse în fața profilului palei este foarte importantă, deoarece de aceste viteze depinde incidența efectivă (fig. 1) și de aceasta caracteristicile aerodinamice ale profilului.

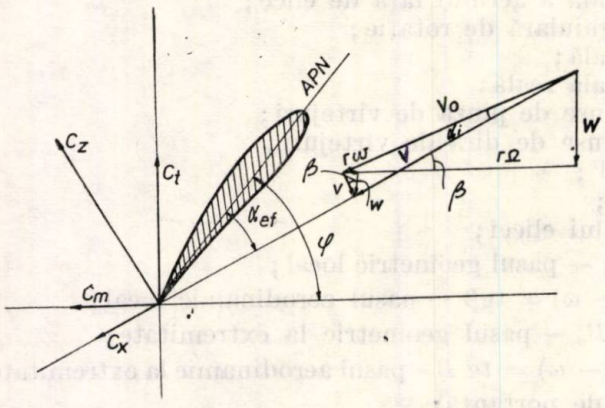


Fig. 1. — Notații.

Dacă se consideră sistemul de viteze induse, $\vec{v}$ de componente w, $r\omega$ în fața profilului, $\vec{v} + \vec{v}_f$ de componente $w - w_f$, $r(\omega + \omega_f)$ în dreptul profilului și $2(\vec{v} + \vec{v}_f)$ la infinit aval, se poate arăta din raportul între momentul elementar și tracțiunea elementară [1], [2] că între mărimea vitezelor induse $\vec{v}$ și $\vec{v}_f$ există legătura simplă

$$\frac{v_f}{v} = \frac{C_x}{C_z} = \mu. \tag{1}$$

Totodată trebuie reținut că viteza $\vec{v}$ este perpendiculară pe viteza totală reală $\vec{V}$, iar $\vec{v}_f$ (datorată frecării) este în lungul lui $\vec{V}$ și de sens opus.

Din egalarea tracţiunilor elementare scrise prin teorema impulsului şi prin contribuţia elementului de pală se obţine relaţia

$$\frac{\bar{w}}{1+\bar{w}} = \frac{\sigma C_t}{4 \sin^2 \beta(1 - \mu \operatorname{tg} \beta)}, \tag{2}$$

iar din egalarea momentului elementar dat de teorema momentului cinetic şi de contribuţia elementului de pală rezultă

$$\frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} = \frac{\sigma C_m}{4 \sin \beta \cos \beta \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg} \beta}\right)}, \tag{3}$$

unde C_t şi C_m sînt

$$C_t = C_z \cos \beta - C_x \sin \beta,$$
$$C_m = C_z \sin \beta + C_x \cos \beta. \tag{4}$$

Înlocuind expresiile (4) în (2) respectiv (3) şi ţinînd seama de factorul de corecţie $\varkappa$ al lui Prandtl [3], [4],

$$\varkappa = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \cos e^{-\frac{n}{2} \frac{(1-\bar{r})}{\bar{r} \sin \beta}}, \tag{5}$$

se obţine

$$\frac{\bar{w}}{1+\bar{w}} = \frac{\sigma C_z \cos \beta}{4 \varkappa \sin^2 \beta},$$
$$\frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} = \frac{\sigma C_z}{4 \varkappa \cos \beta}. \tag{6}$$

Aceste rezultate (6) sînt identice cu relaţiile lui Glauert [4] pentru elice ideală (fără frecare) şi deci se poate spune că vitezele induse $\bar{w}$, $\bar{\omega}$ din faţa profilului pentru elicea reală nu sînt influenţate de frecarea din stratul limită.

3. ELICEA DE RANDAMENT OPTIM

Pentru elicea ideală, se ştie [3] că randamentul indus η_i,

$$\eta_i = \frac{T W}{M \Omega}, \tag{7}$$

este maxim cu constrîngerea TW = constant, pentru

$$1 + \frac{r^2\,\omega^2}{w^2} = \frac{k}{\overline{w}} = 1 + \lambda^2, \tag{8}$$

unde K este o constantă.

În cazul elicei reale randamentul se scrie;

$$\eta = \frac{W\int_0^R \mathrm{d}T}{\Omega\int_0^R \mathrm{d}M} = \frac{W\left[\int_0^R \mathrm{d}P\cos\beta - \int_0^R \mathrm{d}R\sin\beta\right]}{\Omega\left[\int_0^R r\mathrm{d}P\sin\beta + \int_0^R r\,\mathrm{d}R\cos\beta\right]}, \tag{9}$$

unde $\mathrm{d}P$ și $\mathrm{d}R$ sînt portanța, respectiv rezistența la înaintare elementare. Înlocuind în (9) portanța $\mathrm{d}P$ dedusă în funcție de viteza indusă w (utilizînd relația (6) pentru $n \to \infty$) și rezistența $\mathrm{d}R$ funcție de $\mathrm{d}P$ (utilizînd relația (1)),

$$\mathrm{d}P = \frac{4\pi\rho\,(W + w)w\,r\,\mathrm{d}r}{\cos\beta}, \tag{10}$$

$$\mathrm{d}R = \mu\,\mathrm{d}P,$$

se obține

$$\eta = \frac{W\left[\int_0^R (W + w)\,w\,r\,\mathrm{d}r - \int_0^R \mu\,(W + w)\,r\omega\,r\,\mathrm{d}r\right]}{\Omega\left[\int_0^R (W + w)\,r\omega\,r^2\,\mathrm{d}r + \int_0^R \mu\,(W + w)\,w\,r^2\,\mathrm{d}r\right]}. \tag{11}$$

Condiția ca η să fie maxim cu constrîngerea puterea utilă constantă, se scrie ca minim al expresiei I,

$$I = \Omega\left[\int_0^R (W + w)\,r\,\omega\,r^2\mathrm{d}r + \int_0^R \mu(W + w)w\,r^2\mathrm{d}r\right] -$$

$$- K_1 W\left[\int_0^R (W + w)\;w\;r\;\mathrm{d}r - \int_0^R \mu(W + w)\;r\,\omega\,r\,\mathrm{d}r\right] \tag{12}$$

sau încă

$$I = \int_0^R (W + w)(r^2\,\Omega\omega - K_1\,W\,w)\;r\mathrm{d}r +$$

$$+\int_0^R \mu(W + w)\;[r\,\Omega w + K_1\,W\,r\omega]\,r\,\mathrm{d}r. \tag{13}$$

Deoarece expresia care multiplică μ în integrala a doua din I (13) este strict pozitivă, μ trebuie să fie minim pentru minimul lui I. În plus, se poate considera că $\mu_m = (C_x/C_z)_{\text{minim}}$ este aproximativ constant cu raza r. În aceste condiții, extremul integralei I se obține pentru

$$\frac{w}{r\omega} = \frac{\bar{r}}{K_1\Lambda_0} \frac{1 + \mu_m \dfrac{K_1\Lambda_0}{\bar{r}}}{1 - \mu_m \dfrac{\bar{r}}{K_1\Lambda_0}}, \tag{14}$$

unde K_1 este multiplicatorul Lagrange.

Trebuie remarcat că expresia (14) se poate simplifica ținînd seama de valorile funcției $f(\bar{r})$,

$$f(\bar{r}) = \frac{1 + \mu_m \dfrac{K_1\Lambda_0}{\bar{r}}}{1 - \mu_m \dfrac{\bar{r}}{K_1\Lambda_0}}, \tag{15}$$

care nu depășesc (5 — 6)% față de unitate (tabelul 1), pentru valori uzuale ale lui μ_m, K_1, Λ_0 (de exemplu pentru valorile din tabelul 1,

Tabelul 1

Valori uzuale ale funcției $f(\bar{r})$

$\bar{r}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(\bar{r})$	1,020	1,025	1,034	1,044	1,055

$\mu_m = 0{,}01$, $K_1 = 1$, $\Lambda_0 = 0{,}2$). În acest caz se poate considera o valoare medie pentru $f(\bar{r})$ spre exemplu $f(0{,}5)$ așa încît relația (14) se poate scrie :

$$\frac{w}{r\omega} = \frac{\bar{r}\,\eta_i^*}{\Lambda_0}, \tag{16}$$

unde

$$\eta_i^* = \frac{1}{K_1} f(0{,}5). \tag{17}$$

Relația (16) este echivalentă cu condiția (8) de la elicea ideală și se va numi în continuare η_i^* randament indus.

Utilizînd relația (16) și relația geometrică (fig. 1),

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1 + \bar{w}}{1 - \bar{\omega}} \frac{W}{r\Omega} = \frac{1 + \bar{w}}{1 - \bar{\omega}} \frac{\Lambda_0}{\bar{r}}, \tag{18}$$

se pot deduce vitezele induse adimensionale $\bar{w}$, $\bar{\omega}$ funcție de randamentul indus,

$$\bar{w} = \frac{(1 - \eta_i^*)\,\bar{r}^2\,\eta_i^*}{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}\,\bar{r}^2}, \qquad \bar{\omega} = \frac{(1 - \eta_i^*)\,\Lambda_0^2}{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}\,\bar{r}^2}. \tag{19}$$

După înlocuirea expresiile (19) în (11) și după efectuarea integralelor se determină randamentul η sub forma

$$\eta = \eta_i^* \frac{\mathscr{A} - \mu_m \mathscr{B}}{\mathscr{A} + \mu_m \mathscr{C}}, \tag{20}$$

unde $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ sînt :

$$\mathscr{A} = \frac{\Lambda_0^2\,(2 - \eta_i^*) + \eta_i^{*2}}{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}} - \frac{(2 - \eta_i^*)\,\Lambda_0^2}{\eta_i^{*2}} \ln \frac{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}}{\Lambda_0^2},$$

$$\mathscr{B} = \Lambda_0 \frac{\Lambda_0^2\,(3 - \eta_i^*) + 2\eta_i^{*2}}{\eta_i^*(\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2})} - \frac{\Lambda_0^2(3 - \eta_i^*)}{\eta_i^{*2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta_i^*}{\Lambda_0}, \tag{21}$$

$$\mathscr{C} = \frac{\Lambda_0^4\,(9\eta_i^* - 15) + 2\Lambda_0^2\,\eta_i^{*2}(3\eta_i^* - 5) + 2\eta_i^{*4}}{3\eta_i^*\,\Lambda_0(\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2})} +$$

$$+ \frac{\Lambda_0^2}{\eta_i^{*2}}\,(5 - 3\eta_i^*) \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta_i^*}{\Lambda_0},$$

iar tracțiunea adimensională și momentul rezistent adimensional sînt,

$$\bar{T} = \frac{4\Lambda_0^2(1 - \eta_i^*)}{\eta_i^{*2}}\,(\mathscr{A} - \mu_m \mathscr{B}),$$

$$\bar{M} = \frac{4\Lambda_0^3(1 - \eta_i^*)}{\eta_i^{*3}}\,(\mathscr{A} + \mu_m \mathscr{C}). \tag{22}$$

S-au efectuat calcule pentru $\mu_m = 0{,}01$ și s-au reprezentat în figura 2 tracțiunea $\bar{T}$ și randamentul η în funcție de η_i^* pentru diferite valori Λ_0. O astfel de diagramă se utilizează foarte simplu pentru determinarea randamentului indus η_i^* necesar pentru elicea optimă adoptată la un anume regim de zbor. Să presupunem că din studiul avionului a rezultat o tracțiune necesară T_1 pentru o viteză de zbor W. Cunoscînd raza R și turația la axul elicei se determină Λ_0 și $\bar{T}_1$. Tracțiunea T_1 se corectează ținînd seama de existența butucului (pînă la raza r_b),

$$\bar{T}_2 = \frac{\bar{T}_1}{1 - \bar{r}_b^2} \tag{23}$$

și ținînd seama de numărul finit de pale [3], [4],

$$\bar{T} = \frac{\bar{T}_2}{1 - \dfrac{1{,}39 \sin B_0}{n}}. \tag{24}$$

Cu această valoare $\bar{T}$ se merge în diagrama din figura 2 pe orizontală pînă se intersectează curba $\bar{T}(\eta_i^*)$ corespunzătoare valorii Λ_0 după care coborînd pe verticală se determină η_i^*, iar din intersecția cu funcția $\eta(\eta_i^*)$ se determină și randamentul global pe care îl va avea elicea. În

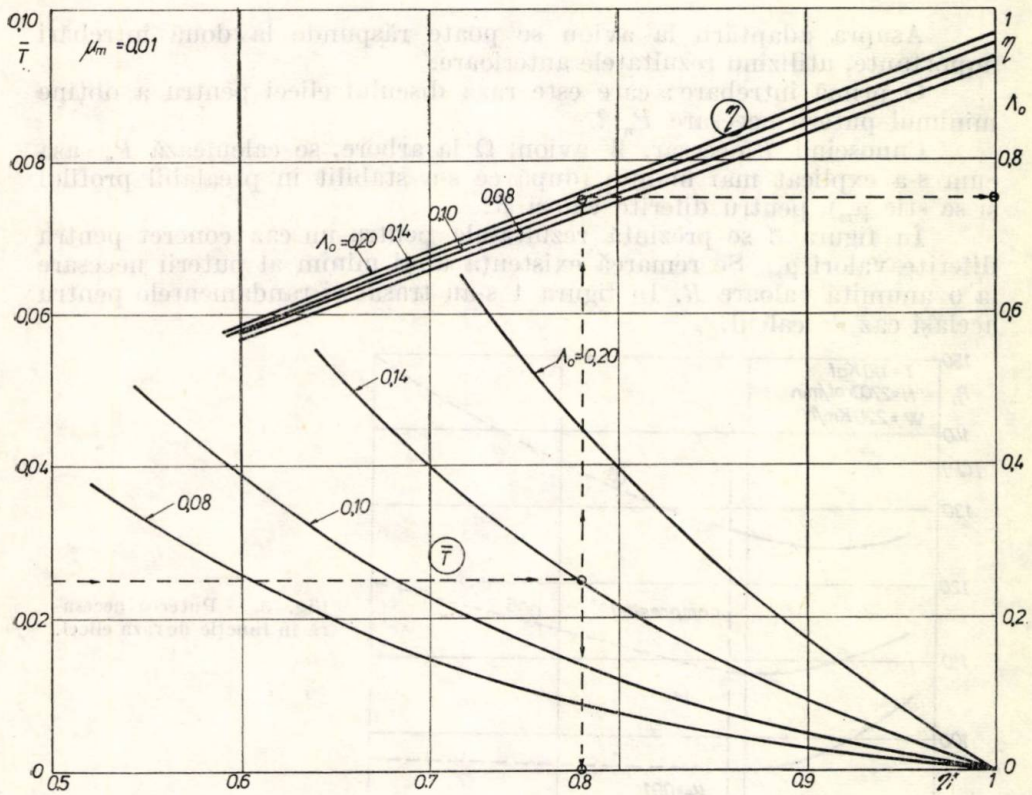


Fig. 2. — Tracțiunea și randamentul în funcție de randamentul indus.

continuare, utilizînd relația a doua (22) se poate calcula momentul adimensional $\bar{M}$ și cu acesta puterea necesară P_n a motorului. Cunoscînd η_i^* și Λ_0 se determină imediat răsucirea palei față de planul de rotație φ,

$$\varphi = \beta + \alpha_{\mu_m} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\Lambda_0}{\bar{r}\ \eta_i^*}\right) + \alpha_{\mu_m}, \tag{25}$$

unde s-a ținut seama de relația (16) și α_{μ_m} este incidența efectivă corespunzătoare lui $(C_x/C_z)_{minim}$. Din relațiile (6) și (19) referitoare la $\bar{w}$ se deduce variația corzii palei,

$$\bar{c} = \frac{8\pi \varkappa (1 - \eta_i^*) \Lambda_0^2 \bar{r}^2}{n C_z (\Lambda_0^2 + \eta_i^* \bar{r}^2) \sqrt{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2} \bar{r}^2}}, \tag{26}$$

unde C_z se va lua tot pentru $(C_x/C_z)_{minim}$.

4. ADAPTAREA LA AVION

Asupra adaptării la avion se poate răspunde la două întrebări importante, utilizînd rezultatele anterioare.

O primă întrebare: care este raza discului elicei pentru a obține minimul puterii necesare P_n ?

Cunoscînd T necesar, W avion, Ω la arbore, se calculează P_n așa cum s-a explicat mai înainte (după ce s-a stabilit în prealabil profilul și se știe μ_m), pentru diferite valori R.

În figura 3 se prezintă rezultatele pentru un caz concret pentru diferite valori μ_m. Se remarcă existența unui minim al puterii necesare la o anumită valoare R. În figura 4 s-au trasat și randamentele pentru același caz de calcul.

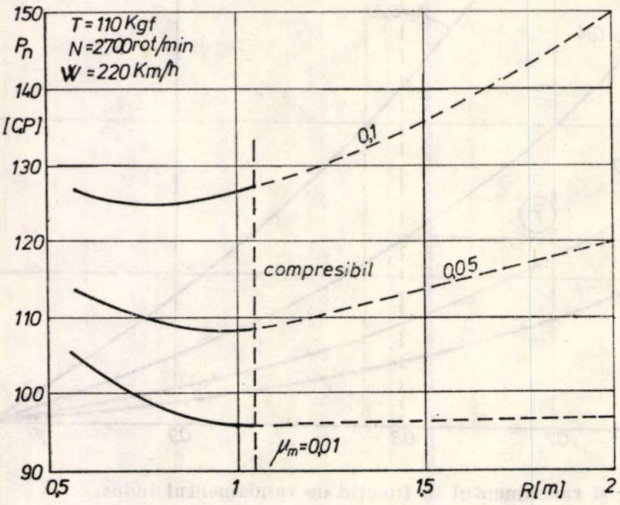


Fig. 3. — Puterea necesară în funcție de raza elicei.

Se poate întîmpla ca raza necesară pentru η_{maxim} (respectiv P_n minim) să nu fie posibilă datorită unor considerații tehnice (spre exemplu, garda la sol etc.) sau să se plaseze în domeniul compresibil critic. Se va alege atunci o rază puțin diferită de cea optimă dar care să corespundă și celorlalte cerințe.

O a doua întrebare: la ce regim trebuie să se adapteze optim elicea cu pas fix la avion sau astfel spus, la ce regim al avionului trebuie să fie proiectată elicea optimă?

Dacă proiectarea elicei se face la regimul de croazieră sau la viteză maximă, urcarea și decolarea în special vor beneficia de randamente mici. În plus, tracțiunea la punct fix va fi mică, după cum se arată

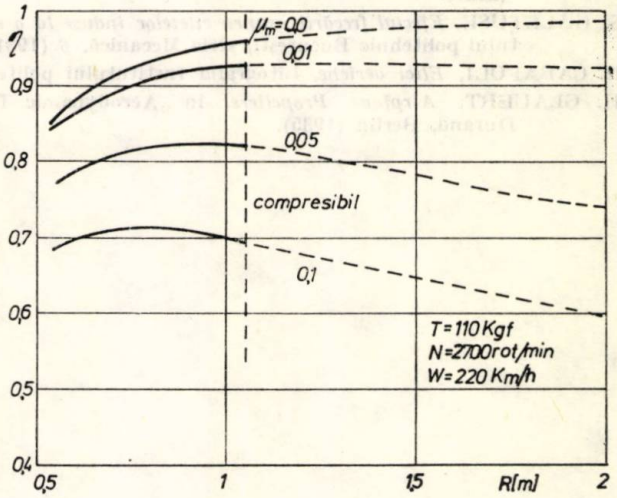


Fig. 4. — Randamentul în funcție de raza elicei.

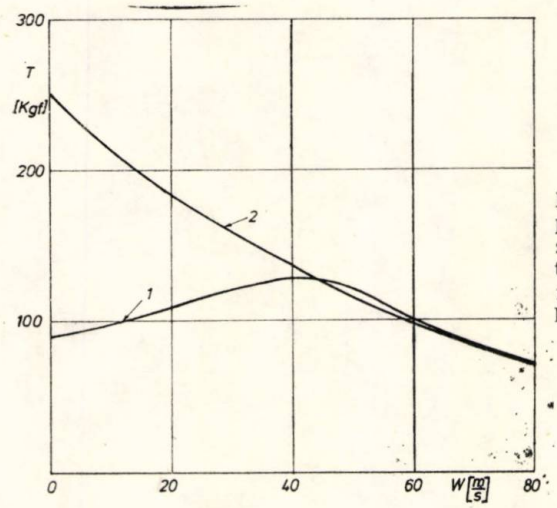


Fig. 5. — Tracțiunea disponibilă în funcție de viteza de zbor ; *1* — elice adaptată la regimul de viteză maximă ; *2* — elice adaptată la regimul de urcare optimă.

printr-un exemplu în figura 5. Rezultatele de tipul celor prezentate în figura 5 se obțin utilizînd caracteristicile elicii cu Λ_0 și caracteristica putere-turație a motorului.

Se remarcă o mult mai bună caracteristică $T(W)$ pentru adaptarea la regimul de urcare. De altfel este posibil ca o soluție de proiectare adaptarea optimă chiar pentru regimul de decolare. În acest caz urmează numai verificarea, după determinarea carateristicilor elicii, ca regimul de viteză maximă să nu se găsească mult la dreapta maximului lui η în curba $\eta(\Lambda_0)$.

Primită la redacție la 16 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. S. GĂLETUȘE, *Asupra proiectării elicei eoliene de randament maxim*, St. cerc. mec. apl., *4* (1981).
2. S. GĂLETUȘE, *Efectul frecării asupra vitezelor induse la o elice eoliană*, Buletinul Institutului politehnic București, seria Mecanică, *6* (1981).
3. E. CARAFOLI, *Elici aeriene*, Litografia Institutului politehnic București (1954).
4. H. GLAUERT, *Airplane Propellers*, in „Aerodynamic Theory", vol. IV, ed. W. F. Durand, Berlin (1935).

O APLICAȚIE A METODEI CARAFOLI LA STUDIUL MIȘCĂRII SUPERSONICE ÎN JURUL UNEI ARIPI CRUCIFORME

de ȘTEFAN STAICU
Institutul politehnic București

Lucrarea tratează mișcarea supersonică în jurul aripii cruciforme subțiri, avînd planul orizontal cu bordurile de atac supersonice, în ipoteza vitezelor finite la bordurile subsonice ale plăcii.
Deformînd bordurile de atac ale planului vertical sub forma unor voleți plani sau curbați, se definesc două aripi cruciforme care evită separația curentului la borduri.
În continuare, se determină ecuațiile profilelor transversale ale plăcii și distribuțiile de presiuni.

1. INTRODUCERE

În această lucrare se studiază curgerea supersonică în jurul unei aripi cruciforme subțiri antisimetrice, planul orizontal avînd bordurile de atac supersonice, urmărind obținerea unor viteze finite la bordurile de atac subsonice ale planului vertical.

Vom considera aripa cruciformă compusă din două aripi delta antisimetrice situate perpendicular una pe alta și o vom raporta la un sistem de axe carteziene $Ox_1x_2x_3$ cu originea în vîrful aripii și cu axa Ox_1 orientată după direcția curentului neperturbat U_∞ (fig. 1).

Se presupune că planul orizontal (aripa) are anvergura $2l$ și o incidență $+\alpha$ pe partea din dreapta și $-\alpha$ pe cea din stînga. De asemenea, planul vertical (placa) are anvergura $2h$ și incidența $+\beta$ pe partea superioară și $-\beta$ pe partea inferioară.

Ca și în cazul aripii delta simple [1], curentul se separă la bordurile de atac subsonice ale plăcii, dînd naștere unor cornete de vîrtejuri care produc o mișcare antisimetrică.

În cele ce urmează se vor defini anumite forme ale plăcii ampenajului, astfel ca desprinderea curentului la borduri să poată fi înlăturată la un regim determinat de zbor, obținîndu-se în același timp și viteze finite la aceste borduri.

Făcînd aceste considerații curgerea în jurul sistemului cruciform rămîne conică și poate fi tratată utilizînd metodele cunoscute în teoria aripilor [2].

Vom adopta următoarele plane de lucru :

— planul fizic Oyz (fig. 1), normal pe Ox_1, avînd coordonatele :

$$y = \frac{x_2}{x_1}; \qquad z = \frac{x_3}{x_1}, \tag{1}$$

— planul complex (fig. 2):

$$x = \eta + i\zeta, \tag{2}$$

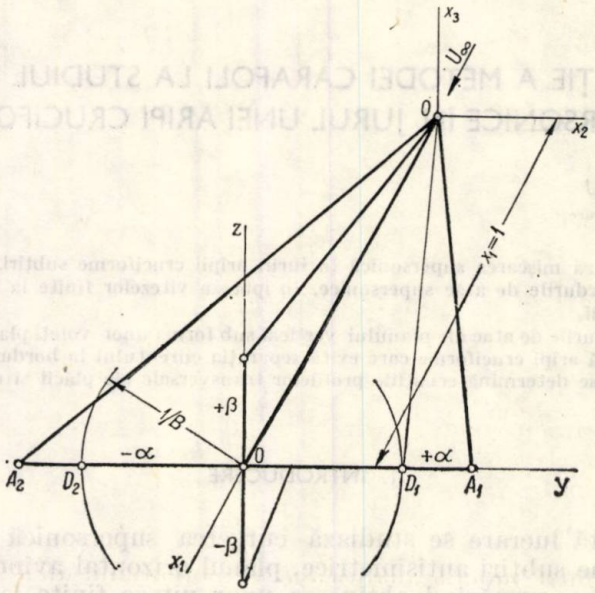


Fig. 1

ale cărui coordonate au fost obținute prin transformările

$$\eta = y(1 - B^2z^2)^{-1}, \quad \zeta = z(1 - B^2z^2)^{-1}\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}, \tag{3}$$

$$(B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}),$$

unde M_∞ reprezintă numărul Mach al curentului supersonic.

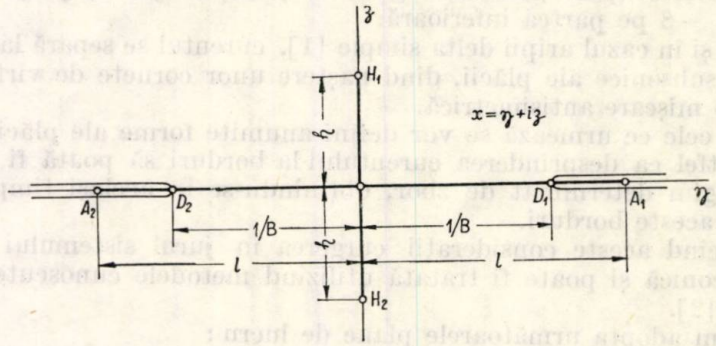


Fig. 2

Mai departe vom utiliza un alt plan complex X, dat de transformarea conformă

$$X^2 = x^2 + \mathfrak{y}^2, \tag{4}$$

care situează întreaga aripă cruciformă într-un plan.

Să observăm că componentele vitezelor de perturbație u, v, w și conjugatele lor respective u', v', w' formează cele trei funcții de viteză, care depind de variabila complexă x:

$$U = u + iu', \qquad V = v + iv', \qquad W = w + iw'. \tag{5}$$

Aceste funcții analitice de x satisfac relațiile de compatibilitate:

$$dU = -x\,dV = ix\,(1 - B^2x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dW. \tag{6}$$

2. REALIZAREA VITEZELOR FINITE LA BORDURILE PLANULUI VERTICAL

a) *Introducerea de voleți plani antisimetrici.* Să presupunem că placa aripii cruciforme are incidența $+\beta$ în partea de sus a aripii și $-\beta$ în partea de jos a aripii și că în punctele $z = \pm t_0$ se introduc doi voleți de bord de atac bracați antisimetric, sub incidențele $+\beta_0$ și respectiv $-\beta_0$; presiunile pe placă în apropierea bordurilor pot deveni finite.

Pentru determinarea funcției vitezei axiale $U(x)$ în cazul aripii cruciforme obținute vom utiliza *metoda Carafoli* referitoare la analogia hidrodinamică.

Această metodă, stabilită de acad. E. Carafoli, realizează o analogie hidrodinamică între funcția analitică U și potențialul unei mișcări fictive din regimul incompresibil care satisface aceleași condiții la limită.

Aplicarea acestei metode se face în planul complex χ dat de transformarea conformă:

$$\chi^2 = \frac{1 + \mathfrak{B}X}{1 - \mathfrak{B}X} \qquad \left(\mathfrak{B} = \frac{B}{\sqrt{1 + B^2\mathfrak{h}^2}}\right). \tag{7}$$

Astfel, saltul vitezei laterale pe placă sau al incidenței pe liniile de fixare a voleților, care devin muchii de separație, va fi introdus în expresia funcției U prin două surse de intensități Q_0 și $-Q_0$, concentrate în punctele de afixe:

$$\chi_0' = \pm\sqrt{\frac{1 + \mathfrak{B}T_0}{1 - \mathfrak{B}T_0}}, \qquad \chi_0'' = \pm\sqrt{\frac{1 - \mathfrak{B}T_0}{1 + \mathfrak{B}T_0}}. \tag{8}$$

Așadar, însumînd contribuțiile celor două muchii situate simetric (coresopunzător celor doi voleți de bord de atac, bracați antisimetric) cu contribuția bordurilor de atac supersonice ale planului orizontal, se obține următoarea expresie a funcției de viteză axială de perturbație:

$$U = \frac{2}{\pi}K_0\left[\arccos\sqrt{\frac{(1 + \mathfrak{B}L)(1 - \mathfrak{B}X)}{2\mathfrak{B}(L - X)}} - \arccos\sqrt{\frac{(1 + \mathfrak{B}L)(1 + \mathfrak{B}X)}{2\mathfrak{B}(L + X)}}\right] +$$

$$+\frac{2}{\pi}Q_0\left[\operatorname{arcgch}\sqrt{\frac{(1 + \mathfrak{B}X)(1 - \mathfrak{B}T_0)}{2\mathfrak{B}(X - T_0)}} - \operatorname{arcgch}\sqrt{\frac{(1 + \mathfrak{B}X)(1 + \mathfrak{B}T_0)}{2\mathfrak{B}(X + T_0)}}\right] =$$

$$= \pm \frac{2}{\pi} K_0 \arccos \sqrt{\frac{(l^2 + \mathfrak{h}^2)(1 - B^2x^2)}{(1 + B^2\mathfrak{h}^2)(l^2 - x^2)}} \pm$$

$$\pm \frac{2}{\pi} Q_0 \operatorname{arcgh} \sqrt{\frac{(1 + B^2\tau_0^2)(\mathfrak{h}^2 + x^2)}{(1 + B^2\mathfrak{h}^2)(\tau_0^2 + x^2)}}, \tag{9}$$

unde s-au făcut notaţiile:

$$\mathfrak{h} = \frac{h}{\sqrt{1 - B^2h^2}}, \qquad \tau_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - B^2t_0^2}}. \tag{10}$$

Constantele K_0 şi Q_0 se determină utilizînd condiţiile la limită pentru vitezele de perturbaţie pe suprafaţa aripii cruciforme. Astfel, pornind de la relaţiile de compatibilitate (6), se deduce sistemul:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re} B \int_{\text{aripă}}^{\text{cercul Mach}} \sqrt{\frac{1 - \mathfrak{B}^2X^2}{\mathfrak{B}^2(\mathfrak{h}^2 - X^2)}}\, \mathrm{d}U = \alpha U_\infty, \\ &\mathrm{Re} \int_{\text{pl}}^{\text{cercul Mach}} \frac{1}{\sqrt{X^2 - \mathfrak{h}^2}}\, \mathrm{d}U = \beta_0 U_\infty. \end{aligned} \tag{11}$$

Efectuînd integralele, se obţine:

$$\frac{K_0}{U_\infty} = \frac{\alpha l}{\sqrt{B^2l^2 - 1}}, \qquad \frac{Q_0}{U_\infty} = C_1(\beta + C_0\alpha), \tag{12}$$

unde s-a notat:

$$C_0 = -\frac{2}{\pi l} \sqrt{\frac{l^2 + \mathfrak{h}^2}{1 + B^2\mathfrak{h}^2}} \left[K(k) - \frac{\mathfrak{h}^2}{l^2 + \mathfrak{h}^2} \Pi(\rho_1, k) \right],$$

$$C_1 = \left\{ \frac{2}{\pi\tau_0^2} \sqrt{\frac{(\mathfrak{h}^2 - \tau_0^2)(1 + B^2\tau_0^2)}{1 + B^2\mathfrak{h}^2}} \left[K(k) - \frac{\mathfrak{h}^2}{\mathfrak{h}^2 - \tau_0^2} \Pi(\rho_2, k) \right] + \frac{1}{\tau_0} \right\}^{-1}. \tag{13}$$

În aceste rezultate $K(k)$, $\Pi(\rho_1, k)$, $\Pi(\rho_2, k)$ reprezintă integralele eliptice complete de speţa întîi şi respectiv a treia, avînd modulele şi parametrii

$$k = \sqrt{1 - B^2h^2}, \quad \rho_1 = -\frac{l^2}{l^2 + \mathfrak{h}^2}, \qquad \rho_2 = \frac{\tau_0^2}{\mathfrak{h}^2 - \tau_0^2}. \tag{14}$$

Incidenţa voletului de bord de atac este dată de relaţia

$$\beta_0 = \beta - \frac{Q_0}{\tau_0 U_\infty}. \tag{15}$$

Notînd cu $y(x_1, x_3)$ ordonata scheletului plăcii față de planul Ox_1x_3, ecuația profilului transversal al suprafeței conice se scrie:

$$y(z) = \frac{1}{x_1}\int \beta(x_1, x_3)\,\mathrm{d}x_1 + g(x_3), \tag{16}$$

unde $g(x_3)$ reprezintă o funcție supusă la condiția ca planul vertical să capete o formă geometrică practică. Pornind de la distribuția de incidențe pe suprafața plăcii vom obține

$$\begin{aligned} &y(z) = \beta + (y_m - \beta)\frac{z}{t_0}, \quad (y(0) = \beta), \\ &z < t_0, \\ &y(z) = \beta_0\left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad (y(h) = 0), \\ &z > t_0, \end{aligned} \tag{17}$$

unde y_t reprezintă ordonata în vecinătatea muchiei

$$y_m = y(t_0) = \beta_0\left(1 - \frac{t_0}{h}\right), \tag{18}$$

b) *Deformarea bordurilor de atac ale planului vertical prin voleți curbați.* Dacă la un anumit regim de zbor se urmărește evitarea desprinderii curentului la borduri, atunci vom curba bordul plăcii astfel ca incidența acesteia să devină variabilă într-o anumită regiune.

Variația incidenței este realizată, în sensul analogiei hidrodinamice [2], cu ajutorul unei distribuții de surse q, repartizate pe urma plăcii din planul complex χ dat de transformarea conformă (7). Astfel, lucrînd în planul X, vom adopta o distribuție liniară a surselor:

$$q(T) = q_0\frac{T}{b}, \quad T \in [-T_0, T_0]. \tag{19}$$

Aplicînd formulele stabilite de teoria mișcărilor conice în regim supersonic [2], vom obține următoarea funcție de viteză axială de perturbație

$$U = \pm\frac{2}{\pi}K_0 \operatorname{arcos} \mathfrak{B}L\sqrt{\frac{1-\mathfrak{B}^2X^2}{\mathfrak{B}^2(L^2-X^2)}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{q_0}{b}\int_0^{T_0} T\left[\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+\mathfrak{B}X)(1-\mathfrak{B}T)}{2\mathfrak{B}(X-T)}} - \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+\mathfrak{B}X)(1+\mathfrak{B}T)}{2\mathfrak{B}(X+T)}}\right]\mathrm{d}T,$$

care, în urma efectuării calculelor, devine:

$$U = \pm \frac{2}{\pi} K_0 \arccos \sqrt{\frac{(l^2 + \mathfrak{h}^2)(-1B^2 x^2)}{(1 + B^2\mathfrak{h}^2)(l^2 - x^2)}} \pm$$

$$\pm \frac{q_l}{\pi\mathfrak{h}} \left[(1/B^2 - x^2)(\mathfrak{h}^2 + x^2) \arccos \sqrt{\frac{1 + B^2\tau_0^2}{1 + B^2\mathfrak{h}^2}} - \right.$$

$$\left. - (\tau_0^2 + x^2) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + B^2\tau_0^2)(\mathfrak{h}^2 + x^2)}{(1 + B^2\mathfrak{h}^2)(\tau_0^2 + x^2)}} \right]. \tag{21}$$

Constantele K_0 și q_0 se calculează utilizînd relaţiile (11), în care funcţia analitică U este determinată în ipoteza a două surse concentrate, în locul celor ditribuite, de intensitate Q_0' și poziţie $Y = T_0'$:

$$Q_0' = \frac{q_0}{2\mathfrak{h}} T_0^2, \qquad T_0' = \frac{2}{3} T_0;$$

rezultă:

$$\frac{q_0}{U_\infty} = C_2 \cdot (\beta + C_0\alpha), \tag{22}$$

unde s-a notat

$$C_2 = \left\{ 1 - \frac{\tau_0}{\mathfrak{h}} + \frac{1}{\pi\mathfrak{h}} \frac{\mathfrak{h}^2 - \tau_0^2}{\tau_0'^2} \sqrt{\frac{(\mathfrak{h}^2 - \tau_0'^2)(1 + B^2\tau_0'^2)}{1 + B^2\mathfrak{h}^2}} \left[K(k) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\mathfrak{h}^2}{\mathfrak{h}^2 - \tau_0'^2} \Pi(\rho_2, k) \right] \right\}^{-1}. \tag{23}$$

Pornind de la relaţia

$$q(t) = \frac{t}{\sqrt{1 - B^2 t^2}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{24}$$

dedusă din teoria mișcărilor conice [2], se obţine incidenţa locală

$$\beta(z) = \beta_0 + \frac{q_0}{U_\infty} \left(1 - \frac{z}{h} \sqrt{\frac{1 - B^2h^2}{1 - B^2z^2}} \right), \qquad z \in [-h, -t_0] \cup [t_0, h], \tag{25}$$

de unde se deduce incidenţa bordului de atac al voletului

$$\beta_0 = \beta - \frac{q_0}{U_\infty} \left(1 - \frac{t_0}{h} \sqrt{\frac{1 - B^2h^2}{1 - B^2t_0^2}} \right). \tag{26}$$

Pornind de la relația (16) și ținînd seama de (25), obținem următoarele ecuații ale profilului transversal al suprafeței plăcii:

$$y(z) = \beta + (y_m - \beta)\frac{z}{t_0}, \qquad (y(0) = \beta), \tag{27}$$

$$z < t_0,$$

$$y(z) = \left(\beta_0 + \frac{q_0}{U_\infty}\right)\left(1 - \frac{z}{h}\right) + \frac{q_0}{U_\infty}\sqrt{1 - B^2h^2}\,\frac{z}{h}\left(\operatorname{arcgch}\frac{1}{Bh} - \operatorname{arcgch}\frac{1}{Bz}\right),$$

$$z > t_0,$$

în care

$$y_m = \left(\beta_0 + \frac{q_0}{U_\infty}\right)\left(1 - \frac{t_0}{h}\right) + \frac{q_0}{U_\infty}\sqrt{1 - B^2h^2}\,\frac{t_0}{h}\left(\operatorname{arcgch}\frac{1}{Bh} - \operatorname{arcgch}\frac{1}{Bt_0}\right) \tag{28}$$

reprezintă ordonata în vecinătatea muchiei de fixare a voletului.

Coeficienții de presiune pe suprafața aripii și a plăcii se determină cu ajutorul relațiilor

$$C_{pa} = -\frac{2}{U_\infty}\operatorname{Re} U(y), \qquad y \in [-l,\ l],$$

$$C_{pp} = -\frac{2}{U_\infty}\operatorname{Re} U(i\mathfrak{z}), \quad \mathfrak{z} \in [-\mathfrak{h},\ \mathfrak{h}] \tag{29}$$

Observație. În cazul teoriei liniare, expresia funcției de viteză axială de perturbație este:

$$U = \pm\frac{A_0}{X}\sqrt{\frac{1 - \mathfrak{B}^2X^2}{\mathfrak{B}^2}} \pm \frac{2}{\pi}K_0 \arccos \mathfrak{B}L\sqrt{\frac{1 - \mathfrak{B}^2X^2}{\mathfrak{B}^2(L^2 - X^2)}}, \tag{30}$$

unde

$$\frac{A_0}{U_\infty} = \frac{h^2}{\sqrt{1 - B^2h^2}\,E(k)}(\beta + C_0\alpha). \tag{31}$$

Primită la redacție la 8 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, ȘT. STAICU, *Sur un modèle théorique concernant l'aile delta mince avec décollement aux bords d'attaque*, Journal de Mécanique, **6**, 2 (1967).
2. E. CARAFOLI, *Wing theory in supersonic flow*, Pergamon Presse, London, 1969.
3. E. CARAFOLI, ȘT. STAICU, *Thin antisymmetrical delta wings with finite velocities at the leading edges*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **19**, 5 (1974).

ASUPRA UNEI PROBLEME DE MIŞCARE NESTAŢIONARĂ ÎN CONDUCTELE DE GAZE

de TEODOR OROVEANU şi MOHAMMED ASEF

Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

Se consideră ecuaţiile liniarizate ale mişcării nestaţionare a gazelor în conducte şi se studiază cazul unei conducte de lungime infinită, pusă în exploatare la o presiune impusă. Rezultatele sînt comparate cu acelea obţinute de alţi autori prin aplicarea metodei perturbaţiilor la ecuaţiile neliniare ale mişcării nestaţionare a gazelor în conducte. Pot fi trase astfel unele concluzii asupra limitelor de aplicabilitate ale soluţiilor ecuaţiilor liniarizate.

1. INTRODUCERE

În studiul mişcării nestaţionare a gazelor în conducte, se utilizează de obicei sistemul de ecuaţii

$$-\frac{\partial p^2}{\partial x} = \frac{a^2 \lambda}{d} q^2, \qquad -\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{\partial q}{\partial x}, \tag{1}$$

în care t este timpul, x distanţa măsurată pe axa conductei, p presiunea, λ coeficientul de pierdere de sarcină, d diametrul interior al conductei

$$q = \rho v \tag{2}$$

viteza masică, în a cărei expresie ρ este masa specifică a gazelor şi v viteza medie în secţiunea tranversală a conductei, iar

$$a = \sqrt{RT} \tag{3}$$

viteza izotermică a sunetului în gaze, R fiind constanta gazelor şi T temperatura acestora presupusă constantă. Pe lîngă această ultimă restricţie, se mai admite că este respectată legea gazelor perfecte şi se neglijează forţele de inerţie.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 40, NR. 6, 1981, P. 855–867

În cazul în care se consideră, parțial, forțele de inerție, sistemul precedent devine

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{a^2 \lambda}{2d} \frac{q^2}{p} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Atît pentru sistemul (1), cît și pentru (4), soluțiile, cu condiții inițiale și la limită adecvate, nu pot fi găsite decît prin diferite metode numerice sau aproximative, ca de exemplu acelea prezentate în [4]—[10].

În anumite situații, se poate recurge la liniarizarea sistemului (1) sau (4); există mai multe variante posibile [1]. Într-una dintre acestea, se ajunge la sistemul

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - 2cq,$$
$$-\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{\partial q}{\partial x}, \tag{5}$$

care înlocuiește sistemul (4) sau la

$$\frac{\partial p}{\partial x} + 2cq = 0,$$
$$-\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{\partial q}{\partial x}, \tag{6}$$

care înlocuiește sistemul simplificat (1). Constanta $2c$ are expresia

$$2c = \frac{\lambda}{3d} \frac{v_1^2 + v_1 v_0 - 2v_0^2}{v_1 - v_0}, \tag{7}$$

v_0 fiind viteza gazelor în secțiunea inițială a conductei, iar v_1 viteza în secțiunea finală.

În acest caz, este ușor să se obțină, prin eliminări simple, fie o ecuație pentru presiune, fie una pentru viteza masică. Astfel, dacă plecăm de la sistemul (5) obținem

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2c}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{8}$$

respectiv

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}+\frac{2c}{a^2}\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \tag{9}$$

iar din sistemul simplificat (6) rezultă

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{a^2}{2c}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{10}$$

precum şi

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{a^2}{2c}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Prin urmare, presiunea şi viteza masică satisfac una şi aceeaşi ecuaţie, în primul caz de tip hiperbolic, iar în al doilea de tip parabolic. Remarcăm că ecuaţiile (10) şi (11) pot fi găsite direct din (8), respectiv (9), dacă se neglijează termenul care conţine derivata de ordinul al doilea în raport cu timpul. Aceasta înseamnă că se poate admite că $\frac{1}{a^2} \ll 1$ ceea ce de fapt corespunde cu realitatea.

În cele ce urmează, vom utiliza ecuaţia (10) pentru studierea unei probleme care a fost rezolvată şi fără a se recurge la liniarizare, în scopul de a compara rezultatele şi de a stabili în ce măsură este utilizabilă ecuaţia liniarizată.

2. CAZUL CONDUCTEI DE LUNGIME INFINITĂ

Atunci cînd o conductă magistrală de lungime mare este pusă în exploatare la o presiune şi un debit impuse, în conducta aflată iniţial sub presiune se creează un front depresionar care se propagă într-un anumit timp, pînă la punctul de alimentare. Atît timp cît frontul n-a atins extremitatea conductei, repartiţia presiunii şi a vitezei masice nu sînt influenţate de condiţiile la limită existente în acest punct.

Să considerăm astfel ecuaţia (10) în care punem

$$\varkappa=\frac{a^2}{2c} \tag{12}$$

şi obţinem

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{13}$$

Căutăm soluţia acestei ecuaţii cu condiţia iniţială

$$t=0, \qquad p=p_0 \tag{14}$$

şi condiţiile la limită

$$x = 0,\ p = f(t);\ x \to \infty,\ p = p_0 \tag{15}$$

pentru $t > 0$.

Pentru rezolvarea problemei, facem mai întîi schimbarea de funcţie

$$p' = p - p_0 \tag{16}$$

şi deoarece p_0 este o constantă, ecuaţia (13) devine

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \tag{17}$$

iar soluţia satisface condiţiile

$$t = 0, \quad p' = 0 \tag{18}$$

şi

$$x = 0,\ p' = f(t) - p_0;\ x \to \infty,\ p' = 0 \tag{19}$$

pentru $t > 0$.

Introducem transformata lui Laplace

$$\overline{p'} = \int_0^\infty p' e^{-st}\, dt \tag{20}$$

şi dacă înmulţim ecuaţia (17) în ambii membri cu e^{-st} şi integrăm de la 0 la ∞, rezultă

$$\frac{d^2 \overline{p'}}{dx^2} - \frac{s}{\varkappa} \overline{p'} = 0, \tag{21}$$

iar condiţiile la limită iau forma

$$x = 0,\ \overline{p'} = \overline{f(s)} - \frac{p_0}{s};\ x \to \infty,\ \overline{p'} = 0, \tag{22}$$

unde

$$\overline{f(s)} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt. \tag{23}$$

Soluţia este

$$\overline{p'} = \left[\overline{f(s)} - \frac{p_0}{s}\right] e^{-x\sqrt{\frac{s}{\varkappa}}} \tag{24}$$

și pentru găsirea originalului utilizăm teorema de convoluție [2] și tabelele din [3] de unde rezultă

$$p' = \frac{x}{2\sqrt{\pi\varkappa}} \int_0^t \frac{f(\theta)}{(t-\theta)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4\varkappa(t-\theta)}} d\theta - p_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \quad (25)$$

Dacă punem

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\varkappa(t-\theta)}}, \quad (26)$$

această soluție ia forma

$$p' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4\varkappa\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi - p_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) \quad (27)$$

și prin urmare expresia presiunii este

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4\varkappa\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi + p_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \quad (28)$$

Un caz particular interesant, considerat în [5], este acela în care avem

$$f(t) = p_1, \quad (29)$$

p_1 fiind constantă. Soluția precedentă ia forma

$$p = (p_1 - p_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + p_0 \quad (30)$$

sau

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \quad (31)$$

Din prima ecuație (6), cu ajutorul soluției (30), se obține expresia vitezei masice

$$q = \frac{p_1 - p_0}{2c} \frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}} \quad (32)$$

și printr-un calcul simplu se constantă că

$$\lim_{t \to 0} q = 0. \quad (33)$$

De asemenea, cînd timpul tinde către infinit, viteza masică tinde din nou către zero; aceasta corespunde şi cu expresia (30) a presiunii din care se observă că pentru cazul în care timpul tinde către infinit presiunea din conductă tinde către valoarea constantă p_1. Bineînţeles, trebuie să considerăm această situaţie pentru x finit şi pozitiv.

În cazul acestei probleme, apare o dificultate în definirea constantei $2c$, conform relaţiei (7). După [1], v_1 şi v_0 ar trebui să reprezinte limita superioară, respectiv limita inferioară a valorii vitezei gazelor în cazul mişcării nestaţionare studiate. Este clar că v_0 are valoarea zero, dar v_1 este greu de definit cu ajutorul formulelor obţinute.

Pentru a depăşi această dificultate, recurgem la rezolvarea ecuaţiei hiperbolice (8) cu condiţiile iniţiale.

$$t = 0, \qquad p = p_0, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \tag{34}$$

deoarece în momentul iniţial presiunea este constantă şi condiţiile la limită

$$x = 0,\ p = f(t);\ x \to \infty,\ p = p_0, \tag{35}$$

pentru $t > 0$.

Cu schimbarea de funcţie (16), ecuaţia (8) devine

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{2c}{a^2}\frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \tag{36}$$

iar soluţia satisface condiţiile

$$t = 0, \qquad p' = 0, \qquad \frac{\partial p'}{\partial t} = 0 \tag{37}$$

şi

$$x = 0, \qquad p' = f(t) - p_0;\ x \to \infty,\ p' = 0. \tag{38}$$

Ca şi mai înainte, introducem transformata lui Laplace (20) şi ajungem la ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}^2 \bar{p}'}{\mathrm{d}x^2} - (s + 2c)\frac{s}{a^2}\bar{p}' = 0 \tag{39}$$

cu condiţiile la limită (22).

Soluţia este

$$\bar{p}' = \left[\overline{f(s)} - \frac{p_0}{s}\right] \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s(s+2c)}}{a}x}, \tag{40}$$

iar prin inversiune rezultă [2], [3]

$$p' = 0 \tag{41}$$

pentru $t < \frac{x}{a}$ sau $x > at$ şi

$$p' = e^{-\frac{c}{a}x}\left[f\left(t-\frac{x}{a}\right)-p_0\right]+\frac{c}{a}x\int_{\frac{x}{a}}^{t}[f(t-\theta)\,p_0]e^{-c\theta}\frac{I_1\left(c\sqrt{\theta^2-\frac{x^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{\theta^2-\frac{x^2}{a^2}}}d\theta \tag{42}$$

pentru $t > \frac{x}{a}$ sau $x < at$; I_1 este funcţia Bessel modificată de specia întîi şi ordinul unu.

Rezultă deci

$$p = p_0 \tag{43}$$

pentru $t < \frac{x}{a}$ sau $x > at$ şi

$$p = e^{-\frac{c}{a}x}\left[f\left(t-\frac{x}{a}\right)-p_0\right]+\frac{c}{a}x\int_{\frac{x}{a}}^{t}[f(t-\theta)-p_0]e^{-c\theta}\frac{I_1\left(c\sqrt{\theta^2-\frac{x^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{\theta^2-\frac{x^2}{a^2}}}d\theta + p_0 \tag{44}$$

pentru $t > \frac{x}{a}$ sau $x < at$. Se observă că în acest caz perturbaţia de presiune se propagă cu viteza finită a, existînd un front de discontinuitate la $x = at$.

În cazul particular care ne interesează, în care $f(t)$ are valoarea constantă dată de (29), soluţia precedentă devine, pentru $t > \frac{x}{a}$ sau $x < at$,

$$p = p_0 + (p_1 - p_0)\left[e^{-\frac{c}{a}x}+\frac{c}{a}x\int_{\frac{x}{a}}^{t}e^{-c\theta}\frac{I_1\left(c\sqrt{\theta^2-\frac{x^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{\theta^2-\frac{x^2}{a^2}}}d\theta\right] \tag{45}$$

și de aici rezultă

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{c}{a}(p_1 - p_0)\, x\, e^{-ct} \frac{I_1\left(c\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}}. \tag{46}$$

Dacă integrăm în raport cu x a doua ecuație (5), găsim

$$q = \frac{p_1 - p_0}{a} e^{-ct} I_0\left(c\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right), \tag{47}$$

unde I_0 este funcția Bessel modificată de specia întîi și ordinul zero.

Din formula (32) care poate fi scrisă sub forma

$$q = \frac{p_1 - p_0}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi ct}} e^{-\frac{cx^2}{2a^2 t}}, \tag{48}$$

dacă înlocuim pe $\varkappa$ cu expresia sa (12), se constată că la $x = 0$ avem

$$q = \frac{p_1 - p_0}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi ct}}, \tag{49}$$

în timp ce din (47) rezultă, tot pentru $x = 0$,

$$q = \frac{p_1 - p_0}{a} e^{-ct} I_0(ct). \tag{50}$$

Pentru valori suficient de mari ale argumentului ct, expresiile (49) și (50) coincid practic. Într-adevăr, în acest caz, I_0 are expresia asimptotică

$$I_0(ct) \sim \frac{e^{ct}}{\sqrt{2\pi ct}}\left[1 - \frac{3}{8ct} - \frac{3\cdot 5}{2!\,(8ct)^2} - \frac{3\cdot 5\cdot 21}{3!\,(8ct)^3} - \cdots\right] \tag{51}$$

și dacă $ct > 10$, expresia

$$I_0(ct) \sim \frac{e^{ct}}{\sqrt{2\pi ct}} \tag{52}$$

aproximează pe cea precedentă cu mai puțin de 4% în exces.

În aceste condiții, putem deci scrie, în loc de (50),

$$q \approx \frac{p_1 - p_0}{a} e^{-ct} \frac{e^{ct}}{\sqrt{2\pi ct}} = \frac{p_1 - p_0}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi ct}}. \tag{53}$$

La $t = 0$, din (49) rezultă o valoare infinită pentru q la $x = 0$, în timp ce din (50) obținem

$$q = \frac{p_1 - p_0}{a} \tag{54}$$

pentru $x = 0$, deci o valoare finită. Cunoașterea vitezei masice q și a presiunii p_1 permite să se calculeze viteza v_1 și apoi constanta $2c$.

Utilizînd formula (31) am calculat pentru mai multe valori ale raportului $\frac{p_1}{p_0}$ și ale argumentului $\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$ valorile raportului $\frac{p}{p_0}$ care sînt trecute în tabela 1.

Tabela 1

$\frac{p_1}{p_0}$ \ $\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,8	0,8	0,84454	0,88568	0,92077	0,94842	0,96854
0,6	0,6	0,68908	0,77136	0,84135	0,89684	0,93708
0,4	0,4	0,53362	0,65703	0,76231	0,84526	0,90562
0,2	0,2	0,37816	0,54271	0,68308	0,79368	0,87416
0,0	0,0	0,22270	0,42839	0,60386	0,74210	0,84270

Cazul $\frac{p_1}{p_0} = 0$ sau $p_1 = 0$ corespunde la golirea conductei; viteza masică are expresia

$$q = -\frac{p_0}{2c}\frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}}, \tag{55}$$

semnul negativ indicînd scoaterea gazelor din conductă.

În [5] este prezentată o soluție a acestei probleme bazată pe utilizarea metodei perturbațiilor. Se afirmă că atunci cînd este îndeplinită condiția $1 - \frac{p_1^2}{p_0} < 0{,}8$ ceea ce înseamnă de fapt $\frac{p_1^2}{p_0^2} > 0{,}2$ sau $\frac{p_1}{p_0} > 0{,}447$, soluția problemei este, cu o bună aproximație,

$$\frac{p^2}{p_0^2} = 1 - \left(1 - \frac{p_1^2}{p_0^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\theta}}\right), \tag{56}$$

unde $\frac{\xi}{2\sqrt{\theta}} = \frac{x}{2\sqrt{2\varkappa t}}$.

În tabela 2 sînt trecute valorile raportului $\frac{p}{p_0}$ pentru aceleași valori ale raportului $\frac{p_1}{p_0}$ ca și în tabela 1. Argumentul funcției complementare de eroare din formula (56) a fost calculat astfel ca să corespundă

Tabela 2

$\frac{p_1}{p_0}$ \ $\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,8	0,8	0,83480	0,86715	0,89579	0,92062	0,94113
0,6	0,6	0,67908	0,74769	0,80547	0,85380	0,89267
0,4	0,4	0,54107	0,64903	0,73419	0,80267	0,85638
0,2	0,2	0,43787	0,58186	0,68788	0,77037	0,83384
0,0	0,0	0,39755	0,55767	0,67173	0,75929	0,82619

cu aceleași valori ale argumentului funcției complementare de eroare din tabela 1. Examinarea comparativă a rezultatelor arată că atunci cînd $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}8$ valorile din tabela 1 sînt cu cel mult 3% mai mari decît acelea corespunzătoare din tabela 2. Pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}6$, valorile din tabela 1 diferă cu cel mult 5% în plus față de cele din tabela 2. Chiar pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}4$ această diferență în plus maximă este de 5,7%. Dacă se ține seama de faptul că formula (56) aproximează prin lipsă soluția exactă, rezultă că soluția (31) obținută cu ajutorul ecuației liniarizate este foarte acceptabilă.

Pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}2$ și $\frac{p_1}{p_0} = 0$, diferențele sînt mai mari dar conform observației din [5] soluția (56) nu mai reprezintă o aproximație bună.

În scopul de a aprofunda această comparație, vom considera soluția completă dată în [5] care este de forma

$$\frac{p^2}{p_0^2} = 1 - \left(1 - \frac{p_1^2}{p_0^2}\right) \bar{f}_0(\xi,\theta) - \left(1 - \frac{p_1^2}{p_0^2}\right)^2 \bar{f}_1(\xi,\theta) - \cdots -$$

$$- \left(1 - \frac{p_1^2}{p_0^2}\right)^{n+1} \bar{f}_n(\xi,\theta) - \cdots \qquad (57)$$

și ne vom opri, tot ca în [5], la aproximația de ordinul al treilea ($n = 2$). Observăm de asemenea că soluția (56) reprezintă aproximația de ordinul zero ($n = 0$).

În tabela 3 sînt date, după [5], valorile funcțiilor $\bar{f}_0$, $\bar{f}_1$ și $\bar{f}_2$ pentru mai multe valori ale argumentului $\frac{\xi}{2\sqrt{\theta}}$.

Cu aceste valori ale funcțiilor $\bar{f}_0$, $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ au fost calculate valorile soluției (57) pentru aceleași valori ale raportului $\frac{p_1}{p_0}$ utilizate și mai înainte, rezultatele fiind trecute în tabela 4.

Revenind acum la soluția aproximativă (31), dacă notăm $X_1 = \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$ și $X_2 = \frac{\xi}{2\sqrt{\theta}}$ avem, așa cum am precizat mai înainte, $X_1 = \sqrt{2}X_2$. Calculînd valorile argumentului $\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$ care corespund valorilor argumentului $\frac{\xi}{2\sqrt{\theta}}$ conform acestei relații, le-am trecut în tabela 5, unde sînt înscrise și valorile raportului $\frac{p}{p_0}$ după formula (31), pentru aceleași valori ale raportului $\frac{p_1}{p_0}$ ca și în tabela 4.

Tabela 3

$\frac{\xi}{2\sqrt{\theta}}$	$\bar{f}_0$	$\bar{f}_1$	$\bar{f}_2$
0,0	1,00000	0,00000	0,00000
0,2	0,77730	−0,01893	−0,00611
0,4	0,57161	−0,03037	−0,00809
0,6	0,39614	−0,03236	−0,00661
0,8	0,25790	−0,02748	−0,00410
1,0	0,15730	−0,01982	−0,00210
1,2	0,08969	−0,01253	−0,00094
1,5	0,03389	−0,00514	−0,00025
2,0	0,00468	−0,00074	−0,00003

Diferențele dintre valorile date de soluția (31) și trecute în tabela 5 și valorile date de soluția (57) și trecute în tabela 4, au fost calculate și raportate la valorile din tabela 4. Pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}8$ diferența maximă este 2,76%, iar aceea minimă de 0,08 %; pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}6$, diferența maximă este de 4,05%, iar aceea minimă de 0,13%; pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}4$, diferența maximă este de 4,11%, iar aceea minimă de 0,16%, apărînd însă și o diferență negativă în valoarea absolută de 2,79% pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}2$ diferența maximă este negativă și are valoarea absolută de 14,70%, iar diferența minimă este de 0,18%; în sfîrșit, pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0$, apare o diferență maximă negativă cu valoarea absolută de 37,55%, iar diferența minimă este de 0,19%.

Tabela 4

$\frac{\xi}{2\sqrt{\theta}}$ \ $\frac{p_1}{p_0}$	0,8	0,6	0,4	0,2	0,0
0	0,80000	0,60000	0,40000	0,20000	0,00000
0,2	0,85024	0,71546	0,60336	0,52597	0,49773
0,4	0,89162	0,80544	0,73897	0,69742	0,68326
0,6	0,92838	0,87261	0,83306	0,80955	0,80177
0,8	0,95442	0,92047	0,89732	0,88395	0,87959
1,0	0,97265	0,95289	0,93973	0,93226	0,92985
1,2	0,98457	0,97364	0,96647	0,96243	0,96113
1,5	0,99422	0,99019	0,98758	0,98611	0,98565
2,0	0,99921	0,99865	0,99830	0,99811	0,99804

Se observă că intervalul de valori al variabilei $\frac{\xi}{2\sqrt{\theta}}$ respectiv $\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$, diferențele sînt din ce în ce mai mici pe măsură ce variabila crește, ceea ce corespunde la valori mari ale distanței sau la valori mici ale

Tabela 5

$\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}$ \ $\frac{p_1}{p_0}$	0,8	0,6	0,4	0,2	0,0
0,00000	0,80000	0,60000	0,40000	0,20000	0,00000
0,28284	0,86217	0,72433	0,58650	0,44867	0,31084
0,56568	0,91526	0,83051	0,74577	0,66102	0,57628
0,84853	0,95397	0,90794	0,86191	0,81588	0,76985
1,13137	0,97808	0,95616	0,93424	0,91232	0,89040
1,41421	0,99090	0,98180	0,97270	0,96360	0,95449
1,69706	0,99672	0,99344	0,99016	0,98688	0,98360
2,12132	0,99945	0,99890	0,99835	0,99781	0,99726
2,82843	0,99999	0,99997	0,99996	0,99995	0,99993

timpului. De asemenea, pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}8$, diferenţa dintre soluţii este mai mică decît aceea care rezultă din tabelele 1 şi 2. Acelaşi lucru este valabil şi pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}6$ şi $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}4$, diferenţele menţinîndu-se în limite foarte acceptabile. Pentru $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}2$ şi $\frac{p_1}{p_0} = 0$, diferenţele sînt tot ridicate, deşi scad în valoare absolută, ceea ce înseamnă că soluţia (31) nu este suficient de exactă în aceste cazuri. Pentru o gamă destul de largă de valori ale raportului $\frac{p_1}{p_0}$, soluţia (31) care este foarte simplă, dă valori care sînt foarte acceptabile în calculele practice. Mai remarcăm că soluţia (31) este cu atît mai bună cu cît distanţa are valori mai mari sau timpul valori mai mici.

3. CONCLUZII

În cele ce preced, am încercat să facem o comparaţie între soluţiile ecuaţiilor liniarizate ale mişcării nestaţionare a gazelor în conducte şi soluţiile ecuaţiilor neliniare. În acest scop, am ales un caz simplu şi oarecum idealizat în care comparaţia este posibilă fără dificultate. Rezultatele au arătat, cel puţin pentru acest caz particular, care sînt limitele de aplicabilitate ale soluţiei ecuaţiilor liniarizate. Se poate presupune că şi în alte situaţii mai complexe concluziile ar fi asemănătoare, îndeosebi aceea că soluţiile aproximative ale ecuaţiilor liniarizate sînt utilizabile atunci cînd variaţia presiunii sau a debitului în conductă nu este prea accentuată.

Primită la redacţie la 27 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. I. A. CIARNÎI, *Osnovi gazovoi dinamiki*, Gostoptehizdat, Moskva, 1961, p. 152–156, 171–172.
2. V. A. DITKINE, A. PROUDNIKOV, *Transformations intégrales et calcul opérationnel* Editions Mir, Moscou, 1978, p. 36, 59.
3. V. A. DITKIN, P. I. PRUDNIKOV, *Spravocinik po operaţionnomu iscisleniiu*, G.I.T.T.L. Moskva–Leningrad, 1951, p. 152, 166.
4. L. A. LOTITO, P. W. HALBERT, *Computer simulation of gas flow dynamics*, Pipeline Enginneer, 1967.
5. H. PASCAL, *Curgerea nestaţionară a gazelor prin conducte magistrale*, Editura Academiei R. S. România, Bucureşti, 1967, p. 82–88, 97–101.
6. H. H. RACHFORD, JR., T. DUPONT, *A fast highly accurate means of modeling transient flow in gas pipeline systems by variational methods*, SPE Journal, April, 1974.
7. V. L. STREETER, E. B. WYLIE, *Natural gas pipeline transients*, SPE Journal, Dec. 1970.
8. T. D. TAYLOR, N. E. WOOD, J. E. PAVERS, *A computer simulation of gas flow in long pipelines*, SPE Journal, Dec. 1962.
9. F. TUPPECK, H. KIRSCHE, *Ein numerisches Verfahren zu Berechnung instationaren Strömungsvorgänge in Ferngasleitungen*, Gas- und Wasserfach **13**, 103 (1962).
10. W. YOW, *Analysis and control of transient flow in natural gas piping system*, Ph. D. Dissertation, University of Michigan, Ann Arbor, 1971.

MODELAREA PROCESULUI DE EXTRUDARE LA CALD A OȚELURILOR INOXIDABILE

de C. TEODOSIU, T. DUMITRESCU, I. ROȘU
Institutul de fizica și tehnologia materialelor

Lucrarea de față este consacrată elaborării unei metode analitice de evaluare a forței de extruziune pe baza bilanțului dintre puterea dezvoltată de piston și puterea disipată pentru deformarea materialului și învingerea forțeor de frecare. Metoda ține seama de ecuația constitutivă vîscoplastică a oțelurilor inoxidabile și de nestaționaritatea cîmpului termic. Este studiată dependența forței de extruziune de gradul de reducere, unghiul matriței, viteza de extruziune și coeficienții de frecare.

INTRODUCERE

În ultimii ani a fost abordată modelarea și simularea procesului de extruziune la cald a oțelurilor inoxidabile pornind de la ecuația constitutivă a acestor materiale determinată prin încercări la temperaturi și viteze de deformație apropiate de cele utilizate la extruziune și ținînd seama atît de variația temperaturii calupului în container, cît și de disiparea de căldură produsă prin deformarea plastică. Astfel, a fost studiată variația tensiunilor, deformațiilor, vitezelor de deformație și temperaturii în timpul extruziunii la cald a profilelor pline [1] și au fost aplicate criteriile de echivalare a proceselor de deformare plastică [2,3] pentru simularea extruziunii prin încercări de răsucire la cald [4].

Lucrarea de față este consacrată extinderii rezultatelor anterioare, în sensul elaborării unei metode analitice de evaluare a forței de extruziune și a dependenței ei de gradul de reducere, unghiul matriței, viteza de extruziune, coeficienții de frecare pe container și matriță etc.

Metoda se bazează pe bilanțul dintre puterea dezvoltată de forța de extruziune și lucrul mecanic disipat în unitatea de timp pentru deformarea materialului și învingerea forțelor de frecare. Se pornește de la un cîmp de viteze cinematic admisibil, după care se calculează variația tensiunilor și a temperaturii. Avitzur [5] a utilizat această metodă pentru estimarea forței de extruziune în cazul unui proces staționar și izoterm, considerînd în plus că materialul extrudat se comportă rigid-plastic. Față de această abordare, în studiul de față se realizează o modelare mult mai realistă a procesului de extrudare, care ține seama de comportarea vîscoplastică a materialului extrudat și de nestaționaritatea cîmpului termie și a stării de tensiune, produsă de variația în timp a temperaturii materialului care intră în matriță.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 40, NR. 6, 1981, P. 869–884

Pentru calculul iterativ al distribuției nestaționare de temperatură și pentru bilanțul puterii au fost elaborate programe speciale de calcul. Rezultatele permit aprecierea calitativă și cantitativă a influenței parametrilor tehnologici asupra forței de extruziune.

1. CÎMPUL DE VITEZE CINEMATIC ADMISIBIL

Primul pas în aplicarea metodei îl constituie selectarea unui cîmp de viteze cinematic admisibil, adică a unui cîmp care să satisfacă condițiile la limită cinematice și condiția de incompresibilitate.

Calupul este împărțit în patru zone, în fiecare din ele cîmpul de viteze fiind presupus continuu. Zonele sînt separate de suprafețele sferice Σ_i și Σ_f cu centrul în O de raze r_i, respectiv r_f și de suprafața conică Σ_c cu vîrful în O (fig. 1). Se presupune că materialul din zonele I și III are

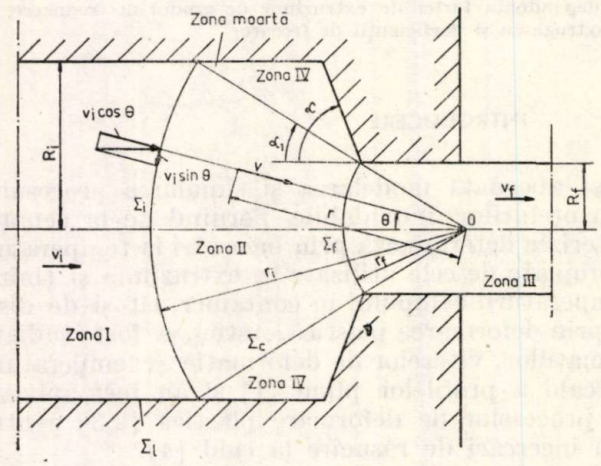


Fig. 1. — Cîmpul de viteze cinematic admisibil pentru extruziune.

o comportare rigidă: singura componentă nenulă a vitezei este cea pe direcția de extruziune, iar valorile constante ale acestei componente sînt notate cu v_i, respectiv v_f. Din condiția de incompresibilitate rezultă de asemenea

$$v_i = v_f(R_f/R_i)^2, \tag{1.1}$$

unde R_i este raza secțiunii transversale a containerului, iar R_f este raza secțiunii transversale a produsului finit.

Pentru descrierea deformației în matriță folosim coordonatele sferice (r, φ, θ) cu originea în O. Vectorul vitezei este notat cu $\mathbf{v}$, iar tensorul vitezei de deformație cu $\mathbf{D}$, legătura dintre componentele lor în coordonate sferice fiind dată de relațiile:

$$D_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad D_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}\right),$$

$$D_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right), \quad D_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, \tag{1.2}$$

$$D_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\right),$$

$$D_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta. \tag{1.2}$$

Condiția de incompresibilitate se exprimă prin

$$D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{\varphi\varphi} = 0. \tag{1.3}$$

Vom presupune după Avitzur [5] că în zona II viteza este dirijată către vîrful O al conului, pe direcție radială, componentele sale fiind date de

$$v_r = -v = -v_i\, r_i^2\, \frac{\cos\theta}{r^2}, \qquad v_\theta = v_\varphi = 0, \tag{1.4}$$

unde v este mărimea vectorului vitezei. Introducînd (1.4) în (1.2) deducem că singurele componente nenule ale tensorului vitezei de deformație sînt

$$D_{rr} = -2\,D_{\varphi\varphi} = -2D_{\theta\theta} = 2v_i\, r_i^2\, \frac{\cos\theta}{r^3},$$

$$D_{r\theta} = D_{\theta r} = \frac{1}{2}\, v_i\, r_i^2\, \frac{\sin\theta}{r^3}. \tag{1.5}$$

Se verifică ușor că (1.4) și (1.5) satisfac condițiile la limită pe frontiera matriței și condiția de incompresibilitate (1.3) și deci reprezintă efectiv cîmpuri cinematic admisibile.

Intensitatea tensorului vitezei de deformație, denumită și *viteză de deformație echivalentă*, este dată de

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{(2/3)\ \mathbf{D}\cdot\mathbf{D}}$$

sau încă, în coordonate sferice,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(D_{rr} - D_{\theta\theta})^2 + (D_{\theta\theta} - D_{\varphi\varphi})^2 + (D_{\varphi\varphi} - D_{rr})^2 + 6(D_{r\theta}^2 + D_{\theta\varphi}^2 + D_{r\varphi}^2)}. \tag{1.6}$$

Introducînd (1.5) în (1.6) obținem

$$\dot{\varepsilon} = 2\, v_i\, r_i^2\, \frac{1}{r^3}\sqrt{1 - \frac{11}{12}\sin^2\theta}. \tag{1.7}$$

Intensitatea deformației sau *deformația echivalentă* este definită prin

$$\varepsilon = \int_{t_i}^{t} \dot{\varepsilon}\, dt, \tag{1.8}$$

unde t_i este momentul intrării materialului în matriță prin suprafața Σ_i, moment la care materialul se presupune nedeformat ($\varepsilon = 0$). Pe de altă parte, ținînd seama de (1.4), avem

$$dt = -\frac{dr}{v} = -\frac{r^2\, dr}{v_i r_i^2 \cos\theta} \tag{1.9}$$

și deci (1.8) poate fi scrisă sub forma

$$\varepsilon = \int_r^{r_i} \frac{\dot{\varepsilon}\, r^2\, dr}{v_i\, r_i^2 \cos\theta},$$

de unde rezultă, folosind (1.7), că

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{1 - \frac{11}{12}\sin^2\theta}}{\cos\theta} \ln\frac{r_i}{r}. \tag{1.10}$$

Deformația echivalentă finală, la ieșirea din matriță, este

$$\varepsilon_f = \frac{2\sqrt{1 - \frac{11}{12}\sin^2\theta}}{\cos\theta} \ln\frac{r_i}{r_f}. \tag{1.11}$$

În ceea ce privește suprafețele Σ_i și Σ_f, Avitzur [5] presupune că prin aceste suprafețe componenta normală a vitezei rămîne continuă, pe cînd cea tangențială suferă salturile

$$\Delta v_i = v_i \sin\theta \text{ pe } \Sigma_i, \quad \Delta v_f = v_f \sin\theta \text{ pe } \Sigma_f. \tag{1.12}$$

În [1] a fost adoptată o ipoteză mai apropiată de realitate. Anume, s-a presupus vă v_θ descrește liniar de la $v_i \sin\theta$ la 0 într-un mic interval de timp t^* după intrarea în matriță. În cele ce urmează vom exprima acestă ipoteză în variabilele spațiale, r, θ, întrucît cîmpul de viteze în matriță este presupus staționar. Anume, vom admite că v_θ variază liniar în raport cu r de la valoarea $v_i \sin\theta$ pentru $r = r_i$ la valoarea 0 pentru $r = r^*$, adică

$$v_\theta = v_i \left(1 - \frac{r - r_i}{r^* - r_i}\right) \sin\theta, \qquad r \in [r^*, r_i]. \tag{1.13}$$

Introducînd (1.13) și $(1.4)_1$ în $(1.2)_2$ obținem

$$D_{r\theta} = \frac{v_i \sin\theta}{2}\left[\frac{r_i^2}{r^3} + \frac{r^*}{r(r_i - r^*)}\right]. \tag{1.14}$$

Neglijînd celelalte componente ale lui **D** în raport cu $D_{r\theta}$ în regiunea de tranziție adiacentă lui Σ_i obținem, folosind succesiv (1.8), (1.9) și (1.6), saltul $\Delta\varepsilon_i$ al deformației echivalente prin suprafața Σ_i:

$$\Delta\varepsilon_i = \lim_{t^*\to 0}\int_{t_i}^{t_i+t^*} \dot{\varepsilon}\,dt = \lim_{r^*\to r_i}\int_{r^*}^{r_i} \frac{\dot{\varepsilon}\,r^2\,dr}{v_i\,r_i^2\cos\theta} =$$

$$= \frac{2}{v_i\,r_i^2\sqrt{3}\cos\theta}\lim_{r^*\to r_i}\int_{r^*}^{r_i} D_{r\theta}\,r^2\,dr,$$

de unde rezultă, în baza relației (1.14),

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\theta. \tag{1.15}$$

Acest rezultat arată că saltul deformației echivalente nu depinde de r și t și deci saltul $\Delta\varepsilon_f$ prin suprafața Σ_f este egal cu $\Delta\varepsilon_i$, fiind dat tot de relația (1.15).

În zona IV, denumită zonă moartă, materialul este în repaus; existența acestei regiuni depinde de geometria matriței și de frecarea dintre calup și matriță.

2. ECUAȚIILE CONSTITUTIVE

În cele ce urmează neglijăm deformația și viteza de deformație elastică; în particular, admitem că tensorul vitezei de deformație vîscoplastică coincide cu tensorul vitezei (totale) de deformație **D**. În acest caz ecuația constitutivă a materialelor vîscoplastice izotrope se scrie sub forma

$$\mathbf{S} = \frac{2}{3}\frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}\mathbf{D}, \tag{2.1}$$

unde **S** este deviatorul tensorului tensiunii, iar σ este *intensitatea tensiunii*, denumită și *tensiune echivalentă*, definită prin

$$\sigma = \sqrt{(3/2)\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}}, \tag{2.2}$$

sau încă, în coordonate sferice,

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(S_{rr}-S_{\theta\theta})^2+(S_{\theta\theta}-S_{\varphi\varphi})^2+(S_{\varphi\varphi}-S_{rr})^2+6(S_{r\theta}^2+S_{\theta\varphi}^2+S_{r\varphi}^2)}. \tag{2.3}$$

Tensiunea echivalentă σ depinde în general de deformația echivalentă ε, de viteza de deformație echivalentă $\dot{\varepsilon}$ și de temperatura T, adică

$$\sigma = \sigma(\varepsilon,\ \dot{\varepsilon},\ T).$$

Această dependenţă poate fi determinată experimental folosind încercări unidimensionale, de exemplu încercarea de răsucire la cald.

În lucrarea de faţă vom folosi pentru ilustrare ecuaţia constitutivă a oţelului inoxidabil AISI 316L determinată în [6] pentru viteze de deformaţie cuprinse între 0,007 s^{-1} şi 5,44 s^{-1} şi temperaturi între 800°C şi 1200°C şi anume

$$\sigma = \begin{cases} [a + c(1 - e^{-n\varepsilon})] \operatorname{argsh} (Z/2b) & \text{pentru } Z \leqslant Z_l, \\ \sigma_l^* + c(1 - e^{-n\varepsilon}) \operatorname{argsh} (Z/2b) & \text{pentru } Z > Z_l, \end{cases} \tag{2.4}$$

unde

$$Z = \dot{\varepsilon} \exp (Q/RT) \tag{2.5}$$

este parametrul Zener-Hollomon, $R = 8{,}314$ J/K mol este constanta gazelor perfecte, T este temperatura absolută,

$$\begin{aligned} &Q = 499 \text{ kJ/mol}, \qquad n = 3{,}86, \qquad b = e^{36{,}23} \text{ s}^{-1}, \\ &a = 10{,}07 \text{ MPa}, \qquad c = 11{,}13 \text{ MPa}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

iar

$$Z_l = e^{48{,}08} \text{ s}^{-1}, \qquad \sigma_l^* = 121{,}24 \text{ MPa} \tag{2.7}$$

sînt valori ce definesc tranziţia de la regimul de curgere termic activat la cel atermic.

Lucrul mecanic de deformare plastică efectuat pe unitatea de volum şi timp este

$$w = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}, \tag{2.8}$$

sau încă, ţinînd seama de (2.1),

$$w = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = \sigma \dot{\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Prin urmare, lucrul mecanic de deformare efectuat pe unitatea de volum pînă la un moment curent t este

$$L(t) = \int_{t_i}^{t} w \, \mathrm{d}t = \int_{t_i}^{t} \sigma \dot{\varepsilon} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, \mathrm{d}\, \varepsilon. \tag{2.10}$$

Contribuţia ΔL_i la lucrul mecanic de deformare al componentei $D_{r\theta}$, calculat pe unitatea de volum ce traversează suprafaţa Σ_i, poate fi evaluată cu formula

$$\Delta L_i = \int_0^{\Delta \varepsilon_i} \sigma \mathrm{d}\, \varepsilon = \sigma_l^* \Delta \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_l^* \operatorname{tg} \theta. \tag{2.11}$$

În deducerea acestei formule s-a ţinut seama că intervalul de timp t^* este foarte mic şi deci ε este de asemenea foarte mic, pe cînd $\dot{\varepsilon}$ şi implicit Z iau valori foarte mari. Ca urmare, σ a fost înlocuit în (2.11) prin valoarea sa limită σ_l^*.

Un raționament similar conduce pentru lucrul mecanic de deformare suplimentar corespunzător componentei $D_{r\theta}$, calculat pe unitatea de volum ce traversează suprafața Σ_f, la expresia

$$\Delta L_f = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_f \operatorname{tg} \theta, \tag{2.12}$$

unde

$$\sigma_f = \sigma_i^* + c(1 - e^{-n\varepsilon_f}) \operatorname{argsh} (Z_f/2b), \tag{2.13}$$

ε_f este dat de (1.11), iar Z_f este valoarea parametrului Zener-Hollomon pe suprafața Σ_f.

3. ANALIZA REGIMULUI TERMIC

Hughes și Sellars [7] au întreprins o cercetare amănunțită asupra evoluției cîmpului termic în timpul extruziunii la cald, stabilind un bilanț precis între căldura cedată de calup atmosferei înconjurătoare, containerului și matriței pe de o parte și căldura rezultată prin disiparea lucrului mecanic de deformare plastică pe de altă parte. Experimentările au fost efectuate pe un calup cu diametrul $2R_i = 76{,}2$ mm și o lungime de 203,2 mm, prelucrat dintr-o bară laminată din oțel carbon cu 0,16 % C. Calupul a fost încălzit într-un cuptor electric la 1170°C, fiind menținut timp de o oră pentru uniformizarea temperaturii pe secțiune; containerul a fost menținut la temperatura constantă de 300°C pe tot timpul extruziunii. Timpul total de transfer de la scoaterea din cuptor pînă la începerea presării a fost $t_t = 15$ s, fiind compus din 7s de la scoaterea din cuptor pînă la introducerea în cotainer și 8s pentru apropierea pistonului și presarea inițială pînă la începerea extruziunii. În figura 2 este reprezentată distribuția temperaturii în calup înainte de intrarea în matriță, în funcție de timpul măsurat de la scoaterea din cuptor și de poziția relativă pe secțiunea calupului, R/R_i, unde R este distanța de la un punct curent al calupului la axa acestuia. Punctele experimentale corespund pozițiilor termocuplelor în interiorul calupului.

Întrucît nu dispunem de rezultate experimentale proprii privind distribuția temperaturii în calup vom folosi diagramele din figura 2 pentru estimarea temperaturii de intrare în matriță, pe care o vom nota cu $T_i(R,\ t_i)$.

Întrucît viteza de deformație la extruziune este de ordinul 1 — 100 s^{-1} se poate admite că procesul de deformare plastică decurge adiabatic, astfel încît fiecare element de volum se încălzește pe seama lucrului mecanic efectuat pentru deformarea sa, iar schimbul de căldură între diferite elemente de volum este neglijabil.

În zona de variație rapidă a componentei v_θ a vitezei, în vecinătatea suprafeței Σ_i, are loc o încălzire a materialului datorită lucrului mecanic ΔL_i. Ca urmare, temperatura după parcurgerea acestei zone va fi

$$\tilde{T}_i(t_i, \theta) = T_i(r_i \sin \theta,\ t_i) + \frac{\Delta L_i}{\rho c_v}, \tag{3.1}$$

unde ρ este densitatea materialului, iar c_v este căldura specifică la volum constant.

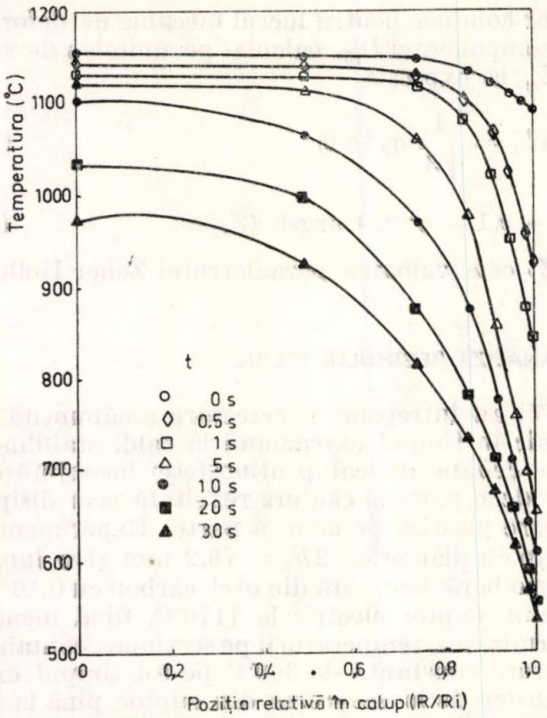


Fig. 2. — Variația radială a temperaturii în calup înaintea intrării în matriță, la diferite intervale de timp după scoaterea din cuptor (după Hughes și Sellars [7])

În continuare, încălzirea adiabatică a fiecărui element de volum este descrisă de ecuația diferențială

$$\rho c_v \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sigma \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}. \tag{3.2}$$

Pe de altă parte, conform ipotezei cinematice admise, fiecare particulă se deplasează în matriță de-a lungul unei linii $\theta = \text{const.}$, pe care t poate fi înlocuit prin r. Mai precis, avem

$$\rho c_v \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \sigma \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}r},$$

iar din (1.10) rezultă

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}r} = -\frac{2\sqrt{1 - \frac{11}{12}\sin^2\theta}}{\cos\theta}\frac{1}{r},$$

astfel încît temperatura $T(r, \theta_0)$ a unei particule ce se deplasează pe linia $\theta = \theta_0$ trebuie să satisfacă ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{2\sigma\sqrt{1 - \frac{11}{12}\sin^2\theta_0}}{\rho c_v r \cos\theta_0} \quad \text{pentru} \quad r \in [r_i, r_f], \tag{3.3}$$

cu condiția inițială

$$T(r_i, \theta_0) = \tilde{T}(t_i, \theta_0). \tag{3.4}$$

Trebuie remarcat că în (3.3) tensiunea echivalentă σ depinde de r și θ_0 prin intermediul lui ε, $\dot{\varepsilon}$ și T. De aceea integrarea ecuației diferențiale se va face prin metoda lui Euler, folosind o schemă asemănătoare cu cea descrisă în [1], dar luînd ca variabilă independentă pe r în locul lui ε.

Temperatura finală a produsului la ieșirea din matriță este dată de relația

$$T_f(\theta) = T(r_f, \theta) + \frac{\Delta L_f}{\rho c_v}, \tag{3.5}$$

în care primul termen din membrul drept rezultă din ecuația diferențială (3.3), iar al doilea termen din (2.12). În continuare produsul se răcește liber în aer.

Pentru calculul variației forței de extruziune ne interesează soluția ecuației diferențiale (3.3) cu condiția inițială (3.4), soluție care va fi dată în § 5.

4. FORȚELE DE FRECARE

Întrucît presiunea de contact dintre calup și container este relativ scăzută, forța de frecare este determinată de frecarea coulombiană dintre calup și container. Putem scrie astfel

$$\tau = \mu p_n, \tag{4.1}$$

unde μ este coeficientul de frecare coulombiană, τ este tensiunea tangențială la suprafața de contact, iar p_n este presiunea de contact.

Deoarece am presupus că în zona I materialul este rigid, deci $\mathbf{D} = \mathbf{S} = \mathbf{0}$, starea de tensiune se reduce la o presiune hidrostatică p și avem $p_n = p$. Notăm cu x distanța unei secțiuni curente a calupului față de secțiunea de intrare în matriță. Echilibrul static al porțiunii din calup cuprinse între planele x și $x + \mathrm{d}x$ conduce la ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{2\mu p(x)}{R_i}, \qquad x \in [0, l_i]. \tag{4.2}$$

Notînd cu p_0 presiunea la intrarea în matriță și impunînd condiția $p(0) = p_0$, obținem din (4.2) soluția

$$p(x) = p_0 \, \mathrm{e}^{2\mu x/R_i}. \tag{4.3}$$

La momentul t, pistonul se află la distanța

$$l = l_i - (t - t_i) \, v_i,$$

iar presiunea pe piston p_0^* este

$$p_0^* = p(l) \, p_0 \, \mathrm{e}^{2\mu l/R_i}, \tag{4.4}$$

sau încă

$$p_0^*(t) = p_0(t)\ \mathrm{e}^{2\mu[l_i-(t-t_i)v_i]/R_i}. \tag{4.5}$$

Formula (4.5) permite și determinarea experimentală a coeficientului μ, măsurînd forțele de extruziune F_1 și F_2 necesare pentru a extruda calupuri de același diametru $2R_i$ și cu aceeași viteză de extruziune v_i, dar cu lungimi inițiale diferite l_1 și l_2. Ținînd seama că forța de extruziune este

$$F(t) = \pi R_i^2 p_0^*(t), \tag{4.6}$$

obținem din (4.5)

$$\mu = \frac{R_i}{2(L_1 - L_2)} \ln \frac{F_1}{F_2}. \tag{4.7}$$

Pe suprafața de contact dintre matriță și materialul extrudat presiunile normale sînt mult mai mari, așa încît deplasarea relativă se produce preponderent prin lunecarea vîscoplastică în interiorul materialului supus deformării. Vom adopta de aceea pentru frecarea pe suprafața matriței, respectiv pe suprafața Σ_c care separă zonele II și IV, o lege de forma

$$\tau = \frac{m\sigma}{\sqrt{3}}, \tag{4.8}$$

unde $m \in [0, 1]$ este un coeficient de frecare vîscoplastică, iar $\sigma/\sqrt{3}$ este tensiunea tangențială echivalentă.

5. BILANȚUL PUTERII

Așa cum am arătat în introducere, vom estima forța de extruziune egalînd la fiecare moment t puterea $\mathscr{P}$ dezvoltată de piston cu puterea disipată totală $\mathscr{P}_{tot}$, compusă din puterea $\mathscr{P}_d$ necesară pentru deformarea materialului, puterile $\mathscr{P}_i$ și $\mathscr{P}_f$ determinate de lucrul mecanic efectuat la traversarea suprafețelor Σ_i și Σ_f și din puterile $\mathscr{P}_l$ și $\mathscr{P}_c$ necesare pentru învingerea forțelor de frecare pe suprafețele Σ_l și Σ_c. Astfel

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_d + \mathscr{P}_i + \mathscr{P}_f + \mathscr{P}_l + \mathscr{P}_c. \tag{5.1}$$

Puterea dezvoltată de piston este

$$\mathscr{P} = \pi R_i^2 v_i p_0^*. \tag{5.2}$$

Puterea disipată pe suprafața Σ_l a containerului este

$$\mathscr{P}_l = 2\pi R_i v_i \int_0^l \tau(x)\, \mathrm{d}x = 2\pi R_i v_i \mu \int_0^l p(x)\, \mathrm{d}x.$$

Ținînd seama de (4.3) și (4.4) obținem succesiv

$$\mathscr{P}_l = 2\pi R_i v_i \mu p_0 \int_0^l e^{2\mu x/R_i} dx = \pi R_i^2 v_i p_0 (e^{2\mu l/R_i} - 1) =$$

$$= \pi R_i^2 v_i (p_0^* - p_0). \tag{5.3}$$

Introducînd (5.2) și (5.3) în (5.1) găsim

$$\pi R_i^2 v_i p_0 = \mathscr{P}_a + \mathscr{P}_i + \mathscr{P}_f + \mathscr{P}_c. \tag{5.4}$$

După determinarea variației lui p_0 din această ecuație, variația forței de extruziune F este dată de relațiile (4.5) și (4.6) sub forma

$$F = \pi R_i^2 p_0 e^{2\mu[l_i - (t-t_i)v_i]/R_i}. \tag{5.5}$$

Puterea disipată pentru deformare este

$$\mathscr{P}_a = \int_V \sigma \dot{\varepsilon} \, dV = 2\pi \int_0^{\alpha_1} d\theta \int_{r_f}^{r_i} \sigma \dot{\varepsilon} \, r^2 \sin\theta \, dr, \tag{5.6}$$

unde V este domeniul zonei II.

Puterea disipată la traversarea suprafeței Σ_i este

$$\mathscr{P}_i = \int_{\Sigma_i} v_i \cos\theta \, \Delta L_i \, ds = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} r_i^2 v_i \sigma_i^* \int_0^{\alpha_1} \sin^2\theta \, d\theta,$$

sau încă

$$\mathscr{P}_i = \frac{\pi}{\sqrt{3}} r_i^2 v_i \sigma_i^* \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1\right). \tag{5.7}$$

Puterea disipată la traversarea suprafeței Σ_f este

$$\mathscr{P}_f = \int_{\Sigma_f} v_f \cos\theta \, \Delta L_f \, ds = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} r_f^2 v_f \int_0^{\alpha_1} \sigma_f(\theta) \sin\theta \, d\theta,$$

sau încă, ținînd seama de (1.1) și (2.13),

$$\mathscr{P}_f = \mathscr{P}_i + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} r_i^2 v_i c \int_0^{\alpha_1} (1 - e^{-n\varepsilon_f(\theta)} \operatorname{argsh}(Z_f(\theta)/2b) d\theta. \tag{5.8}$$

Puterea disipată pe suprafața Σ_c este

$$\mathscr{P}_c = \int_{\Sigma_c} \tau v \, ds = \frac{2\pi m}{\sqrt{3}} \int_{r_f}^{r_i} \sigma v r \sin\alpha_1 \, dr,$$

de unde rezultă, ţinînd seama de (1.4),

$$\mathscr{P}_c = \frac{\pi}{\sqrt{3}} m r_i^2 v_i \sin 2\alpha_1 \int_{r_f}^{r_i} \frac{\sigma}{r}\, dr. \tag{5.9}$$

Integralele care intervin în expresiile lui $\mathscr{P}_d$, $\mathscr{P}_f$ şi $\mathscr{P}_c$ vor fi calculate numeric, folosind o discretizare temporală, ţinînd seama că

$$(r, \theta, t) \in [r_f, r_i] \times [0, \alpha_1] \times [t_i, t_i + l_i/v_i].$$

Anume, vom împărţi intervalele de variaţie ale lui r, θ şi t în cîte $K-1$, $M-1$, respectiv $P-1$ părţi egale, prin punctele de diviziune

$$r_k = r_1 + (k-1)\,\Delta r,\ r_1 = r_f,\ \Delta r = \frac{r_i - r_f}{K-1},\ k = 1, \ldots, K,$$

$$\theta_m = \theta_1 + (m-1)\,\Delta\theta,\ \theta_1 = 0,\ \Delta\theta = \frac{\alpha_1}{M-1},\ m = 1, \ldots, M, \tag{5.10}$$

$$t_p = t_1 + (p-1)\,\Delta t,\ t_1 = t_i,\ \Delta t = \frac{l_i}{v_i(P-1)},\ p = 1, \ldots, P.$$

Pentru determinarea temperaturii $T(r_k, \theta_m, t_p)$ a particulei situate la momentul t_p în punctul de coordonate (r_k, θ_m) din secţiunea matriţei, calculăm mai întîi momentul t_i în care această particulă a traversat suprafaţa Σ_i. Din (1.9) obţinem prin integrare pentru $\theta = \theta_m$,

$$t_p - t_i = -\frac{1}{r_i^2 v_i \cos\theta_m} \int_{r_i}^{r_k} r^2\, dr,$$

de unde rezultă

$$t_i = t_i(r_k, \theta_m, t_p) = t_p - \frac{r_i^3 - r_k^3}{3 r_i^2 v_i \cos\theta_m}. \tag{5.11}$$

Ecuaţia diferenţială (3.3) poate fi integrată acum utilizînd discretizarea $(5.10)_1$ şi relaţia de recurenţă

$$T(r_s, \theta_m, t_p) = T(r_{s+1}, \theta_m, t_p) - \sigma_{s+1} \frac{2\sqrt{1 - \frac{11}{12}\sin^2\theta_m}}{\cos\theta_m} \frac{1}{\rho c_v} \frac{\Delta r}{r_{s+1}}, \tag{5.12}$$

pentru $s = K-1, \ldots, k$, cu condiţia iniţială

$$T(r_K, \theta_m, t_p) = \tilde{T}_i(t_i, \theta_m), \tag{5.13}$$

unde am notat

$$\sigma_s = \sigma(\varepsilon(r_s, \theta_m), \dot{\varepsilon}(r_s, \theta_m), T(r_s, \theta_m, t_p)), \tag{5.14}$$

în care $\varepsilon(r, \theta)$ și $\dot{\varepsilon}(r, \theta)$ sînt dați de (1.10), respectiv (1.7). Rezultă astfel distribuția de temperatură $T(r_k, \theta_m, t_p)$ la momentul t_p în focarul de deformare, distribuție care este necesară pentru determinarea lui σ, adică a rezistenței la deformare a materialului extrudat.

Mai departe, folosind discretizarea (5.10) putem evalua puterea $\mathscr{P}_d$ din (5.6) prin formula

$$\mathscr{P}_d(t_p) = 2\pi \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{m=1}^{M-1} f(r_k, \theta_m, t_p)\, \Delta r\, \Delta\theta, \tag{5.15}$$

unde

$$f(r_k, \theta_m, t_p) = \sigma(\varepsilon(r_k, \theta_m), \dot{\varepsilon}(r_k, \theta_m), T(r_k, \theta_m, t_p))\, \dot{\varepsilon}(r_k, \theta_m)\, r_k^2 \sin\theta_m. \tag{5.16}$$

Analog, utilizînd $(5.10)_2$, obținem din (5.8) pentru $\mathscr{P}_f$

$$\mathscr{P}_f(t_p) = \mathscr{P}_i + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} r_i^2 v_i c \sum_{m=1}^{M-1} g(\theta_m, t_p)\, \Delta\theta, \tag{5.17}$$

unde

$$g(\theta_m, t_p) = [1 - e^{-n\varepsilon_f(\theta_m)}]\ \text{argsh}\ (Z_f(\theta_m, t_p)/2b), \tag{5.18}$$

$$Z_f(\theta_m, t_p) = \dot{\varepsilon}(r_f, \theta_m)\ \exp \frac{Q}{RT(r_f, \theta_m, t_p)}. \tag{5.19}$$

În sfîrșit, folosind $(5.10)_1$, rezultă din (5.9)

$$\mathscr{P}_c(t_p) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} m r_i^2 v_i \sin 2\alpha_1 \sum_{k=1}^{K-1} \frac{h(r_k, t_p)}{r_k}\, \Delta r, \tag{5.20}$$

unde

$$h(r_k, t_p) = \sigma(\varepsilon(r_k\, \alpha_1), \dot{\varepsilon}(r_k, \alpha_1)\, T(r_k, \alpha_1, t_p)). \tag{5.21}$$

6. REZULTATE NUMERICE

Pentru calculul componentelor puterii disipate precum și al forței de extruziune, a fost elaborat un program de calcul în limbaj FORTRAN. A fost studiată influența pe care o au asupra forței de extruziune următorii parametri: gradul de reducere R_f/R_i, semiunghiul matriței α, viteza de extruziune v_i și coeficienții de frecare μ și m, păstrîndu-se constante valorile temperaturii de scoatere din cuptor de 1170°C, timpului de transfer $t_t = 15$ s, razei containerului $R_i = 0{,}075$ m, lungimii inițiale a calupului $l_i = 0{,}6$ m, precum și ecuația constitutivă a materialului extrudat (oțelul inoxidabil AISI 316L). S-a luat densitatea $\rho = 7860$ kg/m^3 și căldura specifică la volum constant $c_v = 670$ J/kgK la 1100°C.

Varianta de bază studiată corespunde următoarelor valori ale parametrilor (fig. 3):

$$R_f = 0{,}019\ \text{m},\ \alpha = 70°20',\quad v_i = 0{,}15\ \text{m/s},\ \mu = 0{,}005,\ m = 0{,}8.$$

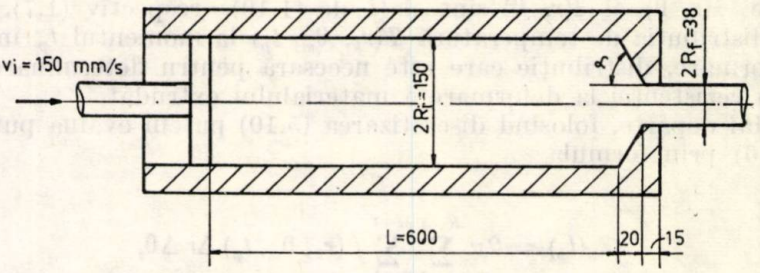


Fig. 3. — Geometria containerului și a matriței.

Au fost considerate de asemenea combinații ale parametrilor rezultate modificînd pe rînd cîte un parametru din combinația de bază, după cum urmează:

$$R_f = 0{,}00475\,;\ 0{,}0095\,;\ 0{,}0190\,;\ 0{,}0375 \text{ m},$$

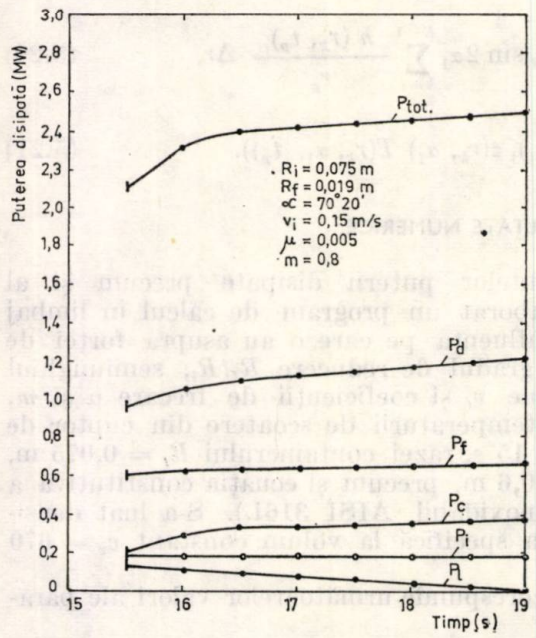
$$\alpha = 55°\,;\ 60°\,;\ 65°\,;\ 70°20'\,;\ 75°\,;\ 77°30',\ 80°,\ 82°30',\ 85°,\ 87°30'.$$

$$v_i = 0{,}05\,;\ 0{,}10\,;\ 0{,}15 \text{ m/s},$$

$$\mu = 0{,}005\,;\ 0{,}010\,;\ 0{,}015,$$

$$m = 0{,}2\,;\ 0{,}4\,;\ 0{,}6\,;\ 0{,}8\,;\ 1.$$

Utilizînd estimări ale lui Avitzur [5] s-a apreciat că în toate cazurile studiate zona moartă este absentă, astfel încît s-a luat $\alpha_1 = \alpha$.



Variația componentelor puterii disipate.

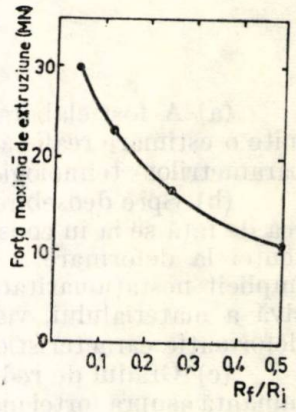
Ca moment de începere a regimului staționar de viteze a fost considerat $t_i + t_d$, unde t_d este timpul în care întreaga secțiune frontală a calupului parcurge focarul de deformare. Din (1.9) rezultă prin integrare pentru $\theta = \alpha_1$, $r \in [r_i, r_f]$, $t \in [t_i, t_i + t_d]$:

$$t_d = \frac{r_i^3 - r_f^3}{3r_i^2 v_i \cos \alpha_1} = \frac{2R_i[1 - (R_f/R_i)^3]}{3v_i \sin 2\alpha_1}. \tag{6.1}$$

Pentru toate combinațiile studiate au rezultat valori ale lui t_d de aproximativ 0,5 s, cu excepția variantelor cu $v_i = 0{,}10$ m/s și $v_i = 0{,}05$ m/s, pentru care a rezultat $t_d = 0{,}77$ s, respectiv $t_d = 1{,}54$ s.

Trebuie menționat că intervalul de staționaritate a cîmpului de viteze este mai mic decît $[t_t + t_d, t_t + l_i/v_i]$, datorită neuniformității cîmpurilor de deformație la începutul și sfîrșitul extruziunii.

În figura 4 este reprezentată variația în timp a puterii disipate totale și a componentelor ei pentru varianta de bază. Momentul $t_t + t_d$ este marcat pe diagrame prin cîte o linie verticală. Se observă că puterea utilizată pentru deformarea materialului reprezintă în acest caz circa 54% din puterea disipată totală. Puterile $\mathcal{P}_{tot}$, $\mathcal{P}_d$, $\mathcal{P}_c$ și $\mathcal{P}_f$ cresc monoton datorită intrării în matriță a unui material din ce în ce mai rece, $\mathcal{P}_i$ este constantă, pe cînd $\mathcal{P}_l$ descrește monoton pînă la zero pe măsura micșorării suprafeței de contact dintre calup și container.



În figura 5 este reprezentată influența principalilor parametri asupra valorii forței maxime de extruziune. Se constată că influența cea mai importantă asupra acestei valori o au gradul de reducere și semiunghiul matriței. Anume, creșterea gradului de reducere R_f/R_i de la 0,063 la 0,5 produce o scădere a forței maxime de extruziune de la 29,77 la 10,82 MN; creșterea semiunghiului matriței de la 55° la 75° are drept urmare scăderea forței

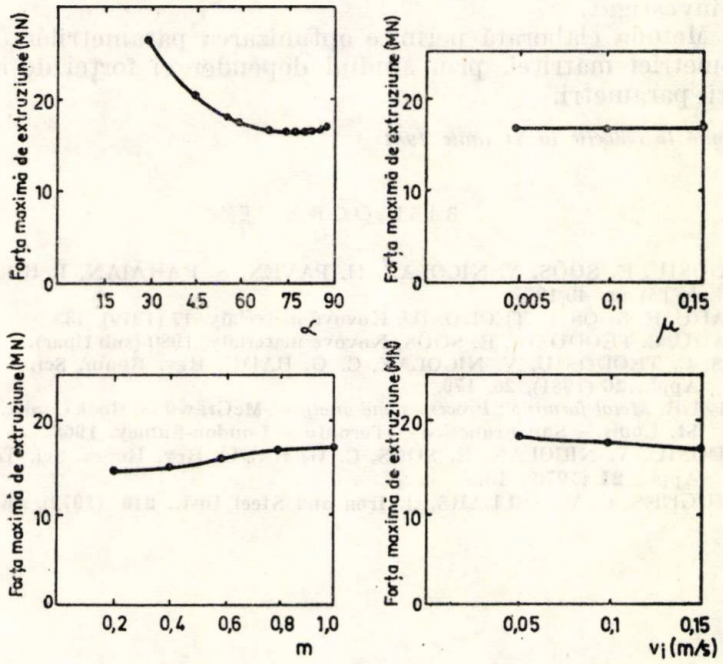


Fig. 5. — Influența parametrilor R_f/R_i, α, μ, m și v_i asupra valorii forței maxime de extruziune.

maxime de extruziune de la 18,30 la 16,50 MN, după care forța crește pînă la 17 MN, pe măsura creșterii semiunghiului matriței pînă la 85°. Viteza de extruziune și coeficienții de frecare au o influență relativ redusă asupra forței de extruziune. Astfel, creșterea lui v_t de 3 ori (de la 0,05 la 0,15 m/s) conduce la scăderea forței maxime de extruziune de la 18,60 la 16,70 MN, variația lui μ de la 0,005 la 0,015 lasă practic neschimbată forța maximă de extruziune, iar creșterea lui m de 5 ori (de la 0,2 la 1) produce o creștere a forței maxime de extruziune de la 14,70 la 17,40 MN.

7. CONCLUZII

(a) A fost elaborat un model original al extrudării la cald, care permite o estimare realistă a forțelor de extruziune și studiul influenței parametrilor tehnologici asupra forței maxime de extruziune.

(b) Spre deosebire de alte modele disponibile în literatură, în lucrarea de față se ia în considerare variația în timp a temperaturii și a rezistenței la deformare a materialului ce intră în focarul de deformare și implicit nestaționaritatea procesului. Se ține seama de ecuația constitutivă a materialului, valabilă pentru regimuri de temperaturi și viteze de deformație caracteristice extrudării la cald.

(c) Gradul de reducere și semiunghiul matriței au o influență determinantă asupra forței maxime de extruziune, pe cînd viteza de extruziune și coeficienții de frecare au o influență redusă, cel puțin în domeniul de variație investigat.

(d) Metoda elaborată permite optimizarea parametrilor tehnologici și a geometriei matriței, prin studiul dependenței forței de extruziune de acești parametri.

Primită la redacție la 24 iunie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. C. TEODOSIU, E. SOÓS, V. NICOLAE, H. PAVEN, S. PĂRĂIAN, I. ROȘU, Contract IFTM nr. 40/1977.
2. C. G. RADU, E. SOÓS, C. TEODOSIU, Kovové materialy, **17** (1979), 433.
3. C. G. RADU, C. TEODOSIU, E. SOÓS, Kovové materialy, 1980 (sub tipar).
4. E. SOÓS, C. TEODOSIU, V. NICOLAE, C. G. RADU, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **26** (1981), 26, 179.
5. B. AVITZUR, *Metal forming : Processes and analysis*, McGraw-Hill Book Comp., New York — St. Louis — San Francisco — Toronto — London-Sidney, 1968.
6. C. TEODOSIU, V. NICOLAE, E. SOÓS, C. G. RADU, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **24** (1979), 13.
7. K. E. HUGHES, C. M. SELLARS, J. Iron and Steel Inst., **210** (1972), 661.

E Carafoli

CU PRILEJUL ANIVERSĂRII ACADEMICIANULUI ELIE CARAFOLI

Profesorul Elie Carafoli, membru titular și președinte al Secției de științe tehnice a Academiei Republicii Socialiste România, redactor șef al revistelor noastre, și-a serbat de curînd a 80-a aniversare.

Născut la 15 septembrie 1901 la Veria, în apropiere de Salonic, Elie Carafoli face parte dintr-o familie de români care a jucat un rol important în viața culturală a comunității lor din acea regiune, mai mulți membri ai familiei sale ilustrîndu-se prin activități în care au adus contribuții cu totul remarcabile.

După ce a terminat școala primară română în orașul său natal și-a continuat studiile la școala secundară românească din Salonic, absolvind primele trei clase cu deosebit succes; dar împrejurările neobișnuite create de începerea primului război mondial l-au pus în fața unor greutăți și piedici considerabile pentru vîrsta sa. În cele din urmă, cu o dîrzenie și un curaj ieșite din comun a întreprins o călătorie plină de dificultăți prin ținuturi bîntuite de război, de multe ori în apropierea frontului, pentru a-și duce la îndeplinire hotărîrea de a veni în România. Ajuns la București la începutul anului 1916 și-a terminat studiile secundare într-unul din cele mai bune licee din țară, urmînd după aceea cursurile Școlii politehnice din București, unde a obținut în anul 1924 diploma de inginer electromecanic.

Pentru a-și valorifica în modul cel mai corespunzător calitățile pe care studiile sale le scoseseră în evidență, Elie Carafoli și-a desăvîrșit educația științifică la Paris. Acolo a obținut mai întîi licența în științele fizico-matematice, iar în anul 1928 și-a susținut cu deplin succes teza de doctorat, obținînd titlul de doctor în științele fizice.

Perioada șederii sale la Paris, centru științific de o deosebită importanță, a fost foarte fructuoasă pentru tînărul Elie Carafoli, care a început acolo o carieră științifică, pe care a continuat-o cu strălucire timp de peste o jumătate de veac pînă în prezent cu rezultate ce i-au adus un prestigiu bine meritat, situîndu-l printre cei mai de seamă specialiști din domeniul aerodinamicii și mecanicii fluidelor.

Lucrînd la Institutul aerotehnic de la Saint-Cyr, care pe vremea aceea aparținea Sorbonei, Elie Carafoli a fost colaboratorul apropiat al profesorului Albert Toussaint, directorul Institutului, executînd singur, sau în colaborare cu acesta, numeroase lucrări științifice, tehnice sau experimentale. De asemenea, a avut și o activitate didactică fiind asistent la catedra de mecanica fluidelor de la Sorbona, al cărui titular a fost profesorul Paul Painlevé, fost prim ministru al Franței.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 40, NR. 6, 1981, P. 885–904

Întors în țară la vîrsta de 27 de ani Elie Carafoli avea deci o reputație științifică bine stabilită și recunoscută prin mai multe distincții primite, fiind în același timp unul dintre primii specialiști români în aerodinamică.

În octombrie 1928 a inaugurat la Școala politehnică din București, pentru prima oară în învățămîntul superior din România, cursul de aerodinamică și mecanica avionului. Timp de 43 de ani Elie Carafoli a avut în calitate de profesor o activitate prestigioasă, fără îndoială una dintre cele mai prodigioase din învățămîntul tehnic superior din țara noastră. De numele său vor rămîne legate pentru totdeauna crearea și dezvoltarea secției de aviație, în prezent facultate la Institutul politehnic din București. Elie Carafoli a format numeroase generații de specialiști și printre foștii săi elevi se găsesc profesori, oameni de știință și ingineri de mare valoare, care au contribuit cu toții la rîndul lor la dezvoltarea științei și tehnicii în România, continuînd opera profesorului lor.

Sub directa sa conducere a fost înființat laboratorul de aerodinamică de la Politehnica din București. Sufleria acestui laborator, prima instalație de acest gen din sud-estul Europei, a servit la o activitate intensă de cercetări experimentale. O mențiune specială merită desigur experiențele sistematice asupra profilelor aerodinamice trasate după metodele lui Carafoli, dar nu trebuie să uităm în același timp că această suflerie a fost cea unde s-au efectuat încercările pe machete ale avioanelor prototip de concepție românească sau ale avioanelor străine modificate de specialiștii noștri.

În afara activității didactice pe care am amintit-o mai înainte și a activității științifice pe care o vom prezenta mai departe, Elie Carafoli, inginer de mare valoare, a avut și o activitate tehnică în domeniul construcției de avioane. Sub conducerea sa un grup de ingineri de înaltă calificare au conceput și realizat, cu începere din anul 1928, mai multe avioane, ca IAR-CV-11, IAR-14, IAR-15, IAR-16, etc., ale căror performanțe au fost remarcabile pe plan mondial; aceste avioane au fost printre primele cu aripă joasă, formulă nouă și îndrăzneață pentru acea epocă. În același timp, prin introducerea metodelor moderne de calcul, Elie Carafoli a obținut rezultate mai precise pentru rezistența structurii. De altfel, unul dintre aceste avioane a fost clasat primul dintre cele șase avioane considerate ca cele mai bune din Europa, la un concurs care a avut loc în 1931 la București.

În aceeași ordine de idei semnalăm activitatea sa industrială referitoare la crearea unei mari uzine numită „Industria română mecanică și chimică", cunoscută și sub numele de Mija, în apropiere de Ploiești.

O nouă etapă în activitatea sa s-a deschis în 1948, cînd profesorul Elie Carafoli, ales chiar în acel an membru titular al Academiei Republicii Socialiste România, a fost învestit cu misiunea de mare importanță de a asigura cercetarea științifică în domeniul mecanicii aplicate. Mai întîi în calitate de director al Institutului de mecanică aplicată, apoi ca director al Institutului de mecanica fluidelor și în cele din urmă ca director onorific al Institutului de mecanica fluidelor și construcții aerospațiale, a desfășurat timp de peste două decenii o activitate prodigioasă. Rezultatele obținute au fost cu atît mai remarcabile cu cît înaintea sa cercetările din acest domeniu nu fuseseră organizate în țara noastră, cele cîteva rezultate de valoare fiind datorate activității pline de succes, dar sporadice, a unor oameni

de știință. Elie Carafoli a reușit să depășească dificultățile datorate lipsei de tradiție, strîngînd în jurul său colaboratori tineri, cei mai mulți foști elevi ai săi, cărora le-a transmis entuziasmul pentru activitatea științifică. Datorită marii sale experiențe a adus o contribuție deosebită la depășirea rapidă a ezitărilor inerente oricărui început și nu peste mult timp rezultatele teoretice sau experimentale de valoare au început să devină din ce în ce mai numeroase. Elie Carafoli a format personal numeroși cercetători, creînd astfel o școală românească de aerodinamică recunoscută ca atare și în străinătate. Mai mult încă, a știut să trezească interesul unora dintre colaboratorii săi pentru alte domenii ale mecanicii fluidelor, rezultatele obținute de aceștia reprezentînd de asemenea contribuții de valoare la scară internațională.

Difuzarea rezultatelor a fost asigurată prin periodicele „Studii și ceretări de mecanică aplicată" și „Revue Roumaine des Sciences Techniques "Série de Mécanique Appliquée", al căror redactor șef de la înființarea lor este profesorul Elie Carafoli. Aceste periodice, care reprezintă prin ținuta lor științifică o relizare foarte importantă, au atras numeroși colaboratori dintre specialiștii din lumea întreagă.

În mai bine de cincizeci de ani de activitate științifică profesorul Elie Carafoli a elaborat un număr mare de lucrări în domeniul mecanicii fluidelor și al aerodinamicii, aducînd astfel o contribuție importantă la progresul acestor științe. Lista anexată conține titlurile acestor lucrări; o analiză succintă a lor ne va ajuta să desprindem liniile directoare ale activității autorului lor și să subliniem rezultatele cele mai importante.

Ordinea cronologică, pe care o adoptăm în această analiză din lipsă de alt criteriu, ne obligă să citățm în primul rînd rezultatele foarte remarcabile care se referă la teoria profilelor aerodinamice [1, 2, 5, 7, 16, 17,18][1] și în special la metodele cele mai indicate pentru trasarea acestora. Menționăm că o categorie de profile cu vîrf rotund a fost numită de specialiștii străini de mare reputație „Profile Carafoli".

Reamintim de asemenea rezultatele referitoare la curgerea în jurul unui contur în mișcare generală de translație și de rotație [1, 15, 19]. Pentru prima dată a găsit soluția problemei mișcării unui profil general în rotație în jurul unui punct. Mai recent, cercetările sale i-au permis să stabilească o teorie a suprafețelor portante permeabile în cazul mișcărilor plane [34]. Trebuie să citățm și studiile referitoare la influența aripioarelor asupra proprietăților aerodinamice ale suprafețelor sustentatoare [3], în care a stabilit pentru prima dată expresiile forțelor și momentelor de șarnieră, care acționează asupra aripioarelor sau asupra părții mobile a ampenajelor.

Verificarea teoriei profilelor ca și aceea a aripilor de anvergură finită prin cercetările experimentale efectuate la Saint-Cyr, lîngă Paris, a dat rezultate foarte bune. În același timp, Elie Carafoli a lărgit cîmpul de experimentare pentru aripile de anvergură finită, determinînd nu numai coeficienții globali de portanță, de rezistență și de moment, ci și repartiția presiunilor pe profil, în diferite secțiuni ale aripii pentru alungiri cuprinse între 2 și infinit; rezultatele găsite sînt de asemenea în bun acord cu

[1] Numerele din paranteză reprezintă numerele lucrărilor din listă.

teoria [4, 108]. Sub alte aspecte, cercetările experimentale au fost continuate la București, în laboratorul Școlii politehnice [5].

Mai multe rezultate originale, avînd ca punct de plecare teoria lui Prandtl, au fost prezentate de academicianul Elie Carafoli în monografia sa asupra teoriei aripilor de anvergură finită [6]. Dintre acestea citățm în primul rînd o metodă generală pentru studiul acestor aripi, apoi soluția generală a problemei aripilor cu incidență variabilă, plecînd de la care a elaborat apoi teoria aripioarelor laterale de comandă [7, 27] și aceea a aripii în viraj [7, 29]. Cartea mai amplă a academicianului Elie Carafoli, „Aerodinamica" [7], în care aceste rezultate sînt cuprinse alături de soluții elegante pentru diverse alte probleme, cum ar fi rezistența minimă a sistemelor portante generalizate [7, 40] și teoria aripii cu fuzelaj central [7, 39], a avut un răsunet internațional fiind tradusă în limba germană la Berlin și în limba rusă la Moscova.

Cu începere din anul 1952, Elie Carafoli și-a orientat cercetările spre aerodinamica vitezelor mari. Tratatul „Aerodinamica vitezelor mari" [18] care a apărut în 1956, a fost tradus mai întîi în limba engleză și apoi în limba rusă la Moscova, Mai tîrziu, în 1969, a publicat la Londra împreună cu colaboratorii săi cartea „Wing Theory in Supersonic Flow" [11].

Academicianul Elie Carafoli a obținut în acest domeniu rezultate remarcabile stabilind o metodă unitară bazată pe curgerile conice de ordin superior. Singur, sau cu colaboratorii săi, a găsit soluțiile unei serii de probleme referitoare la aripile dreptunghiulare, trapezoidale sau triunghiulare (delta), acoperind astfel aproape toate utilizările curente ale aripilor în curgerea supersonică [10, 11, 41, 42, 45, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 60, 63, 66, 71, 72, 73, 74, 83, 111, 114, 119, 121, 122]. Metoda propusă de Elie Carafoli prezintă și avantajul de a permite și studiul unor probleme mai complicate. Citățm, cu titlu de exemplu, soluția riguroasă a problemei aripilor cruciforme, obținută pentru prima dată în lume, a aceleia a ampenajului compus dintr-un plan orizontal și un altul vertical și a problemei aripii dreptunghiulare prevăzută cu discuri marginale normale pe aripă [10, 11, 43, 46, 50, 54, 56, 62, 82, 110, 113, 115, 116], lucrări executate cu colaboratorii săi.

Elie Carafoli și colaboratorii săi au studiat și mișcarea supersonică în jurul unei aripi prevăzută cu fuzelaj conic, soluțiile găsite referindu-se la toate aspectele problemei [11, 59, 61, 62, 64, 65, 78].

În același domeniu al mișcărilor supersonice conice a creat un model teoretic în care se ia în considerare separarea curentului la bordurile de atac subsonice și a găsit, cu ajutorul acestui model, soluțiile multor probleme foarte actuale ale aviației supersonice [11, 77, 80, 84, 87, 88, 124, 127], fiind într-un bun acord cu rezultatele experimentale.

Pentru mișcările supersonice și hipersonice Elie Carafoli a stabilit o formulă unitară a coeficientului de presiune, utilizabilă pe un interval larg de regimuri, plecînd de la supersonic la hipersonic moderat, în bun acord cu datele experimentale. Extinderea acestor rezultate la aripile delta, respectiv la mișcarea tridimensională în regim supersonic-hipersonic moderat, a fost posibilă datorită unui procedeu simplu [11, 67, 69, 70, 75, 86, 117, 123, 125, 126].

Studiind apoi aceleași probleme pentru conul circular cu sau fără incidență, a găsit rezultate foarte interesante în bun acord cu rezultatele experimentale [128, 130, 133].

Trebuie să menționăm și cercetările sale teoretice și experimentale asupra unui fenomen deosebit de interesant și anume efectul jeturilor fluide plane laterale asupra caracteristicilor aripilor cu alungire mică [105, 129, 132, 134].

Printre lucrările mai recente ale academicianului Elie Carafoli se găsesc de asemenea cele referitoare la undele de combustie în mișcare supersonică [98, 106, 131] și acelea privitoare la aripile cu geometrie variabilă [96, 100].

Opera științifică bogată și variată a profesorului Elie Carafoli reflectă preocuparea sa constantă de a orienta știința pură spre aplicațiile practice.

Prin propriile sale lucrări științifice, ca și prin conferințele și comunicările sale la numeroasele manifestări științifice internaționale la care a participat, a contribuit în mod strălucit la cooperarea științifică internațională și la creșterea prestigiului științei românești.

Prin conferințele sale și prin articolele publicate în presa română, Elie Carafoli a adus o contribuție cu totul deosebită la difuzarea activităților științifice, didactice și culturale în păturile cele mai largi ale populației țării.

Mai mult de o jumătate de veac de activitate continuă și fecundă în domeniul științei, tehnicii și învățământului, ca și o muncă remarcabilă de organizare a activității științifice, situează pe academicianul Elie Carafoli printre cei care au dat ample contribuții, directe sau indirecte, la dezvoltarea științei aeronautice în lume.

Atribuirea unui mare număr de distincții române și străine, ca și alegerea sa în comitetele de conducere ale mai multor societăți științifice internaționale de mare prestigiu, constituie tot atîtea recunoașteri ale meritelor sale.

Foștii săi elevi, printre care se numără și cel ce semnează aceste rînduri, datorează mult învățăturii sale bogate în idei, ca și sfaturilor sale asupra modului de a ataca și rezolva o problemă științifică. Colaboratorii și elevii săi au învățat la școala profesorului Elie Carafoli să desprindă esențialul de accesoriu, să rămînă riguroși fără complicații inutile, să se exprime în modul cel mai simplu, concis și clar. Pentru noi constituie o mare bucurie faptul că profesorul nostru se află în plină vigoare fizică și intelectuală, muncind fără răgaz și gata oricînd să ne ajute cu sfaturile sale prețioase.

Să ne fie permis să exprimăm urările noastre cele mai sincere omului de știință și omului deosebit care este academicianul profesor Elie Carafoli, celui care a lucrat cu atît succes toată viața, strălucit fiu al unui popor la al cărui renume a contribuit atît de mult.

Teodor Oroveanu

TITLURI ŞI DISTINCŢII

Pregătire universitară

Inginer diplomat de la Politehnica din Bucureşti
Licenţiat în ştiinţele fizico-matematice de la Sorbonne, Paris
Doctor în ştiinţele fizice de la Sorbonne, Paris
Doctor docent în ştiinţe.

Titluri şi funcţiuni

Profesor (actualmente profesor consultant) la Institutul politehnic din Bucureşti.
Membru titular al Academiei Republicii Socialiste România, Preşedintele Secţiei de ştiinţe tehnice a Academiei R. S. România.
Membru al Academiei Internaţionale de Astronautică, Paris.
Honorary Fellow of „The Royal Aeronautical Society", London.
Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe şi Arte din Toulouse.
Membru străin al „Braunschweigische wissenschaftlische Gesellschaft" din R. F. Germania.
Membru extraordinar al "Internationale Astronautische Gesellschaft Hermann Oberth" din R. F. Germania.
Preşedintele al Federaţiei Internaţionale de Astronautică (F.I.A.) —1969—1970.
Membru în Comitetul executiv al Consiliului Internaţional al Uniunilor Ştiinţifice (ICSU) — 1964—1967.
Membru al Biroului Executiv al Consiliului Internaţional de Ştiinţe Aeronautice (I.C.A.S.). — 1967—1971.
Membru al Consiliului "Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (G.A.M.M.)" — 1967—1970.
Membru al Comisiei Naţionale a R. S. România pentru UNESCO.
Preşedinte al Comisiei de Astronautică a Academiei R.S.România.
Director al Institutului de mecanica fluidelor al Academiei R.S.România.
şi apoi Director onorific al Institutului de mecanica fluidelor şi construcţii aerospaţiale.

Distincţii şi decoraţii internaţionale

Premiul „Louis Bréguet", Paris, 1927—1928.
„Medalia de onoare argint", decernată de Societatea Naţională de Încurajare la Progres, Paris, 13 februarie 1928.
Diploma „Paul Tissandier", decernată de Federaţia Internaţională de Aeronautică, la Congresul de la Los Angeles, 1956, pentru contribuţiile sale în aeronautică.

„Medalia de argint", decernată de Societatea de Încurajare pentru Cercetare și Invenție, Paris, 1967.
Medalia „Carl Friedrich Gauss" decernată de Societatea Științifică din Braunschweig, R. F. Germania.
Medalionul „Apollo-11", decernat de N.A.S.A. în 1970.
Diploma și medalia „Tiolkovski", 27 martie 1981.

Ordine și distincții pentru activitate științifică

Premiul de Stat, clasa I.
Ordinul Muncii, Clasa I.
Om de știință emerit al Republicii Socialiste România.
Ordinul „Meritul Științific", clasa I.
Ordinul „Steaua Republicii Socialiste România", clasa a II-a.

Medalii diverse (românești)

Pentru a 5-a aniversare a Republicii Populare Române.
Pentru a 10-a aniversare a Forțelor Armate din România.
Pentru Colectivizarea Agriculturii.
Pentru semicentenarul Unirii Transilvaniei cu România (1918—1968).
Medalia jubiliară pentru a 50-a aniversare a P.C.R., București, mai 1971.

LISTA DE LUCRĂRI

a) Lucrări generale, tratate, monografii

1. Aérodynamique des ailes d'avion, Librairie Chiron Editeur, 40 rue de Seine, Paris, 1928.
2. Theorie et tracés des profils d'ailes sustentatrices, în colaborare cu A. Toussaint, Librairie Chiron Editeur, 40 rue de Seine, Paris, 1928.
3. Influence des ailerons sur les propriétés aérodynamiques des surfaces sustentatrices, Publications de l'Aéro-Club de France, Centre de Documentation Aéronautique Internationale, II (1931).
4. Recherches expérimentales sur ailes monoplanes, Publications scientifiques du Ministère de l'Air, Librairie Gauthier-Villars, Paris, 1932.
5. Travaux du Laboratoire Aérodynamique, Publications scientifiques de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, Imprimeriile Statului, București, 1938.
6. Théorie des ailes monoplanes d'envergure finie, Analele Academiei Române, seria **III**, **XX**, *4* (1945).

7. Aerodinamica, București, Edit. tehnică, 1951.
   — Tragflügeltheorie (în limba germană), Verlag Technik, Berlin 1954.
   — Aerodinamika krila samoleta (în limba rusă), Izdatelstvo Akademii Nauk SSR, Moskva 1956.
8. Mecanica fluidelor, în colaborare cu T. Oroveanu Editura Academiei, vol. I, 1952, vol. II, 1955.
9. Mișcări conice în regim supersonic (în limba chineză), Academia de Științe, Pekin, 1955.
10. High-speed Aerodynamics (în limba engleză), București, Editura tehnică, 1956.
    — Aerodinamica vitezelor mari, București, Editura Academiei 1957.
    — Aerodinamica bolshih skorostei (în limba rusă), Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moskva 1960.
11. Wing Theory in supersonic flow, în colaborare cu Dan Mateescu și Adriana Năstase, Pergamon Press, Oxford 1969.

b) Note Științifice

ACADEMIA DE ȘTIINȚE DIN PARIS

12. Contribution à l'étude de l'écoulement plan des fluides, în colaborare cu A. Toussaint, Comptes-Rendus, vol. 182, 25 mai 1926, pag. 1268.
13. Sur la Théorie des ailes sustentatrices, în colaborare cu A. Toussaint, Comptes-Rendus, vol. 183, 1926.
14. Sur les spectres cinématographiques de l'écoulement plan des fluides autour d'obstacles variés, în colaborare cu A. Toussaint, Comptes-Rendus, vol. 183, 22 nov. 1926, p. 947.
15. Sur le mouvement autour d'une plaque en rotation, Comptes-Rendus vol. 184, 11 apr. 1927, p. 804 și 933.
16. Methode générale pour le tracé des profils d'aviation, Comptes-Rendus vol. 185.
17. Sur les profils aérodynamiques de forme générale, Comptes-Rendus, vol. 185, 14 nov. 1927, p. 1014.
18. Tracé général des profils avec dièdre à la pointe, Comptes-Rendus, vol. 186, 30 apr. 1938, p. 1196.
19. Sur le mouvement général autour d'un contour, Comptes-Rendus, vol. 186, 30 apr. 1928, p. 1196.
20. Sur les caractéristiques aérodynamiques des ailes rectangulaires en dérive et à axe parabolique, în colaborare cu N. Tipei, Comptes-Rendus, vol. 225, 1947, p. 1121.
21. Sur le calcul des ailes rectangulaires en flèche, în colaborare cu N. Tipei, Comptes-Rendus, vol. 225, 1947, p. 1279.

ACADEMIA NAZIONALE DIE LINCEI, ROMA

22. Considerazioni teoretiche sul „Girante a Paletta", Atti, vol. IX, ser. 6, sem. L, fasc. 3, Febr. 2, 1930.

ACADEMIA DE ŞTIINŢE DIN ROMÂNIA

23. Cercetări asupra unei noi clase de profile de aviaţie, Decembrie 22, 1937.
24. Forţe şi momente aerodinamice pe aripioare, ianuarie 15, 1938.
25. Despre determinarea caracteristicilor aerodinamice ale aripilor deformate, Februarie 26, 1938.
26. Sur les caractéristiques aérodynamiques des ailes trapézoïdales et rectangulaires, martie 19, 1943.
27. Sur la théorie des ailerons, ianuarie 21, 1944.
28. Sur les trajectoires des bombes d'avion, noiembrie 19, 1944.

ACADEMIA ROMÂNĂ

29. Influence du virage circulaire plan sur les propriétés aérodynamiques des ailes, septembrie 15, 1944, Bulletin de la Section Scientifique, vol. XXVII, nr. 2, 1944.

ACADEMIA R.S. ROMÂNIA

30. Asupra teoriei aripilor în săgeată şi în derivă, în colaborare cu N. Tipei, ianuarie 31, 1949.
31. Despre teoria profilelor cu un contur dat, februarie 144 1949.
32. Aripa traversînd un curent de secţiune circulară, în colaborare cu T. Oroveanu, aprilie 1949.
33. Metoda practică pentru calculul aripilor de anvergură finită, Sesiunea ştiinţifică 1949.
34. Asupra unei teorii a suprafeţelor portante permeabile, sesiunea ştiinţifică a Academiei R.P.R., iunie 2—12, 1950.
35. Determinarea debitului de scurgere prin orificii şi deversoare, St. cerc. mec. apl. metalurg., **II**, *1* (1951).
36. Determinări experimentale ale presiunii vîntului pe modele de estacade, în colaborare cu D. Taşcă, N. Tipei, C. Popescu, St. cerc. mec. metalurg., **II** (1951).
37. Scurgerea prin medii poroase în jurul plăcilor permeabile, în colaborare cu N. Patraulea, Buletinul ştiinţific al Academiei R. P. Română, **IV**, *1—2*, (1952).
38. Mişcarea prin medii poroase în jurul suprafeţelor permeabile, în colaborare cu N. Patraulea, Comunicările Academiei R.P. Română, **II**, *2* (1952).

39. Ecuaţia circulaţiei în jurul unei aripi cu fuzelaj central, în colaborare cu N. Patraulea, Comunicările Academiei R.P. Române, **II**, *3—4* (1952).
40. Teorema rezistenţei minime la sistemele portante complexe, Comunicările Academiei R. P. Române, **II**, *7—8* (1952).
41. Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale, Comunicările Academiei R. P. Române, **II**, *9—10* (1952).
42. Extinderea analogiei hidrodinamice din mişcările conice la aripile groase şi cu incidenţa variabilă, Comunicările Academiei R. P. Română **III**, *3—4* (1953).
43. Mişcarea supersonică în jurul aripii triunghiulare cu discuri marginale, în colaborare cu B. Horovitz, Comunicările Academiei R. P. Română, **III**, *11—12* (1953).
44. Acţiunea vîntului asupra obstacolelor permeabile, cu aplicaţie la problema perdelelor forestiere de protecţie agricolă în colaborare cu I. Stroescu şi N. Cămărăşescu, St. cerc. mec. metalurg., **IV** (1953).
45. Asupra portanţei şi rezistenţei aripii triunghiulare la viteze supersonice, Comunicările Academiei R. P. Română, **IV**, *5—6* (1953).
46. Influenţa discurilor axiale asupra mişcării supersonice în jurul aripilor unghiulare conice groase şi cu incidenţa variabilă, în colaborare cu B. Horovitz, Comunicările Academiei R. P. Române, **IV**, *5—6* (1954).
47. Influenţa unui suflu axial suplimentar asupra aripii triunghiulare conice la viteze supersonice, St. Cerc. mec. apl., **V**, *1—2* (1954).
48. Rezistenţa aripilor triunghiulare dublu conice cu pantă variabilă, în curent supersonic, în colaborare cu M. Ionescu, St. cerc. mec. apl. **V**, *3—4* (1954), publicată şi în l. franceză în „Revue de mécanique apliquée, **I**, *1* (1956).
49. Asupra aripii delta subţiri dublu-conice cu incidenţă variabilă în curent supersonic, în colaborare cu L. Dumitrescu, St. cerc. mec. apl., **IV**, *3—4* (1955).
50. L'écoulement supersonique autour d'une aile à disque axial în colaborare cu B. Horovitz, Revue de mécanique appliquée, (1956), publicată, şi în St. cerc. mec. apl. **VII**, *2* (1956).
51. Rezistenţa de undă a unei clase de aripi delta subţiri dublu conice cu incidenţa variabilă în curent supersonic, în colaborare cu L. Dumitrescu, St. cerc. mec. apl., **VII**, *3* (1956).
52. Influenţa bracajului aripioarelor asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripii triunghiulare în regim supersonic, în colaborare cu S. Săndulescu, St. cerc. mec. apl., **VII**, *4* (1956).
53. Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique, în colaborare cu M. Ionescu, Revue de mécanique appliquée, **II**, *1* (1957), publicată şi în St. cerc. mec. apl., **VIII**, *3* (1957).

54. Écoulements coniques d'ordre supérieur autour d'une aile triangulaire à plaque normale, în colaborare cu B. Horovitz, Revue de mécanique appliquée, **II**, *2* (1957).
55. Théorie générale de l'aile triangulaire à distribution de pressions donnée (le problème indirect), în colaborare că M. Ionescu, Revue de mécanique appliquĕe, **II**, *2* (1857), publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **IX**, *2* (1958).
56. Problèmes mixtes des ailes triangulaires pourvues d'une plaque normale en courant supersonique (aile cruciforme), în colaborare cu B. Horovitz, Revue de mécanique appliquée, **III**, *3* (1958), publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **IV**, *4* (1958).
57. Etude des ailes triangulaires minces à symétrie forcée dans un courant supersonique, în colaborare cu A. Năstase, Revue de mécanique appliquée **III**, *4* (1958), publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **IV**, *4* (1958).
58. Caractéristicile aerodinamice ale aripioarelor avînd o mișcare oscilatorie armonică în regim supersonic, în colaborare cu S. Săndulescu, St. cerc. mec. apl., **X**, *2* (1959) publicată și în limba franceză în Revue de mécanique appliquée, **IV**, *2* (1959).
59. Scurgerea supersonică în jurul sistemului portant aripă-fuzelaj conic, în colaborare cu D. Mateescu, St. cerc. mec. apl. **IX**, *2* (1959), publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **IV**, *3* (1959).
60. Determinarea suprafeței unei aripi cu muchie de separație a distribuției de presiuni, în curent supersonic, în colaborare cu A. Năstase, St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959), publicată și în limba franceză în Revue de mécanique appliquée, **V**, *4* (1960).
61. Metoda generală pentru determinarea interferenței dintre aripă și fuzelaj, în colaborare cu D. Mateescu, St. cerc. mec. apl., **IV** *1*, (1960), publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **V**, *2* (1960).
62. Scurgerea supersonică în jurul sistemului aripă cruciformă — fuzelaj conic, în colaborare cu D. Mateescu, St. cerc. mec. apl., **XI**, *2* (1960), publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **V**, *3* (1960).
63. Aripi triunghiulare de rezistență minimă în curent supersonic, prevăzute cu muchie de separație, în colaborare cu A. Năstase, St. cerc. mec. apl., **XI**, *4* (1960), publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée **V**, *5* (1960).
64. Teoria aripilor cruciforme sau prevăzute cu fuzelaj conic, Sesiunea științifică jubiliară, Institutul de mecanică aplicată, 4—7 iulie 1960, Edit. Academiei 1962, p. 143—173,
65. Interferența dintre aripă și fuzelaj în scurgerile conice de ordin superior, în colaborare cu D. Mateescu, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *2* (1962), publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **VII**, *3* (1962).
66. Asupra problemei de rezistență minimă a aripii de grosime simetrică în curent supersonic, în colaborare cu A. Năstase-Ghia St. cerc.

mec. apl., **XIII**, *1* (1962), publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **VII**, *2* (1962).

67. Considerații teoretice supra jeturilor laterale fluide, St. cerc. mec. apl., **XIII**, *5* (1962), publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **VII**, *6* (1962).
68. Stabilirea unei formule unitare pentru compresiune-expansiune în regim supersonic-hipersonic, Comunicările Academiei R. S. România, 1962, nr. 9, publicată și în limba engleză în Revue de mécanique appliquée, **VII**, *5* (1962).
69. Caracteristicile aerodinamice ale profilelor în regim supersonic-hipersonic, în cazul neglijării pierderilor de sarcină datorită undelor de șoc, în colaborare cu C. Berbente, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *4* (1963), publicată și în limba engleză în Revue de méc. appl., **VIII**, *5* (1963).
70. Determination of the characteristics of aerodynamic pofiles in supersonic-hypersonic flow, considering the pressure losses through shock waves, în colaborare cu C. Berbente, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **IX**, (1964).
71. Sur une classe d'ailes delta à incidence et pente variables d'après des fonctions homogènes en régime supersonique, în colaborare cu D. Mateescu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **X**, *2* (1965), publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **XVI**, *2* (1965).
72. Asupra unei clase de aripi în săgeată și în coadă de rîndunică, în colaborare cu Fr. Atanasiu, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *3* (1965).
73. Extension of conical motions to quasi-conical motions, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **X**, *3* (1965), publicată și în l. română în St. cerc. mec. apl., **XVI**, *5* (1965).
74. Scurgerea supersonică în jurul aripii delta subțiri în derivă, în colaborare cu Silvia Rădulescu, St. cerc. mec. apl., **XVI**, *4* (1965).
75. Determination of pressures and aerodynamic characteristics of delta wings in supersonic-moderate hipersonic flow, în colaborare cu C. Berbente, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XI**, *3* (1966), publicată și în l. română, în St. cerc. mec. apl., **XVII**, *3* (1966).
76. La déviation d'un écoulement supersonique bidimensionnel par l'action d'un jet flap, în colaborare cu D. Pantazopol, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XI**, *4* (1966), publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **XVII**, *4* (1966).
77. Asupra teoriei aripii delta subțiri cu separația curentului la bordurile de atac, în colaborare cu St. Staicu, St. cerc. mec. apl., **XII**, *4* (1966).
78. Mouvement oscillatoire harmonique du système aile-fuselage conique en régime supersonique, în colaborare cu D. Mateescu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XI**, *5* (1966), publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., *5* (1966).

79. Application of quasi-conical motions of the theory of delta wings with curved leading edges, Revue Roumaine des sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XI**, *6* (1966), publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., *6* (1966).
80. Antisymmetrical thin delta wing with flow separation at the leading edges, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XI**, *6* (1966), publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., *6* (1966).
81. Application of quasi-conical motions to the study of wing-body lifting systems in supersonic flow, în colaboare cu D. Mateescu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XII**, *1* (1967), publicată și în limba română în St. cerc. mec. aplic. **XXIII**, *3* (1967).
82. Forma optimă a aripii cruciforme de grosime simetrică în curent supersonic, St. cerc. mec. apl., **XXIII**, *6* (1966), publicată și în limba engleză în Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XII**, *2* (1967).
83. Aripa delta subțire de rezistență minimă, avînd viteza finită la bordurile de atac în curent supersonic, în colaborare cu A. Năstase, St. cerc. mec. apl., **XXVI**, *5* (1967), publicată și în limba engleză în Revue Roumaine des Sciences Techniques série de mécanique appliquée, **XII**, *5* (1967).
84. On the delta wing with forced antisymmetry in supersonic flow, considering the leading edge separation, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Technique, série de mécanique appliquée, **XIII**, *3* (1968), publicată și în limba română, în St. cerc. mec. apl., **XXVII**, *2* (1968).
85. Ecoulements plans supersoniques separés par un jet en forme de couche mince, în colaborare cu D. Pantazopol, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XIII**, *4* (1968), publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., **XXVII**, *4* (1968, publicată și în l. română în St. cerc. mec. apl., **XXVII**, *4* (1968).
86. Determinarea cîmpului de presiuni în mișcarea plană supersonică-hipersonică moderată, în colaborare cu C. Berbente, St. cerc. mec. apl., **27**, *5* (1968).
87. Ecoulement supersonique autour de l'aile delta arquée et gauchie symétriquement, compte tenu de la séparation du courant aux bords d'attaque, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, *3* (1969), publicată și în limba română în St. cerc. mec. apl., *3* (1969).
88. Asupra separației curentului la bordurile aripii delta antisimetrice în regim supersonic, în colaborare cu St. Staicu, St. cerc. mec. apl., *4* (1969).
89. Noi cercetări asupra aripilor de alungire mică cu jeturi laterale, în colaborare cu N. Cămăreșescu, St. cerc. mec. apl., **29**, *4* (1970).
90. Consideration on the supersonic and hipersonic motion past the circular cone with zero incidence, în colaborare cu C. Berbente,

Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mecanique appliquée, **XV**, *2* (1970).

91. Oscillations of wings fitted with conical bodies of arbitrary cross-section in supersonic flow, în colaborare cu D. Mateescu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XV**, *4* (1970).
92. Considerations on wave drag of a delta thin wing with leading edge separation, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, **XV**, *5* (1970).
93. Comparative application of the „Theoretical model" concerning the supersonic flow past a delta wing with flow separation at the leading edges, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de mécanique appliquée, *2* (1971).
94. Considerations on the thin delta wing with finite velocities at the leading edges, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques série de mécanique appliquée, *3* (1971).
95. On the symmetrically deformed delta wing, considering the flow separation at the leading edges, în colaborare cu St. Staicu. Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée, **XVI**, *6* (1971).
96. Studiu asupra unei serii de aripi cu geometrie variabilă derivate din aripile delta cu diferite alungiri. Caracteristicile aerodinamice ale aripilor delta, în colaborare cu I. Paraschivoiu, St. cerc. mec. apl., **31**, *5* (1972).
97. Cîteva aspecte interesante ale mișcărilor conice, în colaborare cu St. Staicu, St. cerc. mec., apl., **32**, *2* (1973).
98. Determinarea undei de combustie într-o curgere supersonică conică în colaborare cu H. Dumiterscu, St. cerc. mec. apl., **32**, *2* (1973).
99. Calculation method for supersonic twisted rectangular wings, în colaborare cu D. Mateescu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de Mécanique Appliquée, **18**, *6* (1973).
100. The aerodynamic characteristics of some variable geometry wing forms, derived from delta wings, gothic and mild-ongee wings, în colaborare cu I. Paraschivoiu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mecanique Appliquée, **18**, *5* (1973).
101. Thin antisymmetrical delta wings with finite velocity at the leading edges, în colaborare cu St. Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée, **19**, *5* (1974).
102. Delta wing with blowing or suction through the surface, în colaborare cu R. Popa, Revue Roumaine des Sciences Techniques Série de Mécanique Appliquée, **20**, *1* (1975).
103. Despre profilele paletelor de turbo-mașini și ale palelor de elici, St. cerc. mec. apl., **35**, *1*, p. 3—5 (1976).
104. Antisymmetrical cambered and torsioned delta wings with finite velocities at the leading edges, avec la collaboration de St.

Staicu, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée, **20**, *2* (1975).

105. Aerodinamica aripilor cu jeturi laterale înclinate, în colaborare cu M. Neamţu, St. cerc. mec. apl., **35**, *2* (1976).
106. Determinarea undei de combustie în curgerea supersonică din jurul profilelor aerodinamice, în colaborare cu H. Dumitrescu şi V. Drăgoi, St. cerc. mec. apl., **35**, *3* (1976).

c) Congrese internaţionale, articole publicate în străinătate

107. Etude sur l'écoulement plan des fluides, în colaborare cu A. Toussaint, Congresul al II-lea de Mecanică aplicată, Zürich, 1926, publicată în Actele Congresului.
108. Confrontation de la théorie des ailes sustentatrices avec l'expérience, Congresul al III-lea de Mecanică aplicată, Stockholm, 1930, publicat în Actele Congresului.
109. Solutions explicites pour les caractéristiques aérodynamiques des ailes d'envergure finie. Vérifications expérimentales des profils de forme générale, Congresul internaţional de Mecanică Aplicată, Paris, 1946, publicat în Actele Congresului.
110. L'écoulement supersonique homogène d'ordre supérieur autour d'une aile cruciforme. Application au mouvement oscillatoire. În colaborare cu B. Horovitz. Al IX-lea Congres de Mecanică Teoretică şi Aplicată, publicat în Actes, tome II, Bruxelles, 1957.
111. Uber eine einheitliche Theorie des Uberschalltragflügels in homogener Strömung höherer Ordnung. În colaborare cu M. Ionescu. Congres anual al „Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik", Hamburg, avril 1957, Z.A.M.M., juin/août 1957, 37, 7/8.
112. Oscillations harmoniques des ailerons de forme générale en régime supersonique. În colaborare cu S. Săndulescu. Simpozion de mecanica fluidelor, Krynica, Polonia, septembrie, 1957, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 1958, 6.
113. Les problèmes mixtes des ailes triangulaires à plaque normale en courant supersonique, în colaborare cu B. Horovitz, Al IV-lea Congres naţional de mecanică raţională şi aplicată, Opatija, R.S.F. Jugoslavia, iunie 1958 — publicat în Tehnika, Organ saveza inzejnera i tehnikare jugoslavije, XIV (1959).
114. Sur la résistance minimum de l'aile trapézoidale en courant supersonique, în colaborare cu A. Năstase, Congresul unional de Mecanică teoretică şi aplicată, Moscova, ianuarie-februarie 1960, publicat în Mechanika, 1.
115. Unitarnaia teoria triugolnih ili krestobraznih krilov v sverhzvukovom potoke (Partea I şi II), Injenernîi Sbornik, XXVII—XXVIII, Moscova, (1960).
116. Problemes indirects des ailes triangulaires cruciformes en courant supersonique, în colaborare, cu B. Horovitz, The Golden

Jubilee Commemoration Volume (1958—1959), Calcutta Mathematical Society, India, II (1969).
117. O raspredelenie davleniia aerodinamiceskih profiliah v sverhzvukovom I ghiperzukovom potokah, Izvestia Akad Nauk SSSR, Otdelenie Techniceskih Nauk, Mechanika i Maşinostroenie, Moscova, 1 (1962).
118. High order conical flow around the delta wing fitted with conical body, în colaborare cu D. Mateescu, Proceedings of the Seminar on the Aeronautical Sciences, Bangalore, India, 1961.
119. Sur le problème de résistance minimum en courant supersonique, prezentată la Academia de Ştiinţe din R. S. Cehoslovacă, Praga, ianuarie 1961.
120. The influence of lateral jets, simple or combined with longitudinal jets, upon the wing lifting characteristics, Al III-lea Congres al Consiliului internaţional al ştiinţelor aeronautice (ICAS), Stockholm, 27—31 aug. 1962, publicată în Proceedings of the Third ICAS Congress.
121. L'utilisation de la methode des residus dans le probleme de résistance minimum de l'aile trapézoidale en courant supersonique, în colaborare cu A. Năstase, Al VI-lea Simpozion de Mecanica fluidelor Zakopane, R. P. Polonă, 2—6 sept. 1963, publicată în Archivum Mechaniki Stosowanej, Warszava 3 16 (1964).
122. Sur la théorie des ailes à bords d'attaque subsoniques en courant supersonique l'Aerotehnica, fasc. 3, mai iunie 1966, Associazione Italiana di Aerotecnica (AIDA), Roma.
123. Theory of the wing and wing-body systems over a wide range of the supersonic-hypersonic regime, Al V-lea Congres al Consiliului internaţional al Ştiinţelor Aeronautice (ICAS), Londra, sept. 1966, publicat în Proceedings of the Vth ICAS Congress, Londra, 1967.
124. Sur un modèle théorique concernant l'aile delta mince avec décollement aux bords d'attaque, în colaborare cu St. Staicu, Journal de Mécanique, VI, 2, juin 1967, Paris.
125. Pressure distribution on conical delta wings in supersonic-moderate hypersonic flow, publicat în Volumul omagial consacrat celei de-a 80-a aniversări a Prof. Markus Reiner, Technion, Haifa, Israel 1968.
126. Bestimmung der Drücke und der Stosswellenform bei ebener uberschall-bzw. Mässiger hyperschallströmung, în colaborare cu C. Berbente, Zeitschrift fur Flugwissenschaften, Braunschweig, 16 (1968), Heft 10.
127. Delta wing with antisymmetrical incidence and leading edge separation, în colaborare cu St. Staicu, publicat în volumul "Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics" dedicat celei de-a 50-a aniversări a prof. L. I. Sedov, Moscova, 1968.
128. Consideration on the supersonic and hypersonic motion past the circular cone at angle of attack, şn colaborare cu C. Berbente, Zeitschrift für Flugwissenschaften, Braunschweig, 18, 2,3 (1970).

129. Neue Untersuchungen über die Auftriebserhohung" durch seitliche Strahlblätter ber Tragflügeln kleiner Seitenverhältnis, Abhandlungen der Braunschweigische Wissenschaftliche Gesellschaft, 1970, Band XXII.
130. Moto supersonico-ipersonico attorno ad un cono circolare poroso, în colaborare cu C. Berbente. L'Aerotechnica Missili e Spazi, 1972, 5, Milano.
131. The determination of the combustion wave in a conical supersonic flow, în colaborare cu H. Dumitrescu, Journal of Mathematical and Physical Sciences, 1973, VII, 2, Bangalore, India.
132. New theoretical developments on the wings with lateral jets. În colaborare cu M. Neamțu, publicat în volumul „Omaggio a Carlo Ferrari", 1974, Libreria editrice Universitaría, Levsotto & Bella, Torino.
133. The supersonic-hypersonic motion around a circular cone with normal blowing or suction through the surface, în colaborare cu C. Berbente, Mechanical Research Communications 1974, vol. II, p. 239—244, Pergamon Press, printed U.S.A.
134. Romanian Rocketry in the 16^{h} century, în colaborare cu M. Niță NASA Conference publication 2014. Essays on the History of Rocketry and Astronautics, vol. I. 1977.
135. Supersonic cone with surface blowing, în colaborare cu C. Berbente, Aeronautical Quarterly, November 1976, p. 248—256, The Royal Aeronautical Society — London.

d) Note științifice și alte publicații

136. Contribution à la théorie de la sustentation en aérodynamique, Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, pour obtenir le grade de docteur ès sciences physiques, Paris, Etienne Chiron, éditeur (1928).
137. Contribution à l'étude de l'écoulement plan des fluides, în colaborare cu A. Toussaint, Recherche et Invention, Paris, dec. 1926.
138. Vérifications expérimentales de la théorie des ailes sustentatrices, în colaborare cu A. Toussaint, l'Aérophile, Paris, 15 avril 1927.
139. Sur une remarque au sujet du théorème des forces vives appliquée à l'hydrodynamique rationnelle, l'Aérophile, Paris, 1—15 juillet 1927.
140. Le choix du profil des ailes sustentatrices, în colaborare cu A. Toussaint, l'Aéronautique, Paris, déc. 1927 et janvier 1928, nos. 11—104.
141. Confrontation des théories aérodynamiques modernes avec les lois de la mécanique rationnelle, l'Aérophile, Paris, 1—15 juillet 1927.
142. Caractéristiques aérodynamiques des profils empiriques minces, în colaborare cu A. Toussaint, l'Aérophile, Paris, 1—15 juin 1928.

143. Etude sur les pertes de charge dans les ajoutages Venturi, în colaborare cu A. Toussaint, Chaleur et Industrie, janvier et février 1928.
144. Sur le centrage des avions, Bulletin des Mathématiques et de Physique Pure et Appliquée de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, no. 1-er, an 1, 1929.
145. Sur la stabilité longitudinale et le centrage des avions, l'Aéronautique, janvier 1930, no. 128, Paris.
146. Sur le calcul des avions. Détermination des forces extérieures, l'Aérotechnique, juin-juillet 1930, nos. 133, 134.
147. Observations sur une note : les mouvements fluides engendrés par la rotation de certains solides de V. Vîlcovici, Bull. de math. et de phys. de l'Ec. Polyt. de Bucarest, I, 2 (1930).
148. Calcul des performances d'un avion, Bull. de math. et de phys. de l'Ec. Polyt. de Bucarest, I, 3 (1930) și II, 1 (1931).
149. Determinarea caracteristicilor geometrice principale ale unui avion, Revista aeronautică, 7—8 (1936).
150. Curs general de aeronautică, litografiat, Școala politehnică din București, 1936—1944.
151. Aplicarea teoremei impulsului la determinarea contracției unei vene lichide ce se scurge printr-un orificiu, în colaborare cu Viorica Beleș, Buletinul Societății politehnice, an LXI, nr. 1, 1947, p. 192—207.
152. Profile aerodinamice de mare viteză (profile laminare), Studii, 1, Editura de Stat, București, 1948.

e) Note speciale prezentate la congrese internaționale

153. Introducerea astronauticii în învățămîntul superior, în colaborare cu M. Niță, al XVI-lea Congres al Federației internaționale de Astronautică, Atena, sept. 1965 — pubicat în Proceedings of the XVI-th IAF Congress.
154. Asupra începuturilor construcției de rachete, după cercetările lui D. Todericiu, comunicată la al XVII-lea Congres al Federației internaționale de Astronautică, Madrid, oct. 1966.

f) Instalații experimentale și realizări tehnice

— Instalație hidrodinamică pentru vizualizarea mișcărilor fluidelor în jurul corpurilor variate (Institutul Aerotehnic de la Saint-Cyr), denumită „cuva Toussaint-Carafoli", utilizată de diverse laboratoare din Franța și din România.
— Sufleria aerodinamică de la Institutul politehnic din București, în colaborare cu I. Stroescu, prima instalație de acest gen din sud-estul Europei.
— Organizarea Laboratorului aerodinamic la Institutul politehnic din București.
— Tunel aerodinamic la Institutul de mecanica fluidelor (în colaborare cu o echipă de ingineri, printre care Ion Stroescu).

— Avioane de vînătoare cu aripă joasă (soluție îndrăzneață în acea epocă), cu performanțe remarcabile, fabricate în România, Brașov, 1930—1931. (În colaborare cu o echipă de ingineri, printre care Lucien Virmoux).

— Realizarea uzinelor „Industria română mecanică și chimică (I.R.M.C.) (în apropiere de Ploiești).

g) Articole cultural-științifice

155. Istoricul dezvoltării aeronauticii în România, Buletinul Societății Politehnice, XLV, p. 1531—1542, 1931.

156. Aurel Vlaicu, inventator, constructor și zburător, Edit. tehnică, București, 1954.

— Articole publicate cu ocazia celei de-a 50-a aniversări a primului zbor al lui Aurel Vlaicu ; Contemporanul, 17 iunie 1960, Luceafărul, 15 iulie 1960.

— Articole publicate cu ocazia celei de-a 50-aniversări a morții lui Aurel Vlaicu ; Gazeta Literară, 15 sept. 1963, Viața studențească, 21 sept. 1963.

157. Un pionier al aviației mondiale : Traian Vuia, Sesiunea Academiei R.P.R., iulie 1956.

— Articole publicate cu ocazia celei de-a 60-a aniversări a zborului memorabil al lui Traian Vuia ; Viața Economică no. 10, 11 martie 1966, Tribuna, 24 martie 1966.

— Traian Vuia, pionier al aviației românești (Traian Vuia, pionier de l'aviation roumaine) Buletinul Comisiei Naționale a R.S.R., pentru UNESCO 2/3, 1972.

— Traian Vuia pionier al aviației mondiale, Flacăra, 2 iunie 1973.

158. Contribuții românești la aeronautica mondială, Contemporanul, 10 iulie 1959.

159. Dezvoltarea cercetărilor științifice în Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.S. România, St. cerc. mec. apl. 6 (1960).

160. Perspectivele cercetării științifice, Contemporanul, 30 dec., 1960.

161. Cercetări de aeromecanică la Institutul de mecanică aplicată, Sport și Tehnică, nr. 4, 1962.

162. Realizări și perspective în domeniul științelor tehnice. Sesiunea Academiei R.S.România, Analele Academiei R.S.România, 1964.

163. Henri Coandă și contribuția sa la dezvoltarea aviației, Sport și Tehnică, nr. 3, 1964.

164. Activitatea științifică în domeniul mecanicii în România, Conferința de mecanică, București, 1965. În l. franceză, în Revue Roumaine des Sciences Techniques — série de Mécanique Appliquée, nr. 1, 1966.

165. Rolul științelor tehnice în dezvoltarea economiei naționale a României. Centenarul Academiei R.S. România, sept. 1966.

166. O hotărîre crucială, publicată în volumul Amintiri din anii de școală, Editura Politică, București, 1967.

167. Ştiinţele mecanice şi rolul lor în tehnica de producţie. În colaborare cu M. M. Niţă, publicat în vol. Revoluţia ştiinţifică şi tehnică contemporană, Edit. tehnică, Bucureşti, 1967.
168. Articole şi cuvîntări cu prilejul Simpozionului de mecanica fluidelor şi „Efectul Coandă", Bucureşti, iunie 1967, publicat în Buletinul Comisiei Naţionale a R. S. România pentru UNESCO nr. 3—4, 1967; Revue Roumaine des Sciences Techniques — série de Mécanique Appliquée, vol. 18, 1968, nr. 3.
169. Cercetarea ştiinţifică şi construcţiile aerospaţiale, Cronica, Iaşi, 17 februarie 1968.
170. Preistoria rachetei moderne. Informaţia Bucureştiului, 9 mai 1969.
171. Dezvoltarea cercetărilor de mecanică aplicată în România, prezentată la Conferinţa naţională de Mecanică Aplicată, iunie 1969, Bucureşti, „Studii şi cercetări de mecanică aplicată, vol. 29, nr. 1, 1970; publicată şi în l. engleză în Revue Roumaine des Sciences Techniques — Série de Mécanique Appliquée, 1970, vol. XV, nr. 1.
172. Concluziile Conferinţei naţionale de Mecanică. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, vol. 29, nr. 1, 1970; publicată şi în l. engleză în Revue Roumaine des Sciences Techniques — série de Mécanique Appliquée, 1970, vol. XV, nr. 1.
173. Articole cu prilejul vizitei în România a profesorului Herman Oberth. Glasul Patriei, nr. 19 (599), 10 iulie 1972; Progresele Ştiinţei, nr. 12, 8, 1972; Contemporanul, august 1972.
174. Comunicare la Academia de Ştiinţe Sociale şi Politice despre „Implicaţii sociale ale dezvoltării ştiinţelor mecanice şi aerospaţiale", Era socialistă, nr. 9, mai 1974.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 40 1981

INDEX ALFABETIC

ALEXA, P. (vezi ROMAN F.) 1 89
ANGHEL, ALEXANDRU (vezi POSEA, NICOLAE) 1 53
APOSTOLESCU, NICOLAE (vezi TURCOIU, TITI) 2 275
ASEF, MOHAMMED (vezi OROVEANU, TEODOR) 6 855
BĂDESCU, GHEORGHE, DAN-MIHAI ŞTEFĂNESCU, Instalaţie pentru determinarea constantelor elastice ale rocilor 3 451
BĂGNARU, DAN (vezi BUCULEI, MIHAI) 3 369
BĂLAN, GEORGE, Asupra identificării statistice a funcţiei de răspuns la frecvenţă a unui strung 1 121
BERBENTE, CORNELIU, O extindere a metodei de trasare Carafoli la reţele de profile 6 811
BIA, CORNEL (vezi ILLE, VASILE) 4 553
BLUMENFELD, M. (vezi CONSTANTIN, N.) 3 409
BOCIAN, I. (vezi SZÉKELY, IMRE) 5 721
BORŞ, IACOB (vezi ILLE, VASILE) 4 553
BRATU, POLIDOR, Studiu privind pulsaţiile proprii şi transmisibilitatea vibraţiilor funcţie de variaţia rigidităţii elementelor antivibratile din cauciuc la compactoarele vibratoare autopropulsate 1 101
BUCULEI, MIHAI, S. BĂGNARU, Ecuaţii de închidere pentru lanţurile cinematice ale mecanismelor cu elemente liniar elastice 3 269
BUTOESCU, VALENTIN (vezi CONSTANTINESCU, VIRGILIU-NICULAE) 6 791
CANŢĂ, TRAIAN, Cercetări tribologice şi teoretico-experimentale în vederea elaborării tehnologiei optime de metalizare în jet de plasmă a fisurilor de arbori cotiţi 5 753
CANŢĂ, TRAIAN (vezi VASILIU, CHIRIAC) 3 439
CANŢĂ, TRAIAN (vezi VASILIU, CHIRIAC) 4 607
CĂMĂRĂSCU, DAN (vezi SIMA, PETRE) 5 783
CĂPITANU, LUCIAN, Cecetări privind utilizarea lagărelor sinterizate ca înlocuitoare ale lagărelor turnate, în construcţia motoarelor de tractor 2 307
CHIOREANU, V. (vezi SZÉKELY, IMRE) 5 721
CÎRTOAJE, VASILE, Modelarea matematică a garniturii de foraj 4 527
CONSTANTIN, N., M. BLUMENFELD, M. MUNTEANU, I. CONSTANTINESCU, Determinarea stării de tensiune într-o moară de minereu de mari dimensiuni 3 409
CONSTANTINESCU, IOAN (vezi CONSTANTIN, N.) 3 409
CONSTANTINESCU, VIRGILIU-NICULAE, V. BUTOESCU, O extindere a teoriei suprafeţei portante la evoluţii pe traiectorii oarecare cu viteze subsonice 6 791
COSTIN, GRIGORE (vezi SIMA, PETRE) 5 783
CULIN, MAXIMILIAN (vezi PAVEL, ALECSANDRU) 4 619
CULIN, MAXIMILIAN (vezi PAVEL, ALECSANDRU) 5 773
DOBRE, GEORGE, CONSTANTIN TÂRCOLEA, MIHAIL RAŞEEV, Calculul ariei flancurilor active la angrenajele cilindrice cu dinţii înclinaţi în evolventă 1 153
DUMITRESCU, ALEXANDRU TRAIAN (vezi TEODOSIU, CRISTIAN) . . 6 869
ERHAN, ANA (vezi ERHAN, MIRCEA) 5 633

ERHAN, MIRCEA, A. ERHAN, Soluţii aproximative ale mişcării plane a fluidelor grele cu suprafaţa liberă peste obstacole de o formă arbitrară . . . 5 633
ERHAN, MIRCEA (vezi SETEANU, ION) 2 163
ERHAN, MIRCEA (vezi SETEANU, ION) 4 497
FĂCIU, CRISTIAN, Aspecte cinematice în problema tragerii 2 265
GĂLETUŞE, STELIAN, Asupra proiectării elicei eoliene de randament maxim 4 593
GĂLETUŞE, STELIAN, Asupra adaptării optime a elicei la avion 6 837
GHEORGHIU, ZAHARIA, Asupra integrării sistemului de ecuaţii diferenţiale al vibraţiilor structurilor cu un număr finit de grade de libertate, excitate seismic 2 239
GRIGORE, NICULAE (vezi PAVEL, ALECSANDRU) 4 619
GRIGORE, NICULAE (vezi PAVEL, ALECSANDRU) 5 773
GÜNDISCH, ORTWIN (vezi SIRETEANU, TUDOR) 3 425
ILLE, VASILE, CORNEL BIA, IACOB BORŞ, Placa plană dreptunghiulară avînd două laturi adiacente încastrate, iar celelalte două libere 4 553
LARIONESCU, DAN, Utilizarea metodei de aproximare a celor mai mici pătrate . 3 636
LI CHUN BO (vezi TUDOR, ANDREI) 5 741
MARINOV, ANCA (vezi SETEANU, ION) 2 163
MATEESCU, CEZAR (vezi PAVEL, ALECSANDRU) 4 619
MATEESCU, CEZAR (vezi PAVEL, ALECSANDRU) 5 773
MATEESCU, DAN, R. ŞELESCU, Curgerea supersonică în jurul unui fuselaj conic de secţiune oarecare izolat sau prevăzut cu o aripă delta cu bordurile subsonice 6 819
MIHĂIŢĂ, GHEORGHE, O metodă aproximativă de determinare a frecvenţelor vibraţiilor proprii la cadrele din bare cu pereţi subţiri de secţiune deschisă 1 75
MUNTEANU, M. (vezi CONSTANTIN, N.) 3 409
NIŢĂ, MIHAI M., Cu privire la studiul stabilităţii avioanelor cu decolare şi aterizare verticală 6 801
OANĂ, SORIN (vezi STAN, ALECSANDRU D.) 2 171
OBLEMENCO, GHEORGHE (vezi SOARE, MIRCEA V.) 3 337
ONU, GELU, Calculul fundaţiilor pe coloane în domeniul neliniar elastic 5
OROVEANU, TEODOR, Determinarea căderii de presiune în curgerea neizotermică a unui lichid printr-o conductă 2 185
OROVEANU, TEODOR, Cu prilejul aniversării academicianului Elie Carafoli 6 885
OROVEANU, TEODOR, MOHAMMED ASEF, Asupra unei probleme de mişcare nestaţionară în conductele de gaze 6 855
OROVEANU, TEODOR, S. POPOVICIU, AL. D. STAN, Pierderile de gaze din reţeaua de distribuţie 3 321
OROVEANU, TEODOR, S. POPOVICIU, AL. D. STAN, Scurgerile de gaze prin defectele conductelor cu presiuni mari 4 579
PANAIT, GHEORGHE, Contribuţii în studiul dinamicii corpurilor cu masă variabilă 2 199
PANAIT, GHEORGHE, Echilibraj optim în medii de primă aproximaţie a rotorului cu masă variabilă (dezechilibru variabil) 3 401
PAVEL, ALECSANDRU, L. RIZEA, C. MATEESCU, M. CULIN, N. GRIGORE, Acordarea electrorezistivă a tiranţilor rezervoarelor sferice. I 4 619
PAVEL, ALECSANDRU, L. RIZEA, M. CULIN, C. MATEESCU, N. GRIGORE, Acordarea mecanică a tiranţilor rezervoarelor sferice. II 5 773
PĂRĂIAN, SORIN, T. SIRETEANU, I. ROŞU, Determinarea densităţilor spectrale ale drumurilor pe baza analizei experimentale a vibraţiilor automobilelor 5 715
PĂRĂIAN, SORIN (vezi SIRETEANU, TUDOR) 2 285
PIETRARU, VITALIE, DAN STEMATIU, MIRCEA ŞELĂRESCU, Regimul subpresiunilor la centrala hidroelectrică Porţile de Fier II 4 563
POPA, ALEXANDRU, Aplicaţii ale teoriei distribuţiior în calculul barelor curbe plane 4 543
POPA, GABRIEL D., Metodă de calcul, utilizînd seriile duble trigonometrice, pentru placa rigidizată cu nervuri excentrice dispuse pe două direcţii . . 2 223
POPESCU, IULIAN, Calculul regimurilor de aşchiere care asigură un consum energetic minim 5 735
POPESCU, MIHAI, Transferul optimal în punctele de libraţie coliniare . . . 1 3
POPESCU, MIHAI, Asupra condiţiilor adiţionale de tip Bolza utilizate în studiul transferului optimal din punctele lagrangiene 4 471

POPESCU, MIHAI, Asupra unor clase de extremale privind mişcarea comandată în jurul punctelor de libraţie din sistemul Pământ—Lună 5 647
POPOVICIU, SABIN (vezi OROVEANU, TEODOR) 3 321
POPOVICIU, SABIN (vezi OROVEANU, TEODOR) 4 579
POPOVICIU, SABIN (vezi STAN, ALECSANDRU D.) 5 683
POSEA, MAGDALENA, Aspecte privind calculul eforturilor şi deplasărilor arborilor 2 247
POSEA, MAGDALENA, Vibraţiile flexionale ale arborilor ţinînd seamă de deformaţiile de forfecare şi de inerţia de rotaţie 3 377
POSEA, NICOLAE, AL. ANGHEL, Calculul dinamic al sistemelor de conducte 1 53
RAŞEEV, MIHAIL (vezi DOBRE, GEORGE) 1 153
RIZEA, LUCIAN (vezi PAVEL, ALECSANDRU) 4 619
RIZEA, LUCIAN (vezi PAVEL, ALECSANDRU) 5 773
ROMAN, F., P. ALEXA, Aplicaţii ale programării matematice la calculul grinzilor pe mediu elastic prin metoda elementelor finite 1 89
ROŞU, IULIAN (vezi PĂRĂIAN, SORIN) 5 715
ROŞU, IULIAN (vezi TEODOSIU, CRISTIAN) 6 869
SETEANU, ION, M. ERHAN, Transportul aluviunilor în regim nepermanent. IV. Studiul refacerii zonei de influenţă în procesul de eroziune-depunere . . 4 497
SETEANU, ION, M. ERHAN, A. MARINOV, Transportul aluviunilor în regim nepermanent. III. Evoluţia procesului de pavare 2 163
SIMA, PETRE, GRIGORE COSTIN, DAN CĂMĂRĂSCU, Instalaţie pentru studiul frecării dintre lagăr şi arbore 5 783
SIRETEANU, TUDOR, O. GÜNDISCH, Suspensii echipate cu amortizoare secvenţiale 3 425
SIRETEANU, TUDOR, S. PĂRĂIAN, Criterii pentru aprecierea confortului şi aderenţei roată-sol la automobile 2 285
SIRETEANU, TUDOR (vezi PĂRĂIAN, SORIN) 5 715
SOARE, MIRCEA V., GH. OBLEMENCO, Structuri reticulate planare. Influenţa înălţimii structurii asupra stării de eforturi şi de deformaţii . . . 3 337
SPULBER, CĂTĂLIN (vezi SPULBER, ION) 1 145
SPULBER, CĂTĂLIN (vezi SPULBER, ION) 2 297
SPULBER, ION, C. SPULBER, Contribuţii la studiul tehnologiilor de prelucrarea filierelor pentru trefilare prin mijloace neconvenţionale 1 145
SPULBER, ION, C. SPULBER, Asupra unor condiţii de regim hidrodinamic la prelucrarea prin electroeroziune cu electrod conic 2 297
STAICU, ŞTEFAN, Citeva aspecte privind dinamica solidului cu un punct fix 1 27
STAICU, ŞTEFAN, Asupra dinamicii solidului în mişcarea plan-paralelă . . . 2 207
STAICU, ŞTEFAN, O aplicaţie a metodei Carafoli la studiul mişcării supersonice în jurul unei aripi cruciforme 6 847
STAN, ALECSANDRU D., Asupra mişcărilor nestaţionare prin fisuri cu pereţi permeabili 1 41
STAN, ALECSANDRU D., SORIN OANĂ, Pierderea prin neetanşeitate la spaţiul inelar cu un perete mobil 2 171
STAN, ALECSANDRU D., S. POPOVICIU, Asupra canalizării gazelor către imobile 5 683
STAN, ALECSANDRU D. (vezi OROVEANU, TEODOR) 3 321
STAN, ALECSANDRU D. (vezi OROVEANU, TEODOR) 4 579
STEMATIU, DAN (vezi PIETRARU, VITALIE) 4 563
SZÉKELY, IMRE, I. BOCIAN, V. CHIOREANU, Aspecte noi în teoria angrenajelor conico-evolventice 5 721
ŞELĂRESCU, MIRCEA (vezi PIETRARU, VITALIE) 4 563

ŞELESCU, RICHARD (vezi MATEESCU, DAN) 6 819
ŞTEFĂNESCU, DAN-MIHAI (vezi BĂDESCU, GHEORGHE) 3 451
TÂRCOLEA, CONSTANTIN (vezi DOBRE, GEORGE) 1 153
TEODOSIU, CRISTIAN, AL. T. DUMITRESCU, I. ROŞU, Modelarea procesului de extrudare la cald a oţelurilor inoxidabile 6 869
TUDOR, ANDREI, LI CHUN BO, Aspecte teoretice privind influenţa vitezei de antrenare şi a amortizării asupra parametrilor mişcării sacadate (stick-slip) 5 741
TURCOIU, TITI, N. APOSTOLESCU, O metodă de determinare a legii deplasării pistonului-sertar al pompelor de injecţie 2 275
ŢEPOSU, IOSIF, Legea de rezistenţă $R = -cmv/r^2$ în problema celor două corpuri 5 677
VASILIU, CHIRIAC, TR. CANŢĂ, Asupra rezistenţei la rularea roţilor cu pneuri pe căi nedeformabile 3 439
VASILIU, CHIRIAC, TR. CANŢĂ, Mişcarea şi înscrierea în curbă a automobilului 4 607
VLASE, SORIN, Analiza cinematică a mecanismelor plane cu articulaţii pe modele topologice 4 511